

FAISCEAU AUTOMORPHE UNIPOTENT POUR G_2 , NOMBRES DE FRANEL, ET STRATIFICATION DE THOM-BOARDMAN

LIZAO YE

RÉSUMÉ

Nous généralisons au cas équivariant un résultat de J. Denef et F. Loeser sur les sommes trigonométriques sur un tore ; d'autre part, nous étudions la stratification de Thom-Boardman associée à la multiplication des sections globales des fibrés en droites sur une courbe. Nous montrons une inégalité subtile sur les dimensions de ces strates.

Notre motivation vient du programme de Langlands géométrique. En s'appuyant sur les travaux de W. T. Gan, N. Gurevich, D. Jiang et de S. Lysenko, nous proposons, pour le groupe réductif G de type G_2 , une construction conjecturale du faisceau automorphe dont le paramètre d'Arthur est unipotent et sous-régulier. En utilisant nos deux résultats ci-dessus, nous déterminons les rangs génériques de toutes les composantes isotypiques d'un faisceau S_3 -équivariant qui apparaît dans notre conjecture, ce S_3 étant le centralisateur du SL_2 sous-régulier dans le groupe dual de Langlands de G .

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	1
1. Introduction	2
1.1. Langlands géométrique	2
1.2. Conjecture d'Arthur	3
1.3. Notre conjecture sur G_2	5
2. Résultats principaux	10
2.1. Généralisation de Denef-Loeser	12
2.2. Singularité de $k(X) \times k(X) \times \cdots \times k(X) \rightarrow k(X)$	14
2.3. Raffinement non-singulier <i>canonique</i> d'un éventail	15
3. Stratification de Thom-Boardman	15
3.1. Une condition sur les dimensions des strates	16
3.2. Multiplication des espaces vectoriels <i>dans</i> un corps	17
4. Caractéristique d'Euler-Poincaré équivariante	24
4.1. Complexe de de Rham logarithmique	24

4.2.	Théorie d'Ehrhart équivariante	26
4.3.	Caractéristique d'Euler-Poincaré équivariante des diviseurs sur un tore	28
5.	Sommes trigonométriques équivariantes	42
5.1.	Applications	43
Annexe A.	Transformation de Fourier pour les champs vectoriels, d'après D. Gaitsgory	49
Annexe B.	Raffinement non-singulier et équivariant d'un éventail	50
	Références	52

1. INTRODUCTION

1.1. Langlands géométrique. Une difficulté dans le programme de Langlands géométrique est de construire les faisceaux automorphes associés aux paramètres d'Arthur *unipotents*.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit ℓ un nombre premier différent de p . Nous employons le formalisme des faisceaux ℓ -adiques sur les champs algébriques comme dans [17].

Soit X une courbe projective lisse et irréductible sur k , et G un groupe réductif sur k . Notons par Bun_G le champ (algébrique) classifiant des G -fibrés principaux sur X . Pour tout point $x \in X$, on a la grassmannienne affine Gr_x classifiant les G -fibrés principaux sur X munis d'une trivialisations en dehors de x . On a

$$\text{Gr}_x = G(K_x)/G(O_x).$$

Ainsi il admet l'action du groupe $G(O_x)$ par multiplication à gauche. La catégorie de Hecke Hk_x est la catégorie des faisceaux pervers $G(O_x)$ -équivariants sur Gr_x . Le produit tensoriel sur Hk_x est la convolution. On peut la munir naturellement d'une contrainte de commutativité. La catégorie monoïdale

$$\text{Hk}_X := \otimes'_{x \in X} \text{Hk}_x$$

agit, par modifications de G -fibrés, sur la catégorie

$$\text{Sh}(\text{Bun}_G)$$

des faisceaux (dérivés) sur Bun_G . Le programme de Langlands géométrique vise à étudier la *décomposition spectrale* de $\text{Sh}(\text{Bun}_G)$ sous cette action. On dit que $\mathcal{F} \in \text{Sh}(\text{Bun}_G)$ est un *faisceau propre pour Hecke* s'il est propre sous cette action, c'est-à-dire que pour tout $h \in \text{Hk}_X$,

$$h * \mathcal{F} = E_{\mathcal{F}}(h) \otimes \mathcal{F}.$$

Ici $E_{\mathcal{F}}(h)$ est un faisceau (dérivé) sur un point.

Quel système de valeurs propres $(E_{\mathcal{F}}(h))_{h \in \text{Hk}_X}$ peut-on prendre? En fait, rappelons l'isomorphisme de Satake

$$\text{Sat}_x : \text{Rep}_{\check{G}} \xrightarrow{\sim} \text{Hk}_x,$$

où \check{G} sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ est le groupe réductif dual de G . Langlands et Arthur proposent que les $E_{\mathcal{F}}(h)$ s'organisent en un \check{G} -système local *gradué* σ sur X , de sorte que pour toute représentation V de \check{G} et tout $x \in X$, notant $h = \text{Sat}_x(V)$, on a un isomorphisme entre faisceaux dérivés sur un point :

$$V_{\sigma,x} = E_{\mathcal{F}}(h).$$

Ainsi,

$$(1) \quad h * \mathcal{F} = V_{\sigma,x} \otimes \mathcal{F}.$$

Un tel système local gradué σ s'exprime aussi comme un homomorphisme

$$\sigma : \pi_1(X) \times \text{SL}_2 \rightarrow \check{G},$$

appelé paramètre d'Arthur, où $\pi_1(X)$ désigne le groupe fondamental étale de X . En fait, pour toute représentation V de \check{G} , V_σ sera un système local sur X muni d'une action de SL_2 . L'action du tore diagonal $\mathbb{G}_m \subset \text{SL}_2$ fait de V_σ un système local *gradué*. Ainsi V_σ peut être interprété comme *dérivé*, c'est le sens adopté dans (1). La direction « galois \implies automorphe » du programme de Langlands consiste, pour un paramètre d'Arthur σ donné, à trouver tous les faisceaux \mathcal{F} propres pour Hecke pour le système local gradué associé à σ .

1.2. Conjecture d'Arthur. Nous nous sommes concentrés sur les paramètres d'Arthur dits *unipotents*, ce sont ceux qui se factorisent par $\text{SL}_2 \rightarrow \check{G}$. En termes de \check{G} -systèmes locaux sur X , ce sont des systèmes triviaux mais avec une graduation éventuellement non-triviale. Si un faisceau \mathcal{F} sur Bun_G correspond à un tel paramètre, l'action de Hecke sur \mathcal{F} devient très simple : pour tout $x \in X$ et toute représentation V de \check{G} , notons $h := \text{Sat}_x(V)$, alors

$$(2) \quad h * \mathcal{F} = V|_{\mathbb{G}_m} \otimes \mathcal{F}.$$

Ici, $V|_{\mathbb{G}_m}$ est l'espace vectoriel V muni de la graduation donnée par l'action de

$$\mathbb{G}_m \subset \text{SL}_2 \rightarrow \check{G}.$$

Dans l'équation (2), on considère $V|_{\mathbb{G}_m}$ comme un faisceau *dérivé* sur un point.

Dans la suite, un paramètre d'Arthur sera sous-entendu unipotent, et sera noté simplement

$$\sigma : \mathrm{SL}_2 \rightarrow \check{G}.$$

On dit que σ est *distingué* si son image n'est contenue dans aucun Levi propre de \check{G} .

Arthur, basé sur des considérations autour de la formule de trace, a conjecturé dans [1, Conjecture 8.1] l'existence et l'unicité de représentations automorphes unipotentes. L'analogie géométrique s'énonce comme suivant

Conjecture 1.2.1. *Soit σ un paramètre d'Arthur unipotent distingué, alors il existe un (essentiellement) unique faisceau (dérivé) \mathcal{F} sur Bun_G qui vérifie (2).*

L'unicité dans cet énoncé signifie que les autres faisceaux vérifiant les mêmes conditions sont des sommes directes de plusieurs copies (décalées) de \mathcal{F} . Les classes de conjugaison d'homomorphisme $\sigma : \mathrm{SL}_2 \rightarrow \check{G}$ sont en bijection avec les orbites unipotentes dans \check{G} . Cette bijection est donnée en prenant l'image par σ d'un quelconque élément unipotent qui n'est pas l'identité de SL_2 . Les orbites unipotentes sont (partiellement) ordonnées :

$$O \leq O' \text{ si } O \subset \bar{O}'.$$

Il existe une unique orbite maximale, dite *régulière*, et, si \check{G} est simple, une unique orbite, dite *sous-régulière*, qui est maximale parmi toutes les orbites non-régulières. Les paramètres d'Arthur correspondants se nomment de la même manière. Pour un σ régulier, le faisceau sur Bun_G qui lui correspond est le faisceau *constant*. Si G est de type A, le seul paramètre d'Arthur distingué est le paramètre régulier, donc la conjecture ne dit pas grand chose dans ce cas. Lorsque G est de type B, D, E, F, ou G, mais non pas de type C, l'orbite sous-régulière de \check{G} est distinguée, voir [7]. Une question se pose donc naturellement dans ces cas :

Question 1.2.2. *Comment décrire le faisceau automorphe \mathcal{F}_{sr} associé au paramètre d'Arthur unipotent sous-régulier ?*

Lorsque G est de type D, cette question a été répondue dans [19] via la « correspondance theta » ;¹ lorsque G est de type E_6 ou E_7 , une construction conjecturale est proposée dans la conjecture 9.1 de *loc. cit.* Remarquons que toutes ces constructions sont basées sur le fait que dans ces cas, le groupe G admet au moins un sous-groupe parabolique

1. La partie « unicité » de la conjecture 1.2.1 n'a néanmoins pas été considérée dans la littérature, et ne sera pas discutée dans cet article non plus.

propre dont le radical unipotent est abélien. Ce fait n'est plus valable pour G de type G_2 .

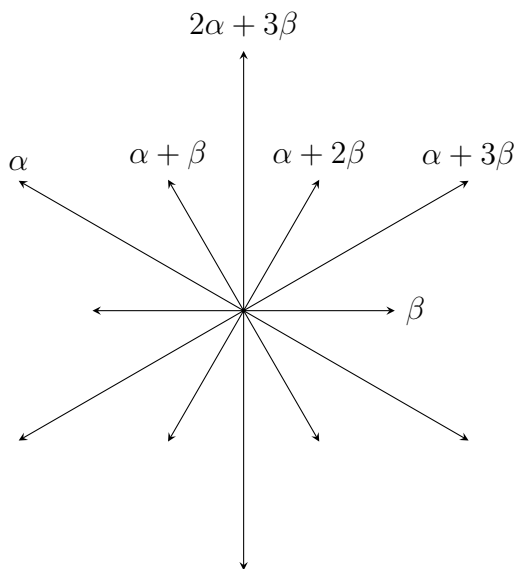


FIGURE 1. Système des racines de G_2

1.3. Notre conjecture sur G_2 . En fait, le groupe G de type G_2 est le groupe de dimension la plus petite pour lequel la question 1.2.2 se pose. Dans ce cas, le faisceau \mathcal{F}_{sr} est l'analogie géométrique de l'exemple le plus essentiel considéré par Langlands lui-même dans son livre [15]. Il apparaît dans l'appendice III de *loc. cit.*, comme illustration de sa méthode de prendre les résidus des *séries d'Eisenstein* pour remplir le *spectre discret*. Ainsi au lieu d'être cuspidal, il est *résiduel*. Cet exemple a ensuite joué un rôle important quand Arthur formulait ses conjectures citées plus haut.² Il a été repris et généralisé au cas ramifié par Mœglin-Waldspurger dans [20, Appendice AIII]. Or, même si les séries d'Eisenstein géométriques existent, voir [6], jusqu'à présent on ne sait pas comment en prendre les « *résidus géométriques* ».

Je propose une construction conjecturale de \mathcal{F}_{sr} pour le groupe G de type G_2 . Pour l'énoncer, nous avons besoin de plus de notations. Fixons un épingleage de G , c'est-à-dire un Borel B de G et un tore maximal T dans B , d'où le système de racines. On note Φ l'ensemble des racines. Dans cet article, nous désignons par « racines simples » celles qui sont habituellement désignées comme « racines simples positives ». On a

² Il écrivait dans [1, p. 57] : “ It seems that the only other elliptic unipotent representation which is known to exist is the Langlands' representation for G_2 .”

$\mathfrak{g} := \text{Lie } G = \text{Lie}(T) \oplus \bigoplus_{\gamma \in \Phi} \mathfrak{g}_\gamma$. On désigne par U_γ le sous-groupe unipotent de G d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_γ . On note θ la plus haute racine. Les racines sont des \mathbb{Z} -combinaisons des racines simples. Si l'on fixe une racine simple et ne regarde que ses coefficients, on obtient une \mathbb{Z} -graduation sur \mathfrak{g} . Pour tout groupe réductif épinglé, on sait que ses paraboliqes standards maximaux sont en bijection avec ses racines simples. On note P^γ le parabolique maximal correspondant à une racine simple γ . On note M^γ le Levi standard de P^γ , et U^γ le radical unipotent de P^γ , et Z^γ le centre de U^γ . Dans le cas du type G_2 , on note β la racine simple courte, qui induit une \mathbb{Z} -graduation

$$\mathfrak{g} := \text{Lie } G = \bigoplus_{n=-3}^3 \mathfrak{g}_n.$$

Pour tout $n \geq 0$, on note $G_{\geq n}$ (resp. G_0) le sous-groupe de G dont l'algèbre de Lie est $\bigoplus_{j \geq n} \mathfrak{g}_j$ (resp. \mathfrak{g}_0). Alors pour tout $m \geq n$, $G_{\geq m}$ est un sous-groupe normal de $G_{\geq n}$. On a

$$G_{\geq 0} = P^\beta, G_0 = M^\beta, G_{\geq 1} = U^\beta, G_{\geq 3} = Z^\beta.$$

On note α la racine simple longue. Alors

$$\begin{aligned} \theta &= 2\alpha + 3\beta, \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_\theta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+3\beta}, \\ \text{Lie}(B/U_\theta) &= \text{Lie}(TU_\beta) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

où $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} := \bigoplus_n \mathfrak{g}_{\alpha+n\beta}$.

Pour le lemme suivant, sur lequel l'énoncé de notre construction conjecturale se base, regardons $\mathfrak{g}_\beta \xrightarrow{\sim} U_\beta \xrightarrow{\sim} (TU_\beta)/T$ comme muni de l'action de TU_β par multiplication à gauche sur $(TU_\beta)/T$. Cette action vient du fait que pour tout TU_β -torseur \mathcal{F}_{TU_β} , le fibré vectoriel associé $(\mathfrak{g}_\beta)_{\mathcal{F}_{TU_\beta}}$ classe les réductions (locales) à T du groupe structural de \mathcal{F}_{TU_β} .

Lemme 1.3.1. *Supposons $\text{car}(k) \neq 2$ ou 3 . Alors, il existe un unique morphisme entre des schémas $\mathfrak{g}_\beta^3 \times \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \rightarrow \mathfrak{g}_{\alpha+3\beta}$ vérifiant les conditions suivantes :*

- Il est $S_3 \times TU_\beta$ -invariant ;
- Sa restriction à $\{0\}^3 \times \mathfrak{g}_{\alpha+3\beta}$ est la projection ;
- Sa restriction à $\mathfrak{g}_\beta^3 \times \mathfrak{g}_\alpha$ n'est pas le morphisme constant « zero ».

Ce morphisme sera linéaire sur le facteur $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, ainsi on peut aussi le considérer comme

$$(3) \quad \mathfrak{g}_\beta^3 \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, \mathfrak{g}_{\alpha+3\beta}).$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}} & \xrightarrow{a} & \text{Bun}_{P^\beta} & \xrightarrow{\pi_{P^\beta}} & \text{Bun}_G \\
 & \searrow \text{pr}_T & & & \\
 & & \text{Bun}_{P^\beta} & & \\
 & \nearrow \text{pr}_{T^\vee} & & & \\
 \mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta}^\vee \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}} & & & & \\
 \uparrow j & & & & \\
 \text{Bun}_{B,\Omega} & \xrightarrow{\pi_B} & \text{Bun}_{B/U_\theta,\Omega} & & \\
 & & \searrow & & \\
 & & \text{Bun}_{TU_\beta,\Omega} & \xrightarrow{\pi_T} & \text{Bun}_{T,\Omega} \\
 & & \nearrow & & \\
 \text{Bun}_{TU_\beta,\Omega}^{3\text{-réduct}} & \xrightarrow{\pi} & \check{\text{Bun}}_{B/U_\theta,\Omega} & &
 \end{array}$$

FIGURE 2.

Remarque 1.3.2. *Utilisant les identifications*

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(\mathfrak{g}_{\alpha+3\beta}, \mathfrak{g}_{\alpha+3\beta}) &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n=0}^3 \text{Hom}(\mathfrak{g}_{\alpha+(3-n)\beta}, \mathfrak{g}_{\alpha+3\beta}), \\
 \mathfrak{g}_\beta^{\otimes n} &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathfrak{g}_{\alpha+(3-n)\beta}, \mathfrak{g}_{\alpha+3\beta}), \quad \otimes s_i \mapsto \prod \text{ads}_i \text{ pour tout } n = 0, \dots, 3,
 \end{aligned}$$

le morphisme (3) s'exprime en fait par la formule

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{g}_\beta^3 &\rightarrow \bigoplus_{n=0}^3 \mathfrak{g}_\beta^{\otimes n} \\
 (s_i) &\mapsto 1 - \frac{1}{3} \sum s_i + \frac{1}{6} \sum_{i < j} s_i s_j - \frac{1}{6} \prod s_i.
 \end{aligned}$$

La figure 2 capture le diagramme des champs concernés.

Explications des notations :

Ici Ω désigne le fibré en droites canonique des formes volumes sur la courbe X . On note par $\text{Bun}_{T,\Omega}$ le champ classifiant $\mathcal{F}_T \in \text{Bun}_T$ muni d'une « trivialisation » $(\mathfrak{g}_{\alpha+3\beta})_{\mathcal{F}_T} \xrightarrow{\sim} \Omega$, où $(\mathfrak{g}_{\alpha+3\beta})_{\mathcal{F}_T}$ désigne le fibré en droites sur X obtenu en tordant $\mathfrak{g}_{\alpha+3\beta}$ par \mathcal{F}_T . Chaque fois que l'indice Ω apparaît, cela signifie des changements de base par rapport au morphisme $\text{Bun}_{T,\Omega} \rightarrow \text{Bun}_T$.

La suite exacte courte de groupes

$$1 \rightarrow Z^\beta \rightarrow P^\beta \rightarrow P^\beta/Z^\beta \rightarrow 1$$

induit $\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}$, dont le champ tangent relatif est noté $T_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}$ qui est muni de la projection canonique pr_T . Comme Z^β est abélien, ce champ tangent relatif se descente canoniquement en un *champ vectoriel*³ \mathcal{V} sur $\text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}$, à savoir celui dont la fibre sur $\mathcal{F}_{P^\beta/Z^\beta}$ est $\text{Bun}_{((\mathfrak{g}_3)_{\mathcal{F}_{P^\beta/Z^\beta}})}$. Alors Bun_{P^β} devient canoniquement un \mathcal{V} -torseur sur $\text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}$. Cette action par \mathcal{V} donne le morphisme a .

De manière duale, on a le champ cotangent relatif $T_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}^\vee$, muni de la projection canonique pr_{T^\vee} , dont la fibre sur un $\mathcal{F}_{P^\beta} \in \text{Bun}_{P^\beta}$ est l'espace vectoriel $\text{Hom}((\mathfrak{g}_3)_{\mathcal{F}_{P^\beta}}, \Omega)$. Dans cet espace linéaire se trouve l'ouvert des applications surjectives. Quand \mathcal{F}_{P^β} varie, cela donne un ouvert de $T_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}^\vee$.

Cet ouvert est naturellement isomorphe à $\text{Bun}_{B,\Omega}$. Expliquons la construction de cette immersion ouverte j . Un point de $\text{Bun}_{B,\Omega}$ est un B -fibré principal \mathcal{F}_B sur X muni d'une « trivialisation » $(\mathfrak{g}_{\alpha+3\beta})_{\mathcal{F}_T} \xrightarrow{\sim} \Omega$ où \mathcal{F}_T est déduit de \mathcal{F}_B via le quotient canonique $B \rightarrow T$. Prenons \mathcal{F}_{P^β} le fibré induit par l'extension de groupes $B \subset P^\beta$, alors $(\mathfrak{g}_3)_{\mathcal{F}_{P^\beta}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{g}_3)_{\mathcal{F}_B} \rightarrow (\mathfrak{g}_{\alpha+3\beta})_{\mathcal{F}_T} \xrightarrow{\sim} \Omega$.

Les paires de flèches au-dessus d'une même base seront des champs vectoriels duaux. Ainsi, la fibre de $\text{Bun}_{B/U_\theta,\Omega} \rightarrow \text{Bun}_{TU_\beta,\Omega}$ sur un \mathcal{F}_{TU_β} étant $\text{Bun}_{((\mathfrak{g}_{\alpha+\beta})_{\mathcal{F}_{TU_\beta}})}$, celle de $\check{\text{Bun}}_{B/U_\theta,\Omega}$ sur ce même point de base sera $\text{Hom}((\mathfrak{g}_{\alpha+\beta})_{\mathcal{F}_{TU_\beta}}, \Omega)$.

Le champ $\text{Bun}_{TU_\beta,\Omega}^{3\text{-réduct}}$ classifie $\mathcal{F}_{TU_\beta} \in \text{Bun}_{TU_\beta,\Omega}$ muni de *trois* réductions numérotées dans $\text{Bun}_{T,\Omega}$. Il admet ainsi une action du groupe symétrique S_3 . Le morphisme π est obtenu en tordant le morphisme (3) par \mathcal{F}_{TU_β} et en prenant ensuite les sections globales des deux côtés. Il est schématique, S_3 -invariant et « cubique » d'après la remarque 1.3.2. A priori, il est quasi-fini.

Pour tout $\mathcal{F}_T \in \text{Bun}_{T,\Omega}$, notons par \mathcal{L} le fibré en droites $(U_\beta)_{\mathcal{F}_T}$ sur X . Le champ $\text{Bun}_{TU_\beta,\Omega}$ est un champ vectoriel sur $\text{Bun}_{T,\Omega}$, dont la fibre sur \mathcal{F}_T est $\text{Bun}_{\mathcal{L}}$ qui est isomorphe au champ vectoriel quotient $[\text{H}^0(X, \mathcal{L})/\text{H}^1(X, \mathcal{L})]$ où l'action est triviale. Notons par d_1 la fonction comptant le rang de ce champ vectoriel, elle induit une bijection $\pi_0(\text{Bun}_{T,\Omega}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Notons $d := \text{H}^0(X, \mathcal{L})$. Lorsque $d_1 > \chi(\Omega)$ ou $d > \dim \text{H}^0(X, \Omega)$, on a $\text{H}^1(X, \mathcal{L}) = 0$ et $d_1 = d$. Remarquons que $\dim \text{H}^0(X, \Omega) = g > g - 1 = \chi(\Omega)$ où g est le genre de la courbe.

3. Voir Annexe A pour cette notion.

Les ensembles des composantes connexes de tous les champs, à part Bun_G qui est connexe, dans la figure 2 sont tous canoniquement bijectifs, les bijections étant induites par les morphismes dans ce diagramme. On peut donc indexer les composantes connexes de ces champs aussi par $d_1 \in \mathbb{Z}$.

Fixons tout au long de l'article un caractère nontrivial $\psi: \mathbb{F}_p \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. Notons par \mathcal{L}_ψ le *faisceau d'Artin-Schreier* sur \mathbb{A}^1 associé à ψ . D'après le théorème A.0.1, nous disposons de la transformation de Fourier, notée Four , identifiant la catégorie des faisceaux pervers sur un champ vectoriel avec celle sur son dual via le noyau \mathcal{L}_ψ . En particulier on a

$$\begin{aligned} \text{Four}_1 : \text{Perv}(\mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}^\vee) &\xrightarrow{\sim} \text{Perv}(\mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}), \\ \text{Four}_2 : \text{Perv}(\check{\text{Bun}}_{B/U_\theta, \Omega}) &\xrightarrow{\sim} \text{Perv}(\text{Bun}_{B/U_\theta, \Omega}). \end{aligned}$$

Sur une composante connexe de Bun_{P^β} indexée par d_1 , le rang χ de $\mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}$ est donné par $\chi = 3(\chi(\Omega) - d_1)$.

Notons par $\text{Perv}(\mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}^\vee)^{\mathcal{V}, \psi}$ la sous-catégorie de $\text{Perv}(\mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}^\vee)$ constituée des faisceaux $(\mathcal{V}, \mathcal{L}_\psi)$ -équivariants. Rappelons que

$$a^*[\chi] : \text{Perv}(\text{Bun}_{P^\beta}) \rightarrow \text{Perv}(\mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}})$$

est un prolongement fidèlement fidèle, et qu'il induit des équivalences réciproques

$$\text{Four}_1^{-1} a^*[\chi] : \text{Perv}(\text{Bun}_{P^\beta}) \xleftarrow{\sim} \text{Perv}(\mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}^\vee)^{\mathcal{V}, \psi} : (\text{pr}_{\mathbb{T}^\vee})_!$$

Les composantes connexes de $\text{Bun}_{TU_\beta, \Omega}^{3\text{-réduct}}$ indexées par $d_1 > \chi(\Omega)$ sont lisses. Il s'ensuit, comme π_B est lisse, et d'après la définition du morphisme fini π , qu'à décalage près,

$$j_{!*}(\pi_B)^* \text{Four}_2(\pi_1 \mathbb{Q}_\ell)|_{\{d_1 > \chi(\Omega)\}} \in \text{Perv}(\mathbb{T}_{\text{Bun}_{P^\beta} \rightarrow \text{Bun}_{P^\beta/Z^\beta}}^\vee)^{\mathcal{V}, \psi}.$$

Ici $j_{!*}$ désigne l'*extension intermédiaire* des faisceaux pervers, cf. [4].

Notre construction conjecturale est :

Conjecture 1.3.3. *Supposons $\text{car}(k) \neq 2$ ou 3 . Alors, il existe un unique faisceau (dérivé) \mathcal{F}_{sr} sur Bun_G tel que, sur chaque composante connexe $\text{Bun}_{P^\beta}^{d_1}$ ⁴ de degré d_1 assez grand ($> \chi(\Omega)$), on a (à décalage près)*

$$(\pi_{P^\beta})^* \mathcal{F}_{sr} \xrightarrow{\sim} (\text{pr}_{\mathbb{T}^\vee})_! j_{!*}(\pi_B)^* \text{Four}_2(\pi_1 \mathbb{Q}_\ell).$$

Ce faisceau vérifie la propriété de Hecke (1) pour le paramètre d'Arthur unipotent sous-régulier $\sigma: \text{SL}_2 \rightarrow \check{G}$.

4. Plus précisément, il faudrait se restreindre encore à son ouvert qui est lisse au dessus de Bun_G .

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Bun}_{B/U_\theta, \Omega} & \\
& \searrow & \\
& & \text{Bun}_{TU_\beta, \Omega} \\
& \nearrow & \\
\text{Bun}_{TU_\beta, \Omega}^{3\text{-réduct}} & \xrightarrow{\pi} & \check{\text{Bun}}_{B/U_\theta, \Omega}
\end{array}$$

FIGURE 3.

Cette conjecture vient des calculs que nous avons effectués basés sur les articles [19] et [12].

2. RÉSULTATS PRINCIPAUX

Comme première étape vers notre conjecture, nous avons mené une étude détaillée du faisceau $\text{Four}_2(\pi_! \mathbb{Q}_\ell)$ qui en est l'élément principal. Il s'agit donc de la figure 3, qui est une partie de la figure 2.

Nous aboutissons en particulier au résultat suivant :

Proposition 2.0.1. *Supposons $\text{car}(k) \neq 2$ ou 3 . Alors, pour d assez grand, le faisceau $\text{Four}_2(\pi_! \mathbb{Q}_\ell)$ sur $\text{Bun}_{B/U_\theta, \Omega}^d$ est pervers (décalé), génériquement un système local (décalé) de rang*

$$F_d := \sum_{i=0}^d \binom{d}{i}^3.$$

Il admet une action du groupe S_3 . Soit $\oplus_\rho \mathcal{F}_\rho \boxtimes \rho$ sa décomposition en composantes S_3 -isotypiques, où ρ parcourt les trois représentations irréductibles $\rho_{\text{triv}}, \rho_{\text{st}}, \rho_{\text{sgn}}$ de S_3 . Alors \mathcal{F}_ρ est un faisceau pervers irréductible dont la restriction sur un ouvert non-vide de $\text{Bun}_{B/U_\theta, \Omega}^d$ est le décalage d'un système local de rang

$$F_d/6 - (-2)^{d-1} + 2^d/3, \quad \text{pour } \rho = \rho_{\text{triv}},$$

$$F_d/3 - 2^d/3, \quad \text{pour } \rho = \rho_{\text{st}},$$

$$F_d/6 + (-2)^{d-1} + 2^d/3, \quad \text{pour } \rho = \rho_{\text{sgn}}.$$

Remarque 2.0.2. *Cette S_3 -symétrie doit venir du fait que le centralisateur de l'image du paramètre sous-régulier $\sigma : \text{SL}_2 \rightarrow \check{G} = \text{G}_2$ est S_3 .*

Remarque 2.0.3. *Ces nombres F_d sont appelés nombres de Franel, puisque Franel, en 1894, dans son article [9], en répondant à une question de Laisant, a trouvé qu'ils satisfont*

$$d^2 F_d = (7d^2 - 7d + 2)F_{d-1} + 8(d-1)^2 F_{d-2}, \text{ pour tout } d \geq 2.$$

Pour $d = 0, 1, 2, \dots$, ces nombres F_d sont donnés par :

1, 2, 10, 56, 346, 2252, 15184, 104960, 739162, 5280932, 38165260, 278415920, 2046924400, 15148345760, 112738423360, 843126957056, \dots

Don Zagier l'appelle « séquence A » dans [24], il l'a trouvée comme la première des six suites entières sporadiques satisfaisant une certaine équation de récurrence « à la Apéry ».

Dans un certain sens, nous introduisons une structure S_3 -équivariante sur ces nombres.

On ne peut s'empêcher de spéculer sur la possibilité que ses autres suites sporadiques, qu'il a démontrées être modulaires, soient liées aux autres faisceaux automorphes unipotents.

Démonstration de la proposition 2.0.1. Suivons les notations de l'énoncé.

Pour d assez grand, le morphisme $\text{Bun}_{T,\Omega} \rightarrow \text{Bun}_{TU_\beta,\Omega}$ est un fibré vectoriel. En particulier, il est lisse et surjectif. Il suffit donc de démontrer l'analogie de l'énoncé après le changement de base par rapport à ce morphisme. Décrivons l'analogie de la figure 3 après ce changement de base. Sur un point $\bullet \rightarrow \text{Bun}_{T,\Omega}$ correspondant à un fibré \mathcal{F}_T (muni de $(\mathfrak{g}_{\alpha+3\beta})_{\mathcal{F}_T} \xrightarrow{\sim} \Omega$), en notant $\mathcal{L} := (U_\beta)_{\mathcal{F}_T}$ le fibré en droites associé, et d'après la remarque 1.3.2 concernant le morphisme π , la figure 3 devient la figure 4.⁵

La perversité et l'irréductibilité des faisceaux \mathcal{F}_ρ se voient aussitôt car φ , et donc π , est quasi-fini et en plus l'image inverse d'un point générique de son image est une orbite libre sous l'action du groupe S_3 . La partie concernant les rangs génériques des \mathcal{F}_ρ se reformule comme dans la proposition 2.0.4 suivant. \square

5. Plus précisément, selon la remarque 1.3.2, le morphisme φ ici aurait dû être suivi de l'automorphisme linéaire de $\bigoplus_{n=0}^3 H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ induit par des homothéties de rapport $(-1)^n \frac{(3-n)!}{3!}$ sur $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ pour $n = 0, 1, \dots, 3$. Nous négligeons volontairement cet automorphisme, qui n'a pas d'impacts sur la suite de nos analyses, pour simplifier la présentation.

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{n=0}^3 H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes(-n)} \otimes \Omega) & & \\
& \searrow & \\
& & \bullet \\
& \swarrow & \\
H^0(X, \mathcal{L})^3 & \xrightarrow{\varphi} & \bigoplus_{n=0}^3 H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})
\end{array}$$

$$(s_i) \longmapsto \prod(1 + s_i)$$

FIGURE 4.

Proposition 2.0.4. *Pour tout $\gamma \in S_3$ et tout $l \in \bigoplus_{n=0}^3 H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes(-n)} \otimes \Omega)$ générique,*

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}(\gamma; H_{c,\text{ét}}^\bullet(H^0(X, \mathcal{L})^3, (l \circ \varphi)^* \mathcal{L}_\psi)) \\
&= \begin{cases} (-2)^d, & \text{lorsque } \gamma \text{ est transitif;} \\ 2^d, & \text{lorsque } \gamma \text{ est une transposition;} \\ (-1)^d F_d, & \text{lorsque } \gamma \text{ est l'identité.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Cette proposition sera le sujet du reste de l'article. Elle est un cas particulier de la proposition 5.1.8, compte tenu de la remarque 5.1.4.

Notre démonstration de la proposition 2.0.4 est basée sur nos deux résultats en géométrie algébrique. Présentons-les dans cette partie.

2.1. Généralisation de Denef-Loeser. Le premier concerne les sommes trigonométriques sur les tores. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit T un tore sur k . Notons par Λ le réseau des poids de T . Soit $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda t^\lambda$ une fonction sur T . Notons par $\Delta(f) \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$ l'enveloppe convexe de $\{\lambda | c_\lambda \neq 0\}$, et par $\Delta_\infty(f)$ l'enveloppe convexe de $\{0\} \cup \Delta(f)$. On dit que f est *non-dégénérée à l'infini* si pour toute face Γ de $\Delta_\infty(f)$ ne contenant pas 0, les conditions suivantes sont satisfaites :

- Le diviseur sur T défini par $f|_\Gamma := \sum_{\lambda \in \Gamma \cap \Lambda} c_\lambda t^\lambda$ est lisse.
- Il existe $l \in \Lambda^\vee$ telle que, considérée comme fonction sur Γ , elle est constante de valeur (entière) non-divisible par p .⁶

⁶. Cette deuxième condition n'était pas mentionnée dans [18]. Cette négligence a été rattrapée dans [10, Theorem 0.4 (iii)].

Un résultat de J. Denef et F. Loeser, voir [18, Theorem (1.3)], ou [10, Theorem 0.4 (i)], dit que si f est non-dégénérée à l'infini et si $\Delta := \Delta_\infty(f)$ est de dimension égale à $\dim T$, alors la caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologie ℓ -adique à support compact $H_{c,\text{ét}}^\bullet(T, f^*\mathcal{L}_\psi)$ est donnée par

$$(-1)^{\dim T} (\dim \Delta)! \text{Vol}(\Delta).$$

Nous le généralisons au cas équivariant où f est fixée par un groupe fini $\mathfrak{G} \subset \text{Aut}(\Lambda)$. Pour tout $\gamma \in \mathfrak{G}$, notons par $\Delta^\gamma \subseteq \Delta$ le sous-polytope des points fixes sous γ . Alors, sous les mêmes hypothèses, nous montrons :

Théorème 2.1.1 (Théorème 5.0.2 et Proposition 4.3.30). *Pour tout $\gamma \in \mathfrak{G}$,*

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(\gamma; H_{c,\text{ét}}^\bullet(T, f^*\mathcal{L}_\psi)) \\ &= (-1)^{\dim T} \det(\gamma; \Lambda) \det(1 - \gamma; (\Delta^\gamma - \Delta^\gamma)^\perp) \dim(\Delta^\gamma)! \text{Vol}(\Delta^\gamma), \end{aligned}$$

où $(\Delta^\gamma - \Delta^\gamma)^\perp$ désigne l'espace linéaire $\{l \in \Lambda^\vee \otimes \mathbb{R} \mid l \text{ est constante sur } \Delta^\gamma\}$.

Pour $\gamma = 1$, on retrouve le résultat cité ci-dessus. Pour montrer cette généralisation, on est réduit, en utilisant la *formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič* comme dans [18, Proposition (3.2)], à calculer

$$\text{Tr}(\gamma; H_{c,\text{ét}}^\bullet(T, G^{-1}(0)))$$

où $G := f - c$ avec c générique. L'analogie de cette trace en caractéristique 0 a été calculée par Stapledon dans [22, Theorem 6.5]. Pour faire la comparaison, nous montrons qu'il existe un relèvement \mathfrak{G} -invariant \hat{G} de G sur l'anneau de Witt $R := W(k)$ et montrons que $\hat{G}^{-1}(0)$ admet une compactification lisse sur R dans laquelle le complément de $\hat{G}^{-1}(0)$ est un diviseur strictement à croisements normaux relatif à R , et que l'action de \mathfrak{G} sur $\hat{G}^{-1}(0)$ s'étend sur cette compactification. En caractéristique 0, nous avons le résultat plus général suivant.

Proposition 2.1.2 (Propositions 4.2.3 et 4.2.5). *Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique 0, soit \mathcal{P} une variété lisse sur F , $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$ un diviseur lisse, et $D \hookrightarrow \mathcal{P}$ un diviseur strictement à croisements normaux tel que l'immersion fermée $D \cap \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}$ l'est aussi. Soit \mathfrak{G} un groupe agissant sur \mathcal{P} de façon à préserver \mathcal{X}, D . Supposons les conditions suivantes vérifiées :*

- L'inclusion canonique $F \hookrightarrow H^0(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$ est un isomorphisme ;
- Le fibré vectoriel $\Omega_{\mathcal{P}}^1(\log D)$ sur \mathcal{P} est trivialisable ;
- En tant que $F[\mathfrak{G}]$ -module, $H^0(\mathcal{P}, \Omega_{\mathcal{P}}^1(\log D))$ est isomorphe à son dual. On le note par ρ .

Alors, il existe un (unique) polynôme $\varphi(s)$ à coefficients dans le K -groupe $K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})$, tel que la série de Hilbert-Poincaré satisfait

$$\sum_{n \geq 0} H^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{O}(n\mathcal{X}))s^n = \frac{\varphi(s)}{(1-s)\det(1-s\rho)}$$

dans $K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})[[s]]$, et tel que, en notant $\mathcal{X}^\circ := \mathcal{X} - \mathcal{X} \cap D$, la cohomologie de de Rham algébrique satisfait

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ) = H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{P} - D) - (-1)^{\dim \mathcal{P}} \det(\rho)\varphi(1)$$

dans $K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})$.

Pour une fonction G non-dégénérée et \mathfrak{G} -invariante sur un tore T comme ci-dessus, notons $\Delta = \Delta(G)$. On peut s'arranger pour trouver des triplets $(\mathcal{P}, \mathcal{X}, D)$ comme ci-dessus tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^\circ &= G^{-1}(0), \mathcal{P} - D = T, \rho = \Lambda \otimes F, \\ H^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{O}(n\mathcal{X})) &= F[(n\Delta) \cap \Lambda]. \end{aligned}$$

C'est la base de tout nos calculs et fait le lien avec la *série d'Ehrhart*

$$\sum_{n \geq 0} F[(n\Delta) \cap \Lambda]s^n$$

dont la trace sous $\gamma \in \mathfrak{G}$, lorsque $s \rightarrow 1^-$, est asymptotiquement équivalente à

$$\frac{\dim(\Delta^\gamma)! \text{Vol}(\Delta^\gamma)}{(1-s)^{\dim(\Delta^\gamma)+1}}.$$

2.2. Singularité de $k(X) \times k(X) \times \cdots \times k(X) \rightarrow k(X)$. Pour analyser $\text{Four}(\varphi_! \mathbb{Q}_\ell)$ ainsi que l'action de S_3 là-dessus, nous stratifions l'espace vectoriel $\bigoplus_{n=0}^3 H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ par des tores bien choisis, et on applique le théorème 2.1.1 sur chaque tore.⁷ Ainsi, il reste à montrer la condition de non-dégénérescence requise dans 2.1.1. Cette condition se trouve être hautement non-triviale dans notre situation, due au fait que notre morphisme φ est très singulier et d'image très mince. On le réduit au théorème ci-dessous utilisant la notion de *stratification de Thom-Boardman* qui à un morphisme $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ entre des variétés lisses associe la stratification de \mathcal{X} par les strates

$$\Sigma^r(\pi) := \{x \in \mathcal{X} \mid \dim(d\pi)_* T_x \mathcal{X} = r\},$$

7. Cette stratégie de stratifier un espace vectoriel par des tores se trouve aussi dans [10, Corollary 0.10]. La différence est que, d'une part, son article ne considère pas les cas équivariants, c'est-à-dire avec l'action d'un groupe comme notre S_3 ici. D'autre part, ses espaces vectoriels sont « sans structures internes ». Les nôtres sont formés des sections globales des fibrés en droites sur une courbe, le choix d'une base bien adaptée n'est donc plus automatique.

où r parcourt les entiers naturels.

Voici le deuxième résultat en géométrie algébrique mentionné plus haut.

Théorème 2.2.1 (Théorème 3.2.8). *Soit X/k une courbe projective, lisse, et géométriquement irréductible. Soit I un ensemble fini. Soit \mathcal{L} un fibré en droites sur X . Soient $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ des sous-faisceaux de \mathcal{L} . Prenons la k -algèbre intègre $\prod_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ et notons par \mathcal{K} son corps de fraction. Pour tout $i \in I$, prenons un k -sous-espace vectoriel V_i de \mathcal{K} qui est soit $k \oplus H^0(X, \mathcal{L}_i)$, soit $H^0(X, \mathcal{L}_i)$. Alors le morphisme « produit »*

$$m : \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K})$$

satisfait

$$\dim \Sigma^r(m) \leq r, \text{ pour tout } r \geq 0.$$

Voir aussi Théorème 3.2.7 pour une version légèrement plus simple, qui rend plus explicite le lien avec la singularité de la multiplication

$$k(X) \times k(X) \times \cdots \times k(X) \rightarrow k(X).$$

2.3. Raffinement non-singulier canonique d'un éventail. L'annexe B contient notre construction explicite d'un raffinement non-singulier *canonique* d'un éventail.

Remerciements. Cet article est la thèse de l'auteur, faite à l'Institut Élie Cartan de l'Université de Lorraine. L'auteur remercie son directeur de thèse S. Lysenko pour son encouragement et pour de nombreuses discussions.

3. STRATIFICATION DE THOM-BOARDMAN

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque. Dans ce paragraphe, toutes les variétés sont définies sur k , et un point d'une telle variété signifie un k -point. Pour un point z sur une telle variété, on désigne par \mathcal{O}_z l'anneau local en z et \mathfrak{m}_z l'idéal maximal de \mathcal{O}_z .

Soit $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme entre variétés lisses. Il induit, sur tout point x de \mathcal{X} , l'application tangente

$$(d\varphi)_* : T_x \mathcal{X} \rightarrow T_{\varphi(x)} \mathcal{Y}.$$

Généralisant les travaux de Morse sur les « singularités » de φ , Thom, dans [23], a associé à φ une stratification de \mathcal{X} par des sous-variétés

$$\Sigma^r(\varphi) := \{x \in \mathcal{X} \mid \dim(d\varphi)_* T_x \mathcal{X} = r\}, r \geq 0.$$

Cette stratification a ensuite été poursuivie par Boardman dans [5].

3.1. Une condition sur les dimensions des strates. Il est dans notre intérêt de connaître les dimensions des $\Sigma^r(\varphi)$. On a par exemple la formule « produit des corangs » si φ est « générique », voir [23, Théorème 2]. Attention néanmoins à la différence entre nos notations.

On se demande en particulier si la condition suivante est vérifiée :

$$(4) \quad \dim \Sigma^r(\varphi) \leq r, \text{ pour tout } r \geq 0.$$

Elle est équivalente à : il existe une famille finie de variétés \mathcal{X}_i au-dessus de \mathcal{X} telles que les images des \mathcal{X}_i couvrent \mathcal{X} et pour tout x dans l'image de \mathcal{X}_i , on a

$$\dim(d\varphi)_*T_x\mathcal{X} \geq \dim \mathcal{X}_i.$$

Dans cet article, on montre toujours cette condition équivalente pour justifier (4). L'intérêt principal selon nous de la condition (4) est le suivant :

Lemme 3.1.1. *Soit \mathcal{Y}, \mathcal{Z} des variétés lisses. Soit \mathcal{L} un fibré en droites sur \mathcal{Z} tel que $H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ est de dimension finie sur k et que pour tout point $z \in \mathcal{Z}$, l'application canonique $H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_z/\mathfrak{m}_z^2$ est surjective. Soit $\varphi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ un morphisme vérifiant (4). Alors toute section globale $s \in H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ générique définit un diviseur lisse sur \mathcal{Y} .*

Démonstration. Pour toute section $s \in H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ et tout point $y \in \mathcal{Y}$, notons \mathcal{S}_y le noyau de l'application canonique $H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^2$. Alors, s définit un diviseur lisse sur \mathcal{Y} au voisinage de y si et seulement si $s \notin \mathcal{S}_y$. Ainsi, s définit un diviseur lisse sur \mathcal{Y} si et seulement si $s \notin \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{S}_y$. D'autre part, pour tout point $y \in \mathcal{Y}$, notons $z := \varphi(y)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $y \in \Sigma^r(\varphi)$.
- Le noyau de l'application canonique $\mathcal{O}_z/\mathfrak{m}_z^2 \rightarrow \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^2$ est de codimension $r + 1$.

De plus, comme $H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_z/\mathfrak{m}_z^2$ est surjective, elles sont encore équivalentes à

- \mathcal{S}_y est de codimension $r + 1$ dans $H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$.

Ainsi la codimension de $\bigcup_{y \in \Sigma^r(\varphi)} \mathcal{S}_y$ dans $H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ est au moins $r + 1 - \dim \Sigma^r(\varphi)$. Ayant supposé $\dim \Sigma^r(\varphi) \leq r$, cette codimension est au moins 1. Il s'ensuit que la codimension de $\bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{S}_y = \bigcup_r \bigcup_{y \in \Sigma^r(\varphi)} \mathcal{S}_y$ dans $H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ est aussi au moins 1, ce qui termine la preuve. \square

On en utilisera plutôt le corollaire suivant :

Lemme 3.1.2. *Soit V un espace vectoriel. Soient \mathcal{X}, \mathcal{Y} des variétés lisses. Soit*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\varphi_1} & V - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}(V) \end{array}$$

un diagramme commutatif où π est lisse. Supposons φ satisfait (4), alors pour tout $l \in V^\vee$ générique, la fonction $l \circ \varphi_1$ définit un diviseur lisse sur \mathcal{X} .

Si V est de dimension infinie, on le considère comme l'ind-schéma "colim $_U$ " U où U parcourt les sous-espaces vectoriels de V de dimensions finies. Similairement pour $V - \{0\}$ et $\mathbb{P}(V)$.

Démonstration. Prenons $\mathcal{Z} := \mathbb{P}(V)$. La projection canonique $V - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ est un \mathbb{G}_m -torseur sous l'action canonique de \mathbb{G}_m sur $V - \{0\}$ par dilatation, et donc correspond à un fibré en droites sur \mathcal{Z} . Prenons \mathcal{L} le fibré en droites dual. Alors, le diagramme commutatif dans l'énoncé n'est rien d'autre qu'une trivialisatoin du tiré en arrière de \mathcal{L} sur \mathcal{X} . On a canoniquement $H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} V^\vee$. Ce que l'on veut montrer devient alors : toute $s \in H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ générique définit un diviseur lisse sur \mathcal{X} . Comme π est lisse, il suffit de montrer que : toute $s \in H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ générique définit un diviseur lisse sur \mathcal{Y} . Ceci découle du lemme 3.1.1 appliqué au morphisme φ , car pour tout $z \in \mathcal{Z}$, l'application canonique $H^0(\mathcal{Z}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_z/\mathfrak{m}_z^2$ est bijective, donc est en particulier surjective. \square

3.2. Multiplication des espaces vectoriels dans un corps. Pour tout espace vectoriel V sur k , on considère $\mathbb{P}(V)$ comme l'ind-schéma "colim $_U$ " $\mathbb{P}(U)$ où U parcourt les sous- k -espaces vectoriels de V de dimensions finies. Alors, pour toute k -droite $L \subset V$, on a canoniquement

$$T_L \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(L, V)/k.$$

Soit A une k -algèbre (commutative). Notons A^\times le groupe des éléments inversibles de A . Alors, les faisceaux en groupes pour la topologie *fpqc*, $\text{Res}_{A|k} \mathbb{G}_m$ et $\text{Res}_{A|k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$, sont naturellement des ind-schémas agissant sur l'ind-schéma $\mathbb{P}(A)$. En effet, sur un k -schéma \mathcal{S} , ces trois faisceaux classifient respectivement :

- les sections globales sur \mathcal{S} du faisceau $(A \otimes_k \mathcal{O}_{\mathcal{S}})^\times$.
- les classes d'isomorphisme des triplets (\mathcal{L}, s_1, s_2) où \mathcal{L} est un fibré en droites sur \mathcal{S} , et s (resp. s') est une section globale sur \mathcal{S} du faisceau $A \otimes_k \mathcal{L}$ (resp. $A \otimes_k \mathcal{L}^\vee$) telles que $s \otimes_A s' = 1$ en tant que section globale du faisceau $A \otimes_k \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$.

- les classes d'isomorphisme des couples (\mathcal{M}, s_0) où \mathcal{M} est un fibré en droites sur \mathcal{S} , et s_0 est une section globale sur \mathcal{S} du faisceau $A \otimes_k \mathcal{M}$ telle que

$$\mathrm{Hom}_k(A, k) \otimes_k \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{M}, e \otimes f \mapsto f \cdot \langle e \otimes \mathrm{id}, s_0 \rangle$$

est un épimorphisme.

Sous ces termes, l'action de $\mathrm{Res}_{A|k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{P}(A)$ est donnée par :

$$(\mathcal{L}, s_1, s_2) \cdot (\mathcal{M}, s_0) := (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{M}, s_1 \otimes_A s_0).$$

Au niveau des k -points, ces actions deviennent les actions naturelles de A^\times et de A^\times/k^\times sur $(A - \{0\})/k^\times$ par multiplication. On remarque aussi que $\mathrm{Res}_{A|k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$, en oubliant s_2 , est naturellement un sous-faisceau de $\mathbb{P}(A)$. Si A est lui-même un corps \mathcal{K} , alors, $\mathcal{K}^\times = \mathcal{K} - \{0\}$.

Proposition 3.2.1. *L'inclusion d'ind-schémas*

$$(5) \quad \mathrm{Res}_{\mathcal{K}|k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{K})$$

induit des bijections au niveau de leurs valeurs sur tout k -schéma fini. De plus, l'action ci-dessus de $\mathrm{Res}_{\mathcal{K}|k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ devient transitive et libre au niveau de leurs valeurs sur tout k -schéma fini.

Ainsi les espaces tangents sur tous les k -points de $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ sont tous *canoniquement* isomorphes à

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}|k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}/k.$$

D'ailleurs, l'ensemble des k -sous-espaces vectoriels de \mathcal{K} forment un *demi-anneau* sous l'addition usuelle et la multiplication donnée par : $V \cdot W$ est le k -sous-espace vectoriel de \mathcal{K} engendré par les vw où $v \in V, w \in W$. Les éléments multiplicativement inversibles sont exactement les k -droites dans \mathcal{K} . Ainsi pour tout k -sous-espace vectoriel $V \subset \mathcal{K}$ et toute k -droite $L \subset \mathcal{K}$, le quotient $\frac{V}{L}$ est bien défini et désigne l'unique sous k -space vectoriel de \mathcal{K} dont le produit avec L donne V . Ceci induit une multiplication m sur l'ind-schéma $\mathbb{P}(\mathcal{K})$, compatible avec celle sur le groupe $\mathrm{Res}_{\mathcal{K}|k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ et l'inclusion (5).

On a le diagramme commutatif suivant pour tout k -sous-espace vectoriel V de \mathcal{K} et toute k -droite $L \subset V$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}_L \mathbb{P}(V) & \hookrightarrow & \mathrm{T}_L \mathbb{P}(\mathcal{K}) \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{V}{L}/k & \hookrightarrow & \mathcal{K}/k \end{array}$$

En outre, soient $L_1, L_2 \subset \mathcal{K}$ des k -droites, et notons $L := L_1 \cdot L_2 \subset \mathcal{K}$ le produit. Alors on a diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^2 T_{L_i} \mathbb{P}(\mathcal{K}) & \xrightarrow{(\mathrm{dm})^*} & T_L \mathbb{P}(\mathcal{K}) \\ \parallel & & \parallel \\ \prod_{i=1}^2 (\mathcal{K}/k) & \xrightarrow{+} & \mathcal{K}/k \end{array}$$

Pour le voir, il suffit, grâce à la proposition 3.2.1, de le comparer avec le diagramme correspondant pour la multiplication sur le *groupe* $\mathrm{Res}_{A|k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$.

Dans ce cadre, une question naturelle se pose :

Question 3.2.2. *Soit I un ensemble fini. Soient $(V_i)_{i \in I}$ des k -sous-espaces vectoriels de dimension finie de \mathcal{K} . Est-ce que le morphisme « produit »*

$$m : \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K})$$

satisfait (4) ?

On n'en traite ici que deux cas particuliers. La réponse est affirmative dans ces deux cas.

3.2.3. Cas I.

Proposition 3.2.4. *Soit E un espace affine sur k . Soit $\mathcal{K} := k(E)$ le corps des fonctions rationnelles sur E . Soient $V_i \subset \mathcal{K}$ des k -sous-espaces vectoriels de dimension finie, tous constitués d'applications affines sur E . Alors le morphisme « produit »*

$$m : \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K})$$

satisfait (4).

Démonstration. Considérons les classes d'isomorphisme de la donnée de

- un ensemble J_0 avec un élément marqué $* \in J_0$;
- une application $\pi : I \rightarrow J_0$

sujette aux conditions suivantes :

- $k \subset V_i$ si $\pi(i) = *$;
- notons $J := J_0 - \{*\}$, alors aucun des $V_j := \bigcap_{i, \pi(i)=j} V_i$ pour $j \in J$ n'est contenu dans k , et que parmi eux, ceux qui sont de dimension 1 sont deux-à-deux différents.

Pour une telle classe, prenons la variété $\mathcal{X}_{J_0, *, \pi}$, notée plus simplement par \mathcal{X}_π , des $(L_i) \in \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i)$ satisfaisant

- $L_i = k$ si et seulement si $\pi(i) = *$;
- $L_i = L_{i'}$ si et seulement si $\pi(i) = \pi(i')$.

Ces variétés, non-vides, forment une stratification de $\prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i)$. En outre, on a une immersion ouverte

$$\mathcal{X}_\pi \subset \prod_{j \in J} \mathbb{P}(V_j).$$

Il s'ensuit que

$$\dim \mathcal{X}_\pi = \sum_{j \in J} \dim \mathbb{P}(V_j).$$

On notera $(L_j) \in \prod_{j \in J} \mathbb{P}(V_j)$ l'image de (L_i) sous cette immersion. Pour conclure, il suffit de montrer que pour tout $(L_i) \in \mathcal{X}_\pi$, on a

$$\dim(\mathrm{dm})_* \mathrm{T}_{(L_i)} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \geq \dim \mathcal{X}_\pi.$$

Suivant le formalisme du paragraphe 3.2, on a

$$(\mathrm{dm})_* \mathrm{T}_{(L_i)} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) = \left(\sum_i \frac{V_i}{L_i} \right) / k = \left(\sum_{i, \pi(i)=*} V_i + \sum_{j \in J} \frac{\sum_{i, \pi(i)=j} V_i}{L_j} \right) / k.$$

Ainsi,

$$(\mathrm{dm})_* \mathrm{T}_{(L_i)} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \supset \left(\sum_{j \in J} \frac{V_j}{L_j} \right) / k.$$

Il reste à montrer que

$$\dim \left(\left(\sum_{j \in J} \frac{V_j}{L_j} \right) / k \right) \geq \sum_{j \in J} \dim \mathbb{P}(V_j),$$

lequel découle du lemme suivant. □

Lemme 3.2.5. *Soit E un espace affine sur k . Soient $(l_j)_j, (v_j)_j$ des applications affines sur E , où j parcourt un ensemble fini non-vide J . Supposons les l_j deux-à-deux non-proportionnelles et qu'aucune des l_j et des $\frac{v_j}{l_j}$ n'est constante. Alors $\sum_j \frac{v_j}{l_j}$ n'est pas constante non plus.*

Démonstration. C'est clair car la fonction $\sum_j \frac{v_j}{l_j}$ sur E a des singularités sur tous les hyperplans définis par $l_j = 0$. □

3.2.6. *Cas II.* Pour donner un aperçu de ce dont il s'agit, on l'énonce d'abord dans une situation légèrement plus simple.

Théorème 3.2.7. *Soit X/k une courbe projective, lisse, et géométriquement irréductible. Soit $\mathcal{K} := k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X . Soit $D_i \hookrightarrow X$ des diviseurs, et*

$$V_i := \{f \in \mathcal{K} \mid \mathrm{div}(f) \geq -D_i\} \subset \mathcal{K}.$$

Alors le morphisme « produit »

$$m : \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K})$$

satisfait (4).

En fait, plus généralement,

Théorème 3.2.8. *Soit X/k une courbe projective, lisse, et géométriquement irréductible. Soit I un ensemble fini. Soit \mathcal{L} un fibré en droites sur X . Soient $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ des sous-faisceaux de \mathcal{L} . Prenons la k -algèbre intègre $\prod_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ et notons par \mathcal{K} son corps de fraction. Pour tout $i \in I$, prenons un k -sous-espace vectoriel V_i de \mathcal{K} qui est soit $k \oplus H^0(X, \mathcal{L}_i)$, soit $H^0(X, \mathcal{L}_i)$. Alors le morphisme « produit »*

$$m : \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K})$$

satisfait (4).

Pour retrouver la proposition 3.2.7, prenons, pour tout i , $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}(D_i)$ pour un diviseur $D_i \hookrightarrow X$ et $V_i := H^0(X, \mathcal{L}_i)$. Alors, le corps \mathcal{K} défini ici sera différent de celui pris dans la proposition 3.2.7. Cette différence n'a pas d'impact sur l'énoncé, et n'est en fait nécessaire que si certain $V_i = k \oplus H^0(X, \mathcal{L}_i)$.

Démonstration de 3.2.8. On peut supposer que les \mathcal{L}_i sont tous non-nuls. Ils sont alors aussi des fibrés en droites.

Nous construisons une famille couvrante de morphisms $\mathcal{X}_{J,\alpha,\pi,m} \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i)$ vérifiant l'inégalité décrite au-dessous de (4). Voici les détails dans le suivant. Considérons les classes d'isomorphisme de la donnée de

- un ensemble J muni d'une partition $\alpha : J = J_1 \sqcup J_2$;
- une application surjective $\pi : I \rightarrow J$;
- un entier naturel m

sujette aux conditions suivantes :

- $\pi(i) \in J_2$ si $V_i = H^0(X, \mathcal{L}_i)$;
- l'application restreinte $\pi^{-1}(J_2) \xrightarrow{\pi} J_2$ est bijective.

Pour une telle classe, notons $\mathcal{L}_j := \bigcap_{i, \pi(i)=j} \mathcal{L}_i$ pour tout $j \in J$, et prenons la variété $\mathcal{X}_{J,\alpha,\pi,m}$, notée plus simplement $\mathcal{X}_{\pi,m}$, qui classifie la donnée de

- pour tout $j \in J_2$, une suite décroissante des fibrés en droites sur X

$$\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_{j,0} \supseteq \mathcal{L}_{j,1} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{L}_{j,m}$$

- pour tout $j \in J_1$, une section $s_j \in H^0(X, \mathcal{L}_j)$
- sujette aux conditions suivantes :
- les $(s_j)_{j \in J_1}$ sont deux-à-deux différentes ;
 - pour tout $n \in \{1, \dots, m\}$, au moins un $j \in J_2$ est tel que

$$H^0(X, \mathcal{L}_{j,n-1}) \neq H^0(X, \mathcal{L}_{j,n});$$

- pour tout $n \in \{1, \dots, m\}$, il existe un point $x_n \in X$, nécessairement unique, tel que pour tout $j \in J_2$, l'inclusion $\mathcal{L}_{j,n-1} \subset \mathcal{L}_{j,n}$ est un isomorphisme en dehors de x_n ;
- les (x_n) sont deux-à-deux différents ;
- pour tout $j \in J_2$, $H^0(X, \mathcal{L}_{j,m})$ est de dimension 1, et de plus, si $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{L}_{j,m}$ représente un élément non-nul dedans, alors pour tout $n \in \{1, \dots, m\}$, l'inclusion induite $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{L}_{j,n}$ est un isomorphisme en x_n .

Remarquons tout de suite que m ne peut pas être trop grand pour que cette variété soit non-vide, ainsi seul un nombre fini de ses variétés sont non-vides. D'autre part, comme $s_j \in H^0(X, \mathcal{L}_j)$ pour tout $j \in J_1$ et que $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$, on a un morphisme naturel

$$\mathcal{X}_{\pi,m} \rightarrow \prod_{j \in J_1} H^0(X, \mathcal{L}_j) \times X^m.$$

Ce morphisme est *quasi-fini*, ce qui donne l'estimation

$$\dim \mathcal{X}_{\pi,m} \leq \sum_{j \in J_1} \dim H^0(X, \mathcal{L}_j) + m.$$

D'autre côté, on a un morphisme naturel

$$\mathcal{X}_{\pi,m} \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i)$$

envoyant une donnée comme ci-dessus à la donnée, pour tout $i \in I$, de la droite $L_i \subset V_i$ définie, en notant $j := \pi(i)$, comme $k \cdot (1 + s_j)$ si $j \in J_1$, et comme $H^0(X, \mathcal{L}_{j,m})$ si $j \in J_2$. On observe que :

$$\text{les images de ces morphismes couvrent } \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i).$$

Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que

$$\dim(\mathrm{dm})_* T_{(L_i)} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \geq \dim \mathcal{X}_{\pi,m}.$$

Montrons, plus fortement, que

$$\dim(\mathrm{dm})_* T_{(L_i)} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \geq \sum_{j \in J_1} \dim H^0(X, \mathcal{L}_j) + m.$$

Suivant le formalisme du paragraphe 3.2, on a

$$(\mathrm{dm})_* \mathrm{T}_{(L_i)} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) = \left(\sum_i \frac{V_i}{L_i} \right) / k,$$

et donc est égal à

$$\left(\sum_{j \in J_1} \frac{\sum_{i, \pi(i)=j} V_i}{1 + s_j} + \sum_{j \in J_2} \frac{\sum_{i, \pi(i)=j} V_i}{L_j} \right) / k.$$

Il s'ensuit que $(\mathrm{dm})_* \mathrm{T}_{(L_i)} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i)$ contient les deux sous-espaces vectoriels

- $\sum_{j \in J_1} \frac{H^0(X, \mathcal{L}_j)}{1 + s_j}$;
- $(\sum_{j \in J_2} \frac{H^0(X, \mathcal{L}_j)}{L_j}) / k$.

Pour conclure, on est réduit à montrer les faits suivants

- a) L'intersection de ces deux sous-espaces est 0.
- b) La somme $\sum_{j \in J_1} \frac{H^0(X, \mathcal{L}_j)}{1 + s_j}$ est une somme directe.
- c) $\dim((\sum_{j \in J_2} \frac{H^0(X, \mathcal{L}_j)}{L_j}) / k) \geq m$.

Voici les démonstrations de ces faits. Pour a). Remarquons d'abord que l'anneau $\prod_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est le complété de $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ qui est un anneau \mathbb{N} -gradué. En utilisant le développement dans \mathcal{K} :

$$\frac{1}{1 + s_j} = 1 - s_j + s_j^2 - \dots,$$

on voit que tout élément dans $\frac{H^0(X, \mathcal{L}_j)}{1 + s_j}$ est la somme (infinie) des éléments de degré strictement positif. Par contre, chaque $\frac{H^0(X, \mathcal{L}_j)}{L_j}$ est composé d'éléments de degré 0. Pour b). Pour tout $j \in J_1$, soit $v_j \in H^0(X, \mathcal{L}_j)$. On a

$$\sum_{j \in J_1} \frac{v_j}{1 + s_j} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \sum_{j \in J_1} v_j s_j^n.$$

Donc $\sum_{j \in J_1} \frac{v_j}{1 + s_j} = 0$ si et seulement si pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{j \in J_1} v_j s_j^n = 0.$$

On conclut en remarquant que la matrice

$$(s_j^n)_{j \in J_1, 0 \leq n < |J_1|}$$

est inversible, les $(s_j)_{j \in J_1}$ étant deux-à-deux différentes. Pour c). C'est la partie la plus essentielle. Soit $n \in \{1, \dots, m\}$. Alors, pour tout $j \in J_2$,

tout élément de $\frac{H^0(X, \mathcal{L}_{j, n-1})}{L_j}$ est *régulier* sur x_1, \dots, x_{n-1} ; D'autre part, d'après la définition de $\mathcal{X}_{\pi, m}$, on peut prendre un $j(n) \in J_2$ tel que $H^0(X, \mathcal{L}_{j(n), n-1}) \neq H^0(X, \mathcal{L}_{j(n), n})$, alors, un élément de $\frac{H^0(X, \mathcal{L}_{j(n), n-1})}{L_{j(n)}}$ est régulier sur x_n si et seulement s'il est dans $\frac{H^0(X, \mathcal{L}_{j(n), n})}{L_{j(n)}}$. Donc pour $n = 1, \dots, m$, et pour tout f_n dans l'ensemble non-vide

$$\frac{H^0(X, \mathcal{L}_{j(n), n-1})}{L_{j(n)}} \setminus \frac{H^0(X, \mathcal{L}_{j(n), n})}{L_{j(n)}},$$

on aura f_1, \dots, f_m et 1 sont k -linéairement indépendants. \square

4. CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ ÉQUIVARIANTE

4.1. Complexe de de Rham logarithmique. Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Soit \mathcal{P} une variété lisse sur F . Soit $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$ une hypersurface fermée et lisse. Soit $D \hookrightarrow \mathcal{P}$ un diviseur à croisements normaux stricts, tel que $D \cap \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}$ est un diviseur à croisements normaux stricts de \mathcal{X} . Notons $j : \mathcal{X}^\circ \rightarrow \mathcal{X}$ l'ouvert complémentaire au diviseur $D \cap \mathcal{X}$. Notons par $\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{X}, D)$ le groupe des automorphismes de \mathcal{P} préservant respectivement \mathcal{X} et D . On va exprimer la cohomologie de \mathcal{X}° , ou plutôt son image dans le K -groupe de Grothendieck des $F[\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{X}, D)]$ -modules, en termes des cohomologies des faisceaux des formes différentielles sur \mathcal{P} ayant des singularités « contrôlées » le long de X et de D . On note ce K -groupe $K(F[\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{X}, D)] - \text{mod})$. Par « forme différentielle sur \mathcal{P} à singularités *logarithmiques* le long de D », on entend une forme différentielle ω sur l'ouvert $\mathcal{P} - D$ vérifiant : ω et $d\omega$ ont tous les deux des pôles d'ordre au plus 1 le long de D . Prenons $\Omega_{\mathcal{P}}^\bullet(\log D)$ le complexe des faisceaux cohérents de telles formes différentielles sur \mathcal{P} à singularités *logarithmiques* le long de D . Similairement, on prend le complexe des faisceaux $\Omega_{\mathcal{X}}^\bullet(\log D \cap \mathcal{X})$ sur \mathcal{X} . Prenons $\mathcal{L} := \mathcal{O}(X)$ le fibré en droites sur \mathcal{P} . Notons, pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\Omega^{n, m} := \Omega_{\mathcal{P}}^m(\log D) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}.$$

On a des inclusions

$$\dots \subseteq \Omega^{n-1, m} \subseteq \Omega^{n, m} \subseteq \dots$$

Lemme 4.1.1. *On a canoniquement des suites exactes longues*

$$\dots \rightarrow \Omega^{n, m} / \Omega^{n-1, m} \rightarrow \Omega^{n+1, m+1} / \Omega^{n, m+1} \rightarrow \dots$$

Démonstration. Localement sur \mathcal{P} , l'idéal définissant \mathcal{X} est principal, donc est engendré par une fonction f . Les flèches dans les suites en

question sont données par

$$\cdot \wedge \frac{df}{f}.$$

Ces flèches ainsi définies sont indépendantes du choix de f . L'exactitude de ces suites est claire. \square

Ayant en même temps les suites exactes

$$\Omega^{-1,m-1}/\Omega^{-2,m-1} \rightarrow \Omega^{0,m}/\Omega^{-1,m} \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}}^m(\log D \cap \mathcal{X}) \rightarrow 0,$$

il s'ensuit des suites exactes longues

$$(6) \quad 0 \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}}^m(\log D \cap \mathcal{X}) \rightarrow \Omega^{1,m+1}/\Omega^{0,m+1} \rightarrow \Omega^{2,m+2}/\Omega^{1,m+2} \rightarrow \dots$$

On cite aussi le lemme suivant, dont la version analytique est le célèbre lemme d'Atiyah-Hodge.

Lemme 4.1.2. *L'inclusion*

$$\Omega_{\mathcal{X}}^{\bullet}(\log D \cap \mathcal{X}) \rightarrow j_* \Omega_{\mathcal{X}^{\circ}}^{\bullet}$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. L'assertion étant locale, on peut supposer \mathcal{X} affine. Ensuite, un dévissage standard nous ramène au cas où $F = \mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. Dans ce cas, ce lemme est conséquence des théorèmes 4.4 et 4.6 de [2]. \square

Proposition 4.1.3. *La cohomologie de de Rham algébrique $H_{\text{dR}}^{\bullet}(\mathcal{X}^{\circ})$ est égale à*

$$H_{\text{dR}}^{\bullet}(\mathcal{P} - D) - \sum_m (-1)^m H^{\bullet}(\mathcal{P}, \Omega^{m,m})$$

dans $K(F[\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{X}, D)] - \text{mod})$.

Démonstration. Calculons dans le K -groupe $K(F[\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{X}, D)] - \text{mod})$. La cohomologie de de Rham algébrique $H_{\text{dR}}^{\bullet}(\mathcal{X}^{\circ})$ est définie comme l'*hypercohomologie*

$$\mathbb{H}^{\bullet}(\mathcal{X}^{\circ}, \Omega_{\mathcal{X}^{\circ}}^{\bullet})$$

du complexe $\Omega_{\mathcal{X}^{\circ}}^{\bullet}$ sur \mathcal{X}° . Comme j est affine, le foncteur *image directe* j_* sur les faisceaux abéliens est exact lorsqu'on le restreint aux faisceaux quasi-cohérents. En particulier, on a un quasi-isomorphisme

$$j_* \Omega_{\mathcal{X}^{\circ}}^{\bullet} = Rj_* \Omega_{\mathcal{X}^{\circ}}^{\bullet}.$$

Ainsi, l'hypercohomologie ci-dessus est isomorphe à

$$\mathbb{H}^{\bullet}(\mathcal{X}, j_* \Omega_{\mathcal{X}^{\circ}}^{\bullet}).$$

Compte tenu du lemme 4.1.2, on a

$$H_{\text{dR}}^{\bullet}(\mathcal{X}^{\circ}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{\bullet}(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}^{\bullet}(\log D \cap \mathcal{X})).$$

D'autre part, par (6), on a pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$(7) \quad (-1)^j H^\bullet(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}^j(\log D \cap \mathcal{X})) = \sum_{n \geq 0, m = n + j + 1} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n, m}) \\ - \sum_{n > 0, m = n + j} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n, m}).$$

Sommons par rapport aux $j \geq 0$, on obtient

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ) = \sum_{m > n \geq 0} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n, m}) - \sum_{m \geq n > 0} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n, m}) \\ = \sum_m (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{0, m}) - \sum_m (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{m, m}) \\ = H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{P} - D) - \sum_m (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{m, m}).$$

□

4.2. Théorie d'Ehrhart équivariante. Reprenons les notations du paragraphe 4.1. Soit $\mathfrak{G} \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{X}, D)$ un sous-groupe fixe.

Lemme 4.2.1. *Les sommes*

$$\sum_{n, m \geq 0, n - m = i} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n, m})$$

pour $i \geq 0$ sont toutes égales.

Démonstration. Il suffit de prendre $j = -1, -2, \dots$ dans (7). □

Pour faire le lien avec la *théorie d'Ehrhart*, il nous faut l'hypothèse :

Hypothèse 4.2.2.

- i) *L'inclusion canonique $F \hookrightarrow H^0(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$ est un isomorphisme.*
- ii) *Le fibré vectoriel $\Omega_{\mathcal{P}}^1(\log D)$ sur \mathcal{P} est trivialisable.*
- iii) *En tant que $F[\mathfrak{G}]$ -module, $H^0(\mathcal{P}, \Omega_{\mathcal{P}}^1(\log D))$ est isomorphe à son dual. On le note par ρ .*

Proposition 4.2.3. *Sous l'hypothèse 4.2.2, il existe un (unique) polynôme $\varphi(s)$ à coefficients dans le K -groupe $K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})$, tel que la série de Hilbert-Poincaré*

$$\sum_{n \geq 0} H^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n}) s^n = \frac{\varphi(s)}{(1 - s) \det(1 - s\rho)}$$

Démonstration. Notons $d = \dim \mathcal{P}$. Par les hypothèses i) et ii), l'application canonique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \otimes \rho \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}^1(\log D)$$

est un isomorphisme. Ainsi, pour tout $m \geq 0$,

$$\Omega^{n,m} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \wedge^m \rho.$$

Donc

$$H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n,m}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes \wedge^m \rho.$$

On a $\wedge^m \rho \simeq \det(\rho) \otimes \wedge^{d-m}(\rho^\vee)$ pour $m = 0, 1, \dots, d$. Par l'hypothèse iii), $\rho^\vee \simeq \rho$, donc

$$\wedge^m \rho \simeq \det(\rho) \otimes \wedge^{d-m} \rho.$$

Il s'ensuit que

$$(8) \quad H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n,m}) \simeq \det(\rho) \otimes H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n,d-m}).$$

Comme

$$\det(1 - s\rho) = 1 - s\rho + s^2 \wedge^2 \rho - \dots,$$

le produit

$$\det(1 - s\rho) \sum_{n \geq 0} H^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n}) s^n$$

se développe donc comme

$$\sum_{n,m \geq 0} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \wedge^m(\rho) s^{n+m},$$

qui se note aussi comme

$$\sum_{n,m \geq 0} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n,m}) s^{n+m}.$$

Par (8), c'est égal à

$$\sum_{n \geq 0, 0 \leq m \leq d} (-1)^m \det(\rho) H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n,d-m}) s^{n+m},$$

ou bien, changeant l'indice m en $d - m$, à la somme de

$$(-1)^d \det(\rho) \sum_{m > n \geq 0} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n,m}) s^{n-m+d}$$

et de

$$(-1)^d s^d \det(\rho) \sum_{n \geq m} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n,m}) s^{n-m}.$$

On observe, grâce à (4.2.1), que

$$\sum_{n \geq m} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n,m}) s^{n-m} = \frac{1}{1-s} \sum_m (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{m,m}).$$

Ainsi le polynôme

$$(9) \quad \varphi(s) := (-1)^d(1-s)\det(\rho) \sum_{m>n\geq 0} (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{n,m}) s^{n-m+d} \\ + (-1)^d s^d \det(\rho) \sum_m (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{m,m})$$

est celui requis par l'énoncé de la proposition. \square

La fin de cette preuve nous donne :

Corollaire 4.2.4. *Le polynôme $\varphi(s)$ de la proposition précédente vérifie*

$$\varphi(1) = (-1)^{\dim \mathcal{P}} \det(\rho) \sum_m (-1)^m H^\bullet(\mathcal{P}, \Omega^{m,m}).$$

Ce corollaire nous permet, sous les mêmes hypothèses, de réécrire la proposition 4.1.3 :

Proposition 4.2.5. *Sous l'hypothèse 4.2.2, on a*

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ) = H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{P} - D) - (-1)^{\dim \mathcal{P}} \det(\rho) \varphi(1).$$

4.3. Caractéristique d'Euler-Poincaré équivariante des diviseurs sur un tore. Soit R un anneau de valuation discrète d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel k . Tout schéma dans cette partie est défini sur R . Pour nous, l'avantage principal de cette restriction sur R réside dans la facilité de reconnaître les modules plats sur R : ce sont juste les modules *sans torsion*. On utilisera à plusieurs reprises, mais souvent implicitement, le lemme suivant :

Lemme 4.3.1. *Soit R un anneau de valuation discrète d'idéal maximal \mathfrak{m} . Soit A un anneau factoriel contenant R comme sous-anneau. Supposons $A/\mathfrak{m}A$ intègre. Soit $a \in A$ non-nul, alors, a définit un diviseur sur $\text{Spec}(A)$ relatif à R , i.e. A/a est plat sur R , si et seulement si $a \notin \mathfrak{m}A$.*

Démonstration. Soit $\pi \in \mathfrak{m}$ un générateur. Comme $A/\mathfrak{m}A$ est intègre, π est *premier* dans A . Ainsi,

$$A/a \text{ est plat sur } R \Leftrightarrow A/a \xrightarrow{\pi} A/a \text{ est injective} \\ \Leftrightarrow (aA) \cap (\pi A) = a\pi A \\ \Leftrightarrow a \notin \pi A = \mathfrak{m}A.$$

\square

Le cas dégénéré où R est un corps n'est pas exclu. Soit Λ un réseau, i.e. un groupe abélien libre et de rang fini. Pour tout anneau A , on désigne par T_A le tore $\text{Spec}(A[\Lambda])$, et par ρ_A le A -module $\Lambda \otimes A$. Notons $T = T_R$ sauf mention contraire explicite.

4.3.2. *Diviseurs sur un tore.* Une fonction sur T s'écrit comme une somme finie

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda t^\lambda$$

où les coefficients $c_\lambda \in R$. Le *support* de f est défini comme

$$\text{supp}(f) := \{\lambda \mid c_\lambda \neq 0\}.$$

Pour tout sous-ensemble $S \subseteq \Lambda \otimes \mathbb{R}$, on note

$$f|_S := \sum_{\lambda \in S \cap \Lambda} c_\lambda t^\lambda.$$

On notera $\Delta(\text{supp}(f))$ aussi par $\Delta(f)$, appelé *polytope de Newton* associé à f , où $\Delta(S)$ désigne l'enveloppe convexe de S . On note f_k l'image de f dans $k[\Lambda]$. On a

$$\Delta(f_k) \subseteq \Delta(f).$$

L'anneau $R[\Lambda]$ étant *principal*, tout diviseur sur T est *principal*, i.e. est globalement défini par une fonction sur T . Cette fonction est alors déterminée à multiplication par des éléments du groupe $R[\Lambda]^\times = R^\times t^\Lambda$ des fonctions inversibles près.

4.3.3. *Variétés toriques.* On suit les notations du livre [11] en ce qui concerne les variétés toriques.

Si R est un corps, rappelons qu'une variété torique sous le tore T est une variété \mathcal{P} , supposée normale, contenant T comme un ouvert dense telle que l'action par multiplication de T sur T s'étend, de manière unique bien sûr, à une action de T sur \mathcal{P} . Les variétés toriques sous le tore T sont *en bijection* avec les *éventails* dans $\Lambda^\vee \otimes \mathbb{R}$: la variété torique \mathcal{P} associée à un éventail \mathfrak{F} dans $\Lambda^\vee \otimes \mathbb{R}$ est construite dans la catégorie des schémas comme le *recollement*

$$\mathcal{P} := \text{colim}_{\sigma \in \mathfrak{F}} U_\sigma$$

des variétés toriques affines

$$U_\sigma := \text{Spec}(R[\sigma^\vee \cap \Lambda])$$

où

$$\sigma^\vee := \{\lambda \in \Lambda \otimes \mathbb{R} \mid \langle \lambda, \sigma \rangle \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

Les U_σ deviennent alors des ouverts affines T -stables de \mathcal{P} . Cette construction reste valable pour R général. Dans U_σ , il y a une unique T -orbite fermée. Elle est donnée par

$$T_\sigma := \text{Spec}(R[\sigma^\perp \cap \Lambda]) \hookrightarrow U_\sigma$$

où σ^\perp , noté habituellement $\text{cospans}(\sigma^\vee)$, est défini comme

$$\{\lambda \in \Lambda \otimes \mathbb{R} \mid \langle \lambda, \sigma \rangle = \{0\}\} \subseteq \sigma^\vee.$$

Remarquons que les orbites T_σ sont naturellement des *tores*, et T agit sur T_σ à travers l'homomorphisme canonique

$$T \twoheadrightarrow T_\sigma.$$

Ces homomorphismes admettent des sections homomorphes, et sont, en particulier, lisses. La collection $(T_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{F}}$ est la stratification de \mathcal{P} par ses T -orbites. On a

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \in \mathfrak{F}, \tau \subseteq \sigma} T_\tau$$

$$\overline{T}_\sigma = \bigcup_{\tau \in \mathfrak{F}, \tau \supseteq \sigma} T_\tau.$$

Pour tout $\sigma, \tau \in \mathfrak{F}$, \overline{T}_σ est couvert par les ouverts U_τ où τ parcourt les cônes dans \mathfrak{F} contenant σ . On a $\overline{T}_\sigma \cap U_\sigma = T_\sigma$, et

$$\overline{T}_\sigma \cap U_\tau = \begin{cases} \text{Spec}(R[\tau^\vee \cap \sigma^\perp \cap \Lambda]), & \text{si } \sigma \subseteq \tau, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La variété torique \mathcal{P} est lisse (sur R) si et seulement si l'éventail \mathfrak{F} est *non-singulier*, i.e. tout cône dans \mathfrak{F} est engendré par une partie d'une \mathbb{Z} -base de Λ^\vee ; \mathcal{P} est propre (sur R) si et seulement si \mathfrak{F} est *complet*, i.e. son *support* $|\mathfrak{F}| := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{F}} \sigma$ est égal à $\Lambda^\vee \otimes \mathbb{R}$. Notons l'*intérieur* d'un cône σ par $\overset{\circ}{\sigma}$. C'est le complément de l'union de toutes les faces *propres* de σ .

4.3.4. Éventail associé à un polytope. Tout polytope $\Delta \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$ crée une relation d'équivalence sur $\Lambda^\vee \otimes \mathbb{R}$. En fait, tout $l \in \Lambda^\vee \otimes \mathbb{R}$ détermine une face de Δ , le lieu où l atteint son minimum. Deux éléments de $\Lambda^\vee \otimes \mathbb{R}$ sont équivalents s'ils déterminent la même face de Δ . Les adhérences de ces classes d'équivalence forment alors un éventail *complet*, noté $\mathfrak{F}(\Delta)$,⁸ de sorte que les classes d'équivalence soient exactement les $\overset{\circ}{\sigma}$ où σ parcourt $\mathfrak{F}(\Delta)$. On note par $\Gamma(\sigma)$ la face de Δ correspondant à la classe $\overset{\circ}{\sigma}$.

Si le polytope est rationel, l'éventail le sera aussi.

Lemme 4.3.5. *Soit Δ un polytope dans $\Lambda \otimes \mathbb{R}$. Soit \mathfrak{F} un éventail raffinant $\mathfrak{F}(\Delta)$. Alors toute face de Δ est de la forme $\Gamma(\sigma)$ pour au moins un $\sigma \in \mathfrak{F}$.*

8. Si Δ n'était pas de dimension *maximale*, $\mathfrak{F}(\Delta)$ dans $\Lambda^\vee \otimes \mathbb{R}$ serait l'« image inverse » d'un éventail dans $(\Lambda^\vee \otimes \mathbb{R})/((\Delta - \Delta)^\perp)$.

4.3.6. *Compactification d'un diviseur sur un tore.* Soit \mathcal{P} une variété torique sur R sous le tore T . Supposons \mathcal{P} lisse sur R , construite à partir d'un éventail non-singulier \mathfrak{F} . Notons $\mathfrak{F}(1)$ le sous-ensemble des cônes de dimension 1 dans \mathfrak{F} . On sait que :

Lemme 4.3.7. *Le sous-schéma fermé $D := \mathcal{P} - T \hookrightarrow \mathcal{P}$ est un diviseur à croisements normaux stricts relatifs à R , dont les composantes irréductibles sont les \overline{T}_τ , où τ parcourt $\mathfrak{F}(1)$. Pour tout $I \subseteq \mathfrak{F}(1)$, l'intersection $\bigcap_{\tau \in I} \overline{T}_\tau$ est non-vide si et seulement si les éléments de I engendrent un cône $\sigma \in \mathfrak{F}$. Dans ce cas, cette intersection est égale à \overline{T}_σ .*

Soit $\mathcal{X}^\circ \hookrightarrow T$ un diviseur. Soit $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$ l'adhérence schématique de \mathcal{X}° . On a bien $\mathcal{X}^\circ = \mathcal{X} - \mathcal{X} \cap D$. Fixons une fonction f définissant le diviseur $\mathcal{X}^\circ \hookrightarrow T$. Le choix de f est seulement pour faciliter l'articulation des énoncés suivants dont le contenu ne dépend pas vraiment de ce choix. L'éventail $\mathfrak{F}(\Delta(f))$ associé au polytope $\Delta(f)$ ne dépendant pas du choix de f , on le note aussi par $\mathfrak{F}(\mathcal{X}^\circ)$.

La suite des lemmes 4.3.8 — 4.3.12 est une liste des faits assez simples et similaires mais quelque peu subtils. Nous ne les listons ainsi que pour expliciter la logique.

Lemme 4.3.8. *Soit $\sigma \in \mathfrak{F}$. Alors : Le sous-schéma fermé $\mathcal{X} \cap U_\sigma \hookrightarrow U_\sigma$ est défini par $t^{-\lambda_{f,\sigma}} f$ pour les $\lambda_{f,\sigma} \in \Lambda$ tels que $\Delta(f) - \lambda_{f,\sigma}$ est contenu dans σ^\vee et touche σ^\perp . De tels $\lambda_{f,\sigma}$ forment une classe modulo $\sigma^\perp \cap \Lambda$. Ainsi,*

$$\begin{aligned} A_{f,\sigma} &:= \sigma^\perp + \lambda_{f,\sigma}, \\ B_{f,\sigma} &:= \sigma^\vee + \lambda_{f,\sigma} \end{aligned}$$

ne dépendent pas du choix de $\lambda_{f,\sigma}$. De plus, $\Gamma(\sigma) = A_{f,\sigma} \cap \Delta(f)$. Pour tout $\tau \in \mathfrak{F}$ contenu dans σ , le sous-schémas fermé

$$\mathcal{X} \cap \overline{T}_\tau \cap U_\sigma \hookrightarrow \overline{T}_\tau \cap U_\sigma$$

est défini par

$$(t^{-\lambda_{f,\sigma}} f)|_{\tau^\perp}.$$

Le sous-schéma fermé $\mathcal{X} \cap T_\sigma \hookrightarrow T_\sigma$ est défini par $t^{-\lambda_{f,\sigma}} (f|_{\Gamma(\sigma)})$.

On en déduit :

Lemme 4.3.9. *Soit $\sigma \in \mathfrak{F}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\mathcal{X} \cap T_\sigma$ est plat sur R .
- L'anneau $R[\sigma^\perp \cap \Lambda]/f|_{\Gamma(\sigma)}$ est plat sur R .
- $f|_{\Gamma(\sigma)} \notin \mathfrak{m}[\Lambda]$.

- Le sous-schéma fermé de \mathbb{T} défini par $f|_{\Gamma(\sigma)}$ est plat sur R , i.e. l'anneau $R[\Lambda]/f|_{\Gamma(\sigma)}$ est plat sur R .
- Pour tout $\tau \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{X} \cap \overline{\mathbb{T}}_\tau \cap U_\sigma$ est plat sur R .

Lemme 4.3.10. *Soit $\sigma \in \mathfrak{F}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\mathcal{X} \cap \mathbb{T}_\sigma$ est lisse sur R .
- Le sous-schéma fermé de \mathbb{T} défini par $f|_{\Gamma(\sigma)}$ est lisse sur R .

Lemme 4.3.11. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- Pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{X} \cap \mathbb{T}_\sigma$ est plat sur R .
- Pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{X} \cap \overline{\mathbb{T}}_\sigma$ est plat sur R .

De plus, si \mathfrak{F} raffine $\mathfrak{F}(\mathcal{X}^\circ)$, ces conditions sont équivalentes à :

$$\Delta(f_k) = \Delta(f).$$

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{Pour tout } \sigma \in \mathfrak{F}, \mathcal{X} \cap \overline{\mathbb{T}}_\sigma \text{ est plat sur } R \\ \Leftrightarrow & \text{Pour tout } \sigma, \tau \in \mathfrak{F}, \mathcal{X} \cap \overline{\mathbb{T}}_\sigma \cap U_\tau \text{ est plat sur } R \\ \Leftrightarrow & \text{Pour tout } \tau \in \mathfrak{F}, \mathcal{X} \cap \mathbb{T}_\tau \text{ est plat sur } R, \end{aligned}$$

dont la deuxième vient du lemme 4.3.8. La dernière assertion du lemme est conséquence des lemmes 4.3.5 et 4.3.9. \square

Lemme 4.3.12. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) \mathcal{X} est lisse sur R et $D \cap \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}$ est un diviseur à croisements normaux stricts relatif à R .
- ii) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{X} \cap \overline{\mathbb{T}}_\sigma$ est lisse sur R .
- iii) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{X} \cap \mathbb{T}_\sigma$ est lisse sur R .
- iv) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, le sous-schéma fermé de \mathbb{T} défini par $f|_{\Gamma(\sigma)}$ est lisse sur R .

Démonstration. L'équivalence i) \Leftrightarrow ii) se déduit du lemme 4.3.7. L'implication ii) \implies iii) est automatique puisque \mathbb{T}_σ est un ouvert dans $\overline{\mathbb{T}}_\sigma$. Montrons iii) \implies ii). Supposons iii). Pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, le schéma $\overline{\mathbb{T}}_\sigma$ est lisse sur R et est stratifié par des strates $(\mathbb{T}_\tau)_{\tau \in \mathfrak{F}, \tau \supseteq \sigma}$ lisses sur R . De plus, le diviseur $\mathcal{X} \cap \overline{\mathbb{T}}_\sigma \hookrightarrow \overline{\mathbb{T}}_\sigma$ est plat sur R par lemme 4.3.11, et son intersection avec toute strate \mathbb{T}_τ reste lisse sur R par iii). On conclut par lemme 4.3.13 suivant. Pour l'équivalence iii) \Leftrightarrow iv), on se réfère au lemme 4.3.10. \square

Lemme 4.3.13. *Soit $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ un morphisme lisse entre des schémas. Soit $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ un diviseur plat sur \mathcal{Z} . Supposons que \mathcal{Y} est union des sous-schémas localement fermés (\mathcal{Y}_i) lisses sur \mathcal{Z} , tels que pour tout i , $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_i$ est un diviseur sur \mathcal{Y}_i et est lisse sur \mathcal{Z} . Alors \mathcal{X} est lui aussi lisse sur \mathcal{Z} .*

Démonstration. Comme \mathcal{X} est plat sur \mathcal{Z} , il est lisse sur \mathcal{Z} si toutes les fibres géométriques sont lisses. Ainsi on peut supposer que $\mathcal{Z} = \text{Spec}(\kappa)$ où κ est un corps algébriquement clos. Le problème étant Zariski-local par rapport à \mathcal{Y} , on peut supposer que le diviseur $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ est défini par une fonction f sur \mathcal{Y} . Alors pour tout i , $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_i$ est le sous-schéma fermé de \mathcal{Y}_i défini par f . Il faut montrer que pour tout κ -point $x \in \mathcal{X}$, df n'est pas identiquement nul sur l'espace tangent $T_x \mathcal{Y}$. Comme les (\mathcal{Y}_i) couvrent \mathcal{Y} , x appartient à un certain \mathcal{Y}_{i_0} , et donc à $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_{i_0}$, lequel est lisse par notre hypothèse. On en déduit que df n'est pas identiquement nul sur l'espace tangent $T_x \mathcal{Y}_{i_0}$ qui est un sous-espace de $T_x \mathcal{Y}$. \square

Définition 4.3.14. *Le diviseur $\mathcal{X}^\circ \hookrightarrow \mathbb{T}$ est dit \mathfrak{F} -non-dégénéré s'il vérifie les conditions équivalentes du lemme 4.3.12.*

Définition 4.3.15. *Le diviseur $\mathcal{X}^\circ \hookrightarrow \mathbb{T}$ est dit non-dégénéré si pour toute face Γ de $\Delta(f)$, le sous-schéma fermé de \mathbb{T} défini par $f|_\Gamma$ est lisse sur R . Une fonction $f \in R[\Lambda]$ est dite non-dégénérée si le sous-schéma fermé de \mathbb{T} défini par f est un diviseur non-dégénéré.*

Lemme 4.3.16. *Soit $\mathcal{X}^\circ \hookrightarrow \mathbb{T}$ un diviseur. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *Il est non-dégénéré.*
- *Il est \mathfrak{F} -non-dégénéré pour tout éventail \mathfrak{F} non-singulier dans $\Lambda^\vee \otimes \mathbb{R}$.*
- *Il est \mathfrak{F} -non-dégénéré pour un éventail non-singulier \mathfrak{F} raffinant $\mathfrak{F}(\mathcal{X}^\circ)$.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 4.3.5. \square

La proposition suivante est cruciale dans le paragraphe 4.3.22.

Proposition 4.3.17. *Si $f \in R[\Lambda]$ est non-dégénéré, alors $\Delta(f_k) = \Delta(f)$. Si $f \in R[\Lambda]$ satisfait $\Delta(f_k) = \Delta(f)$, alors f est non-dégénéré si et seulement si f_k est non-dégénéré.*

Démonstration. La première assertion est claire. Pour la deuxième, la direction « seulement si » vient de la préservation de lissité pendant le changement de base $R \rightarrow k$. La direction « si » est plus subtile. Pour tout éventail \mathfrak{F} non-singulier dans $\Lambda \otimes \mathbb{R}$. Construisons les schémas $\mathcal{P}, \mathcal{X}, D, (T_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{F}}$ sur R associés au couple (\mathfrak{F}, f) comme ci-dessus.

Parallèlement, on peut construire les schémas $\mathcal{P}_k, \mathcal{X}_k, D_k, ((T_\sigma)_k)_{\sigma \in \mathfrak{F}}$ sur k associés à (\mathfrak{F}, f_k) par la même recette. Ces schémas ne sont pas nécessairement les changements de base des schémas correspondants sur R précédemment construits. Mais pour les f satisfaisant $\Delta(f_k) = \Delta(f)$, ils le sont.

Supposons que f satisfait $\Delta(f_k) = \Delta(f)$. Prenons un éventail \mathfrak{F} non-singulier et raffinant $\mathfrak{F}(\Delta(f))$. Le lecteur est invité à consulter le théorème B.0.1 dans l'annexe où une construction explicite d'un tel \mathfrak{F} canonique est présentée. Comme \mathfrak{F} est complet, \mathcal{P} est propre sur R . Ainsi tous les $\mathcal{X} \cap \overline{T_\sigma}$ le sont aussi. Ils sont aussi plats sur R par lemme 4.3.11.

Grâce au lemme suivant, on a des équivalences :

- f_k est non-dégénéré
- $\Leftrightarrow f_k$ est \mathfrak{F} – non-dégénéré
- $\Leftrightarrow \mathcal{X}_k \cap \overline{(T_\sigma)_k}$ est lisse sur k , pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$
- \Leftrightarrow la fibre spéciale du morphisme $\mathcal{X} \cap \overline{T_\sigma} \rightarrow \text{Spec } R$ est lisse pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$
- $\Leftrightarrow \mathcal{X} \cap \overline{T_\sigma} \rightarrow \text{Spec } R$ est lisse pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$.
- $\Leftrightarrow f$ est \mathfrak{F} – non-dégénéré
- $\Leftrightarrow f$ est non-dégénéré.

□

Lemme 4.3.18. *Soit $\pi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ un morphisme propre et plat entre des schémas noethériens. Alors il est lisse si et seulement si toutes ses fibres sur les points fermés de \mathcal{Z} sont lisses.*

Démonstration. Par [14, Corollaire 6.8.7], le sous-ensemble S de \mathcal{Y} où π n'est pas lisse est un fermé de \mathcal{Y} . Comme π est propre, $\pi(S)$ est un fermé de \mathcal{Z} , et donc, s'il est non-vide, contient un point fermé de \mathcal{Z} , ce qui est exclu par notre hypothèse. Ainsi $\pi(S)$ est vide et π est partout lisse. □

Résumons :

Proposition 4.3.19. *Soit $\mathcal{X}^\circ \hookrightarrow T$ un diviseur non-dégénéré. Soient \mathfrak{F} un éventail non-singulier raffinant $\mathfrak{F}(\mathcal{X}^\circ)$, et \mathcal{P} la variété torique lisse et propre sur R associée à \mathfrak{F} . Soit \mathcal{X} l'adhérence schématique de \mathcal{X}° dans \mathcal{P} . Notons $D := \mathcal{P} - T$. Alors,*

- L'immersion fermée $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$ est un diviseur lisse sur R , et $D \hookrightarrow \mathcal{P}$ et $D \cap \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}$ sont des diviseurs à croisements normaux stricts relatif à R .

- Notons $\mathcal{L} := \mathcal{O}(\mathcal{X})$ le fibré en droites sur \mathcal{P} . Alors, pour tout $n \geq 0$, le faisceau $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sur \mathcal{P} est acyclique par rapport au foncteur « section globale ». Le R -module $f^{-n}R[(n\Delta(f) \cap \Lambda)]$ ne dépend pas du choix de $f \in R[\Lambda]$ définissant \mathcal{X}° . Il est canoniquement isomorphe à

$$H^0(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n}).$$

- Le groupe $\text{Aut}(\Lambda) \times \text{T}(R)$ agit naturellement sur T . Soit \mathfrak{G} un sous-groupe dont l'action sur $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ préserve \mathfrak{F} , alors \mathfrak{G} est naturellement un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{X}, D)$. Supposons en plus que $\Lambda \otimes R$ est auto-dual en tant que $R[\mathfrak{G}]$ -module. Alors l'hypothèse 4.2.2 est vérifiée pour le quadruple $(\mathcal{P}, \mathcal{X}, D, \mathfrak{G})$.

Démonstration. Par le lemme 4.3.16, le diviseur $\mathcal{X}^\circ \hookrightarrow \text{T}$ est \mathfrak{F} -non-dégénéré, ce qui, par définition, montre la première assertion.

Soit $f \in R[\Lambda]$ définissant \mathcal{X}° . Par le lemme 4.3.8, on a, pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$ et tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} H^0(U_\sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}) &= (t^{-\lambda_{f,\sigma}} f)^{-n} R[\sigma^\vee \cap \Lambda] \\ &= f^{-n} R[(\sigma^\vee + n\lambda_{f,\sigma}) \cap \Lambda]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$H^0(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n}) = f^{-n} R\left[\bigcap_{\sigma \in \mathfrak{F}} (\sigma^\vee + n\lambda_{f,\sigma}) \cap \Lambda\right].$$

Pour $n = 0$,

$$\bigcap_{\sigma \in \mathfrak{F}} \sigma^\vee = \{0\};$$

Pour $n > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sigma^\vee + n\lambda_{f,\sigma} &= n \cdot B_{f,\sigma}, \\ \bigcap_{\sigma \in \mathfrak{F}} B_{f,\sigma} &= \Delta(f). \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 0$,

$$H^0(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n}) = f^{-n} R[(n\Delta(f)) \cap \Lambda].$$

Il s'ensuit en particulier que tous les $(\mathcal{L}^{\otimes n})_{n \geq 0}$ sont engendrés par leurs sections globales. Pour montrer l'annulation de toutes leurs cohomologies supérieures, on peut, grâce à *changement de base propre*, supposer que R est un corps. Alors le « corollaire » dans [11, Section 5] permet de conclure.

Enfin, on a l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \otimes \Lambda \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{P}}^1(\log D)$$

qui envoie $\lambda \in \Lambda$ sur $t^{-\lambda}d(t^\lambda)$. Donc

$$H^0(\mathcal{P}, \Omega_{\mathcal{P}}^1(\log D)) = \Lambda \otimes R,$$

lequel est auto-dual en tant que $R[\mathfrak{G}]$ -module par la condition imposée sur \mathfrak{G} . \square

4.3.20. *Caractéristique 0.* Considérons le cas où R est un corps F algébriquement clos de caractéristique 0.

Théorème 4.3.21. *Soit $\mathcal{X}^\circ \hookrightarrow T$ un diviseur non-dégénéré défini par $f \in F[T]$. Soit $\mathfrak{G} \subset \text{Aut}(\Lambda) \rtimes T(F)$ un sous-groupe fini fixant f , tel que $\rho := \Lambda \otimes F$ est auto-dual en tant que $F[\mathfrak{G}]$ -module. Notons $\Delta := \Delta(f)$. Alors il existe un (unique) polynôme*

$$\varphi(s) \in K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})[s],$$

tel que

$$\sum_{n \geq 0} F[\Lambda \cap (n\Delta)]s^n = \frac{\varphi(s)}{(1-s)\det(1-s\rho)}$$

dans $K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})[[s]]$, et tel que la cohomologie de de Rham algébrique satisfait

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ) = \det(1-\rho) - (-1)^{\dim T} \det(\rho)\varphi(1)$$

dans $K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})$.

Pour tout polytope $\Delta \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$, on appelle $\sum_{n \geq 0} F[\Lambda \cap (n\Delta)]s^n$ la série d'Ehrhart associée à Δ .

Démonstration. Comme \mathfrak{G} fixe f , son action sur $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ préserve $\mathfrak{F}(\mathcal{X}^\circ)$. Par théorème B.0.1, on peut prendre un éventail \mathfrak{F} non-singulier, préservé par \mathfrak{G} , et qui raffine $\mathfrak{F}(\mathcal{X}^\circ)$. Prenons \mathcal{P} la variété torique lisse et propre associée à \mathfrak{F} , notons \mathcal{X} l'adhérence schématique de \mathcal{X}° dans \mathcal{P} , et notons $D := \mathcal{P} - T$. Par la proposition 4.3.19, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} H^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n}) &= H^0(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \\ &= f^{-n} F[(n\Delta) \cap \Lambda] \\ &\xrightarrow{\sim} F[(n\Delta) \cap \Lambda] \end{aligned}$$

dans $K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})$, où le dernier isomorphisme utilise le fait que \mathfrak{G} fixe f . On en déduit que

$$\sum_{n \geq 0} H^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\otimes n})s^n = \sum_{n \geq 0} F[(n\Delta) \cap \Lambda]s^n$$

dans $K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})[[s]]$. Ensuite, comme l'hypothèse 4.2.2 est vérifiée, on peut appliquer la proposition 4.2.3 pour trouver le polynôme

$\varphi(s)$ demandé. L'assertion concernant la cohomologie de \mathcal{X}° vient de la proposition 4.2.5. En fait, comme $\mathcal{P} - D = T$,

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{P} - D) = H_{\text{dR}}^\bullet(T) = \det(1 - \rho).$$

□

4.3.22. *Caractéristique $p > 0$.* Supposons le corps de base k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit T un tore sur k dont le réseau des poids est Λ . On utilise la cohomologie étale ℓ -adique où ℓ est un nombre premier inversible dans k . Désignons par \mathbb{C} le corps des nombres complexes, et par $\bar{\mathbb{Q}}$ son sous-corps des nombres algébriques sur \mathbb{Q} . Dans ce cas, le théorème 4.3.21 reste vrai presque verbatim. Mais il y a quelques modifications à apporter, dûes au fait que l'on utilisera le formalisme de *cycles proches* pour le démontrer.

Lemme 4.3.23. *Soit \mathfrak{G} un groupe fini. Soit $F_1 \hookrightarrow F_2$ une extension de corps. Supposons F_1, F_2 algébriquement clos de caractéristique 0. Alors le morphisme naturel*

$$K(F_1[\mathfrak{G}] - \text{mod}) \otimes_{F_1} F_2 \rightarrow K(F_2[\mathfrak{G}] - \text{mod})$$

est un isomorphisme.

Lemme 4.3.24. *Pour tout sous-groupe fini $\mathfrak{G} \subset \text{Aut}(\Lambda)$ et tout corps F algébriquement clos de caractéristique 0, $\rho_F := \Lambda \otimes F$ est auto-dual en tant que $F[\mathfrak{G}]$ -module.*

Démonstration. Le corps F contient une copie de $\bar{\mathbb{Q}}$, il suffit de démontrer le lemme en supposant $F = \bar{\mathbb{Q}}$. Ensuite, au vu du lemme 4.3.23, on peut effectuer l'extension de scalaires $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et supposer $F = \mathbb{C}$. On sait qu'une représentation complexe d'un groupe fini \mathfrak{G} est auto-duale si et seulement si son *caractère* prend valeurs dans le sous-corps \mathbb{R} des nombres réels. En particulier, toute complexification des représentations *réelles* de \mathfrak{G} est auto-dual. C'est bien le cas dans notre situation, notre représentation étant même définie sur \mathbb{Z} . □

Théorème 4.3.25. *Soit \mathcal{X}° un diviseur non-dégénéré sur T , défini par une fonction f sur T . Soit $\mathfrak{G} \subset \text{Aut}(\Lambda)$ un sous-groupe fini fixant f . Notons $\rho := \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Q}}_\ell$, et $\Delta := \Delta(f)$. Alors il existe un (unique) polynôme*

$$\varphi(s) \in K(\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathfrak{G}] - \text{mod})[s],$$

tel que

$$\sum_{n \geq 0} \bar{\mathbb{Q}}_\ell[(n\Delta) \cap \Lambda] s^n = \frac{\varphi(s)}{(1-s) \det(1-s\rho)}$$

dans $K(\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathfrak{G}] - \text{mod})[[s]]$. De plus, on a, dans $K(\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathfrak{G}] - \text{mod})$,

$$H_{\text{c,ét}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) = H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) = \det(1 - \rho) - (-1)^{\dim T} \det(\rho) \varphi(1).$$

Démonstration. En se restreignant à la clôture algébrique du sous-corps de k engendré par les coefficients de f , on peut supposer que k est *dénombrable*. Ensuite, prenons un anneau local R , hensélien et de valuation discrète, de corps résiduel k , et dont le corps de fractions est de caractéristique 0. On pourrait prendre par exemple $R = W(k)$ l'anneau de Witt associé à k . Soit F une clôture algébrique de son corps de fractions. Alors $\text{card}(F) = \text{card}(R) \leq \text{card}(\mathbb{C})$. Ainsi on peut prendre un prolongement de corps $\iota_F : F \hookrightarrow \mathbb{C}$. Prenons $f_R \in R[\Lambda]$ un relèvement \mathfrak{G} -invariant de f tel que

$$\Delta(f_R) = \Delta.$$

Soit $\mathcal{X}_R^\circ \hookrightarrow T_R$ le diviseur associé, qui est non-dégénéré par la proposition 4.3.17. Par changement de base, on obtient un diviseur $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}^\circ \hookrightarrow T_{\mathbb{C}}$, aussi non-dégénéré, défini par $f_{\mathbb{C}} := \iota_F(f_R) \in \mathbb{C}[\Lambda]$. Par le lemme 4.3.24, $\rho_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes \mathbb{C}$ est auto-duale comme représentation de \mathfrak{G} . En appliquant le théorème 4.3.21 au triplet

$$(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}^\circ \hookrightarrow T_{\mathbb{C}}, f_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}[\Lambda], \mathfrak{G} \subset \text{Aut}(\Lambda)),$$

on trouve un polynôme

$$\varphi(s) \in K(\mathbb{C}[\mathfrak{G}] - \text{mod})[s]$$

tel que

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{C}[\Lambda \cap (n\Delta)] s^n = \frac{\varphi(s)}{(1-s) \det(1 - s\rho_{\mathbb{C}})}$$

dans $K(\mathbb{C}[\mathfrak{G}] - \text{mod})[[s]]$, et tel que

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}^\circ) = \det(1 - \rho_{\mathbb{C}}) - (-1)^{\dim T} \det(\rho_{\mathbb{C}}) \varphi(1)$$

dans $K(\mathbb{C}[\mathfrak{G}] - \text{mod})$. Les représentations $\mathbb{C}[\Lambda \cap (n\Delta)]$ et $\rho_{\mathbb{C}}$ de \mathfrak{G} étant naturellement définies sur \mathbb{Z} , les coefficients de $\varphi(s)$ sont donc « définis sur \mathbb{Q} », i.e. appartiennent à $K(\mathbb{Q}[\mathfrak{G}] - \text{mod})$. Comme $\text{card}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \text{card}(\mathbb{Q}_\ell) = \text{card}(\mathbb{C})$, on peut choisir une extension de corps $\iota_\ell : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Alors l'inclusion $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ se factorise canoniquement par un prolongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ suivi de ι_ℓ . Alors, le polynôme $\varphi(s)$ satisfait

$$\sum_{n \geq 0} \overline{\mathbb{Q}_\ell}[(n\Delta) \cap \Lambda] s^n = \frac{\varphi(s)}{(1-s) \det(1 - s\rho)},$$

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}^\circ) = \det(1 - \rho) - (-1)^{\dim T} \det(\rho) \varphi(1),$$

puisqu'il satisfait ces identités après extension de scalaires donnée par ι_ℓ . Montrons ensuite l'égalité

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}^\circ) = H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

dans $K(\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\mathfrak{G}] - \text{mod})$. Il suffit de la montrer après l'extension de scalaires ι_ℓ . On explicitera en fait un quasi-isomorphisme $\text{Aut}_R(\mathcal{X}_R^\circ)$ -équivariant :

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{X}_\mathbb{C}^\circ) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_\ell, \iota_\ell}} \mathbb{C}.$$

L'existence d'un tel morphisme équivariant vient de la proposition 4.3.26 suivante, car \mathcal{X}_R° est lisse sur R . Ce morphisme est un quasi-isomorphisme par la même proposition, car on a une « bonne » compactification de \mathcal{X}_R° décrite dans le paragraphe suivant. Par théorème B.0.1, on peut prendre un éventail \mathfrak{F} non-singulier, préservé par \mathfrak{G} , et qui raffine $\mathfrak{F}(\mathcal{X}^\circ)$. Soit \mathcal{P}_R la variété torique sur R associée à \mathfrak{F} . Prenons \mathcal{X}_R l'adhérence schématique de \mathcal{X}_R° dans \mathcal{P} . Par la proposition 4.3.19, \mathcal{X}_R° est propre et lisse sur R , et le complément de l'ouvert \mathcal{X}_R° dans \mathcal{X}_R est un diviseur à croisements normaux stricts relatif à R . Traitons finalement $H_{c, \text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$. Les $\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\mathfrak{G}]$ -modules $\overline{\mathbb{Q}_\ell}[(n\Delta(f)) \cap \Lambda]$ et ρ étant définis sur \mathbb{Z} , sont tous auto-duaux. Ainsi $\varphi(1)$, et donc $H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$, sont aussi auto-duaux. Comme \mathcal{X}° est lisse, $H_{c, \text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$, étant dual de $H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ (à décalage pair près) par la dualité de Verdier, est égal à $H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}^\circ, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ dans $K(\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\mathfrak{G}] - \text{mod})$. \square

Proposition 4.3.26. *Soient des anneaux R, k, F comme dans la preuve du théorème 4.3.25. Soit \mathcal{X}_R° un schéma lisse sur R . Alors pour tout prolongement*

$$\iota_F : F \hookrightarrow \mathbb{C}, \iota_\ell : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C},$$

on a un morphisme canonique

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{X}_F^\circ) \otimes_{F, \iota_F} \mathbb{C} \rightarrow H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}_k^\circ, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_\ell, \iota_\ell}} \mathbb{C}$$

compatible à tout automorphisme du R -schéma \mathcal{X}_R° . De plus, si l'on dispose d'un schéma \mathcal{X}_R propre et lisse sur R , tel que \mathcal{X}_R° se prolonge comme un ouvert dans \mathcal{X}_R de manière à ce que le complément soit un diviseur à croisements normaux stricts relatif à R , alors le morphisme ci-dessus est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. Comme \mathcal{X}_R° est lisse sur R , on a par [8, Exposé XIII, Reformulation 2.1.5], que pour tout groupe abélien A qui est fini en tant qu'ensemble et de torsion premier à p , le cycle proche $R\psi(A_{\mathcal{X}_F^\circ})$ est isomorphe à $A_{\mathcal{X}_k^\circ}$. Le morphisme canonique (2.1.8.1) de *loc.cit.* devient alors

$$(10) \quad H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}_F^\circ, A) \rightarrow H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{X}_k^\circ, A).$$

Par définition,

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^{\bullet}(\mathcal{X}_F^{\circ}, \mathbb{Z}_{\ell}) &:= \lim_{n \geq 0} H_{\text{cl}}^{\bullet}(\mathcal{X}_{\text{an}}^{\circ}, \mathbb{Z}/\ell^n), \\ H_{\text{ét}}^{\bullet}(\mathcal{X}_F^{\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) &:= H_{\text{ét}}^{\bullet}(\mathcal{X}_F^{\circ}, \mathbb{Z}_{\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}. \end{aligned}$$

Idem pour \mathcal{X}_k° . Ainsi, on déduit de (10) un morphisme canonique

$$H_{\text{ét}}^{\bullet}(\mathcal{X}_F^{\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \rightarrow H_{\text{ét}}^{\bullet}(\mathcal{X}_k^{\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}).$$

Ce sera un quasi-isomorphisme si \mathcal{X}_R° admet une compactification comme décrite dans l'énoncé. En fait, par proposition 2.1.9 de *loc.cit.*, l'existence d'une telle compactification implique que (10) est un quasi-isomorphisme. Pour conclure, il reste donc à trouver un isomorphisme canonique

$$(11) \quad H_{\text{dR}}^{\bullet}(\mathcal{X}_F^{\circ}) \otimes_{F, \iota_F} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^{\bullet}(\mathcal{X}_F^{\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}, \iota_{\ell}} \mathbb{C}.$$

Montrons-le. Analysons le côté droite de (11). Notons $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}^{\circ}$ le changement de base de \mathcal{X}_F° par rapport à $\iota_F : F \hookrightarrow \mathbb{C}$. Pour tout groupe abélien A comme ci-dessus, l'extension ι_F induit

$$H_{\text{ét}}^{\bullet}(\mathcal{X}_F^{\circ}, A) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^{\bullet}(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}^{\circ}, A),$$

lequel, par [3, Exposé XI, Théorème 4.4] et en notant $\mathcal{X}_{\text{an}}^{\circ}$ la variété complexe analytique associée à $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}^{\circ}$, est isomorphe à $H_{\text{cl}}^{\bullet}(\mathcal{X}_{\text{an}}^{\circ}, A)$, où H_{cl}^{\bullet} désigne la cohomologie d'un faisceau par rapport à la *topologie classique* d'un *espace topologique*. On en déduit

$$H_{\text{ét}}^{\bullet}(\mathcal{X}_F^{\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{cl}}^{\bullet}(\mathcal{X}_{\text{an}}^{\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}).$$

Le côté gauche de (11) est isomorphe à $H_{\text{dR}}^{\bullet}(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}^{\circ})$, lequel admet un morphisme naturel, montré quasi-isomorphe dans [13], vers l'hypercohomologie

$$\mathbb{H}^{\bullet}(\mathcal{X}_{\text{an}}^{\circ}, \Omega_{\text{an}}^{\bullet})$$

où $\Omega_{\text{an}}^{\bullet}$ est le complexe des faisceaux des *formes différentielles holomorphes*. Cette hypercohomologie est quasi-isomorphe à $H_{\text{cl}}^{\bullet}(\mathcal{X}_{\text{an}}^{\circ}, \mathbb{C})$ par le lemme de Poincaré, qui dit que le morphisme naturel

$$\underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{an}}^{\bullet}$$

est un quasi-isomorphisme pour la *topologie classique*. \square

Remarque 4.3.27. *D'après la preuve, \mathfrak{G} pourrait, plus généralement, être un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Lambda) \rtimes \Lambda \otimes R^{\times}$ ayant les mêmes propriétés.*

4.3.28. *Trace et volume.* Comment calculer explicitement la trace d'un $\gamma \in \mathfrak{G}$ sur $\varphi(1)$? On a besoin de la notion de *volume* pour les polytopes pour répondre à cette question.

Pour tout réseau Λ , $\Lambda \otimes \mathbb{R}$, considéré comme un groupe additif muni de sa topologie usuelle, est muni d'une unique *mesure de Haar* telle que la mesure induite sur $(\Lambda \otimes \mathbb{R})/\Lambda$ est de volume totale 1. Pour un polytope $\Delta \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$ de dimension maximale, son volume sera mesuré sous cette mesure. Sinon, en le déplaçant par un élément de Λ , on peut supposer qu'il contient 0. Alors, prenons H le plus petit sous-espace linéaire de $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ contenant Δ . Alors $H \cap \Lambda$ est un réseau cocompact dans H , ce qui induit une mesure canonique sur H comme ci-dessus. Le volume de $\Delta \subset H$ sera alors mesuré sous cette mesure. En tous cas, nous allons noter le volume de Δ par $\text{Vol}(\Delta)$.

Lemme 4.3.29. *Pour tout polytope (convexe et rationnel) $\Delta \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$, on a*

$$\text{card}((n\Delta) \cap \Lambda) = \text{Vol}(\Delta)n^{\dim \Delta} + O(n^{\dim(\Delta)-1})$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\sum_{n \geq 0} \text{card}((n\Delta) \cap \Lambda) s^n \sim \frac{\dim(\Delta)! \text{Vol}(\Delta)}{(1-s)^{\dim(\Delta)+1}}$$

lorsque $s \rightarrow 1^-$.

Proposition 4.3.30. *Suivons les notations du théorème 4.3.21 (resp. théorème 4.3.25), alors pour tout $\gamma \in \mathfrak{G}$, on a*

$$\text{Tr}(\gamma; \varphi(1)) = \det(1 - \gamma; (\Delta^\gamma - \Delta^\gamma)^\perp) \dim(\Delta^\gamma)! \text{Vol}(\Delta^\gamma).$$

Démonstration. Traitons le cas du théorème 4.3.21. L'autre cas sera similaire. On utilise l'égalité

$$\sum_{n \geq 0} F[\Lambda \cap (n\Delta)] s^n = \frac{\varphi(s)}{(1-s) \det(1 - s\rho)}$$

dans $K(F[\mathfrak{G}] - \text{mod})[[s]]$. Pour $\gamma \in \mathfrak{G}$, remarquons d'abord que

$$\text{Tr}(\gamma; F[\Lambda \cap (n\Delta)]) = \text{card}(\Lambda \cap (n\Delta)).$$

Appliquant le lemme 4.3.29 au polytope Δ^γ , i.e. au sous-polytope (rationnel) des points fixes sous l'action de γ sur Δ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\gamma; \varphi(1)) &\sim \mathrm{Tr}(\gamma; \varphi(s)) \\ &= (1-s) \det(1-s\gamma; \rho) \sum_{n \geq 0} \mathrm{card}(\Lambda \cap (n\Delta^\gamma)) s^n \\ &\sim \frac{\det(1-s\gamma; \rho)}{(1-s)^{\dim(\Delta^\gamma)}} \dim(\Delta^\gamma)! \mathrm{Vol}(\Delta^\gamma) \\ &\sim \det(1-\gamma; (\Delta^\gamma - \Delta^\gamma)^\perp) \dim(\Delta^\gamma)! \mathrm{Vol}(\Delta^\gamma) \end{aligned}$$

lorsque $s \rightarrow 1^-$. □

5. SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES ÉQUIVARIANTES

Suivons les notations du paragraphe 4. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et \mathbb{T} un tore (déployé) sur k , dont le réseau des poids est Λ . Soit $f \in k[\Lambda]$ une fonction sur \mathbb{T} . Notons $\Delta_\infty(f) \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$, appelé *polytope de Newton à l'infini* associé à f , l'enveloppe convexe de $\{0\} \cup \Delta(f)$. On note $\mathbb{A}^1 := \mathrm{Spec}(k[c])$ la droite affine sur k .

Définition 5.0.1. *Une fonction $f \in k[\mathbb{T}]$ est dite non-dégénérée à l'infini si pour toute face Γ de $\Delta_\infty(f)$ ne contenant pas 0, les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *Le diviseur sur \mathbb{T} défini par $f|_\Gamma$ est lisse.*
- *Il existe $l \in \Lambda^\vee$ telle que, considérée comme fonction sur Γ , elle est constante de valeur (entière) non-divisible par p .*

Théorème 5.0.2. *Soit \mathcal{X}° un diviseur sur \mathbb{T} défini par $f \in k[\mathbb{T}]$ non-dégénérée à l'infini. Soit $\mathfrak{G} \subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$ un sous-groupe fini fixant f . Notons $\rho := \Lambda \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}$. Alors il existe un (unique) polynôme*

$$\varphi(s) \in \mathrm{K}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\mathfrak{G}] - \mathrm{mod})[s],$$

tel que

$$\sum_{n \geq 0} \overline{\mathbb{Q}_\ell}[(n\Delta_\infty(f)) \cap \Lambda] s^n = \frac{\varphi(s)}{(1-s) \det(1-s\rho)}$$

dans $\mathrm{K}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\mathfrak{G}] - \mathrm{mod})[[s]]$. De plus, considérant f comme un morphisme $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{A}^1$, on a, dans $\mathrm{K}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\mathfrak{G}] - \mathrm{mod})$,

$$\mathrm{H}_{c,\mathrm{ét}}^\bullet(\mathbb{T}, f^* \mathcal{L}_\psi) = (-1)^{\dim \mathbb{T}} \det(\rho) \varphi(1).$$

Démonstration. Soit \mathcal{F} un faisceau sur \mathbb{A}^1 modérément ramifié à l'infini. Par la *formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič* telle que décrite dans [16, Théorème (2.2.1.2)] et le fait

$$\text{Swan}_\infty \mathcal{L}_\psi = 1$$

comme décrit dans l'exemple (2.1.2.8) de *loc. cit.*, on a

$$\mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(\mathbb{A}^1, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\psi) = \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) - \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$$

dans $\mathbf{K}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell - \text{mod})$, où $\bar{\eta}$ est un point géométrique localisé sur le point générique de \mathbb{A}^1 . Supposons qu'un groupe fini \mathfrak{G} agit sur \mathcal{F} , alors l'égalité ci-dessus est vraie même dans $\mathbf{K}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathfrak{G}] - \text{mod})$. Pour le voir, on peut appliquer l'égalité ci-dessus à chaque composante isotypique de \mathcal{F} , sachant que ces composantes seront aussi modérément ramifiées à l'infini. Par [18, Theorem 4.2], on sait que le complexe de faisceaux $\mathcal{F} := \mathbf{R}f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est modérément ramifié à l'infini. Il est muni d'une action du groupe \mathfrak{G} comme dans l'énoncé puisque f est \mathfrak{G} -invariante. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(\mathbb{T}, f^* \mathcal{L}_\psi) &= \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(\mathbb{A}^1, (\mathbf{R}f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\psi) \\ &= \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(\mathbb{A}^1, \mathbf{R}f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) - (\mathbf{R}f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\bar{\eta}} \\ &= \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(\mathbb{T}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) - \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(f^{-1}(\bar{\eta}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &= \det(1 - \rho) - \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(G^{-1}(0), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{aligned}$$

dans $\mathbf{K}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathfrak{G}] - \text{mod})$, où on a noté par G la fonction $f - c$ sur le tore $\mathbb{T} \times_k \bar{\eta}$. On a que G est invariante sous le groupe \mathfrak{G} , et que $\Delta(G) = \Delta_\infty(f)$. La preuve du théorème 4.2 de *loc. cit.* montre aussi que G est *non-dégénérée*, on peut donc appliquer le théorème 4.3.25 sur G . On obtient ainsi le polynôme $\varphi(s)$ ayant les deux propriétés décrites dans l'énoncé. \square

5.1. Applications. Nous étudions ici des sommes trigonométriques sur des *espaces vectoriels*. Soit U un espace vectoriel de dimension finie sur k . Soit B une k -base de U . Elle induit une stratification de U par des tore \mathbb{G}_m^J , où J parcourt les sous-ensembles de B , via

$$\mathbb{G}_m^J \hookrightarrow U, (t_j)_{j \in J} \mapsto \sum_j t_j \cdot j.$$

De plus, le réseau des poids et le réseau des copoids du tore \mathbb{G}_m^B sont tous les deux canoniquement isomorphes à \mathbb{Z}^B . Le lemme suivant est clair.

Lemme 5.1.1. *Soit f une fonction sur U , alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- La restriction $f|_{\mathbb{G}_m^B}$ est non-dégénérée à l'infini.
- Pour tout $J \subseteq B$, $f|_{\mathbb{G}_m^J}$ est non-dégénérée à l'infini.

Pour un k -espace vectoriel V , notons

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}(V) &:= \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Sym}^n(V), \\ \mathrm{ST}(V) &:= \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{ST}^n(V).\end{aligned}$$

Alors $\mathrm{ST}(V^\vee)$ est le dual de $\mathrm{Sym}(V)$. Soit I un ensemble fini. Soit $\gamma \in \mathfrak{S}_I$. Notons par I/γ l'ensemble des γ -orbites dans I . Pour une telle γ -orbite O , sa longueur sera notée $|O|$.

5.1.2. *Des fonctions génératrices associées aux permutations.* Dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{Z}[[t_O]_{O \in I/\gamma}]$, définissons

$$\mathcal{P}_\gamma((t_O)_{O \in I/\gamma}) := \left(1 - \sum_{J \subseteq I/\gamma, J \neq \emptyset} (-1)^{|J|} \left(\sum_{O \in J} |O| - 1\right) \prod_{O \in J} t_O\right)^{-1}.$$

On la développe comme

$$\sum_{m_O \geq 0, \forall O \in I/\gamma} \mathcal{C}_\gamma((m_O)_O) \prod_O t_O^{m_O},$$

où les $\mathcal{C}_\gamma((m_O)_O) \in \mathbb{Z}$.

Lemme 5.1.3. *On a*

$$\mathcal{C}_\gamma((m_O)_O) = \sum_{0 \leq n_O \leq m_O, \forall O \in I/\gamma} \left(\sum_O n_O\right)! \prod_O \frac{(-|O|)^{n_O} \binom{m_O}{n_O}}{n_O!}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}& \mathcal{P}_\gamma((t_O)_{O \in I/\gamma}) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \sum_O \frac{|O|t_O}{1-t_O}\right)} \times \frac{1}{\prod_O (1-t_O)} \\ &= \sum_{0 \leq n_O \leq m_O, \forall O \in I/\gamma} \frac{(\sum_O n_O)!}{\prod_O n_O!} \frac{(-|O|t_O)^{n_O}}{(1-t_O)^{n_O+1}}.\end{aligned}$$

On conclut par l'égalité

$$\frac{t_O^{n_O}}{(1-t_O)^{n_O+1}} = \sum_{m_O} \binom{m_O}{n_O} t_O^{m_O}.$$

□

Remarque 5.1.4. *Pour certains γ , ces coefficients se calculent de façons plus simples. Voici les cas intervenant dans la proposition 2.0.4.*

a). *Pour γ transitif,*

$$\mathcal{P}_\gamma(t_I) = (1 + (|I| - 1)t_I)^{-1},$$

donc pour tout $m \geq 0$,

$$\mathcal{C}_\gamma(m) = (1 - |I|)^m.$$

b). Pour γ induisant deux orbites $\{i\}, I - \{i\}$ où i est un élément de I , notons $t_{\{i\}}$ par t_i , on a

$$\mathcal{P}_\gamma(t_i, t_{I-\{i\}}) = (1 + (|I| - 2)t_{I-\{i\}} - (|I| - 1)t_i t_{I-\{i\}})^{-1},$$

donc pour tout $m \geq 0$,

$$\mathcal{C}_\gamma(m, m) = (|I| - 1)^m.$$

c). Pour $\gamma = \text{id}$, on a

$$\mathcal{P}_\gamma((t_i)_{i \in I}) = (1 - \sum_{J \subseteq I, |J| \geq 2} (-1)^{|J|} (|J| - 1) \prod_{i \in J} t_i)^{-1}.$$

Lorsque $|I|=3$, on a, d'après le commentaire de Gheorghe Coserea dans [21], que

$$\mathcal{C}_{\text{id}}(m, m, m) = (-1)^m F_m,$$

où $F_m := \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^3$ sont les nombres de Franel.

5.1.5. *Cas I.* Soient $(V_i)_{i \in I}$ des sous-espaces vectoriels de dimensions finies de V tels que $V_i = V_{\gamma(i)}$ pour tout i . Ainsi pour toute γ -orbite $O \subset I$, on peut définir $V_O \subset V$ comme V_i pour un quelconque $i \in O$. Notre γ agit sur $\prod_{i \in I} V_i$ via $(v_i) \mapsto (v_{\gamma^{-1}(i)})$. Notons par φ le morphisme

$$\prod_i V_i \rightarrow \text{Sym}(V), (v_i) \mapsto \prod (1 + v_i).$$

Il est invariant sous γ .

Suivant ces notations, on a :

Proposition 5.1.6. *Pour tout $l \in \text{ST}(V^\vee)$ générique,*

$$\text{Tr}(\gamma; H_{c,\text{ét}}^\bullet(\prod_i V_i, (l \circ \varphi)^* \mathcal{L}_\psi)) = \mathcal{C}_\gamma((\dim V_O)_O).$$

Démonstration. Il s'agit d'une somme trigonométrique sur $\prod_i V_i$, c'est à dire sur un *espace vectoriel*. On aimerait la calculer en s'appuyant sur le théorème 5.0.2. Ce théorème étant sur les tores, on doit d'abord stratifier $\prod_i V_i$ par des tores. Pour tout i , prenons une k -base B_i de V_i , de sorte que $B_i = B_{\gamma(i)}$ sous l'identification $V_i = V_{\gamma(i)}$. Ceci donne une k -base B_O de V_O pour toute γ -orbite $O \subset I$. Ainsi pour tout $i \in I$, V_i est stratifié par les tores $T_{J_i} := \mathbb{G}_m^{J_i}$ où J_i parcourt les sous-ensembles de B_i . Le produit $\prod_i V_i$ est stratifié par les $\prod_i T_{J_i}$. D'ailleurs, le réseau des poids et le réseau des copoids de $\prod_i T_{B_i}$ sont tous les deux canoniquement isomorphes à $\prod_i \mathbb{Z}^{B_i}$. Pour $l \in \text{ST}(V^\vee)$ générique, considérons la fonction $l \circ \varphi$ restreinte au tore $\prod_i T_{B_i} \subset \prod_i V_i$. Le polytope de

Newton de cette restriction est $\prod_i \Delta(\{0\} \cup B_i)$ où $\Delta(\{0\} \cup B_i)$ désigne l'enveloppe convexe de $\{0\} \cup B_i$ dans $\mathbb{R}^{B_i} = \sum_{b \in B_i} \mathbb{R}b$. Ce polytope contient 0, donc coïncide avec le polytope de Newton à l'infini de cette restriction. Remarquons en passant que pour ce genre de polytope, la preuve de [18, Theorem 4.2] montre que la première des deux conditions suivantes implique la deuxième :

- Pour tout $l \in \text{ST}(V^\vee)$ générique, la fonction $(l \circ \varphi)|_{\prod_i T_{B_i}}$ est non-dégénérée à l'infini.
- Pour tout $l \in \text{ST}(V^\vee)$ générique, la fonction $(l \circ \varphi)|_{\prod_i T_{B_i}}$ est non-dégénérée.

Ce polytope est un produit de simplexes. Ainsi ses faces sont produits de sous-simplexes, i.e. sont de la forme

$$\prod_{i \in I_1} \Delta(\{0\} \cup J_i) \times \prod_{i \in I_2} \Delta(J_i)$$

où $\alpha : I = I_1 \sqcup I_2$ est une partition et les $J_i \subseteq B_i$ pour tout $i \in I$. Montrons que $(l \circ \varphi)|_{\prod_i T_{B_i}}$ est non-dégénérée pour l générique. Concrètement, d'après la description des faces ci-dessus, il faut, la deuxième condition de la définition 5.0.1 étant évidemment vérifiée, montrer que pour toute partition $\alpha : I = I_1 \sqcup I_2$ et pour tout $l \in \text{ST}(V^\vee)$ générique, tous les morphismes

$$\varphi_\alpha : \prod_{i \in I} T_{J_i} \rightarrow \text{Sym}(V), (t_i) \mapsto \prod_{i \in I_1} (1 + t_i) \times \prod_{i \in I_2} t_i$$

sont tels que : $l \circ \varphi_\alpha$ définit un diviseur lisse sur $\prod_{i \in I} T_{J_i}$. On peut compléter les morphismes ci-dessus en des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} T_{J_i} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \text{Sym}(V) - \{0\} \\ \pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i \in I_1} \mathbb{P}(k \oplus V_{J_i}) \times \prod_{i \in I_2} \mathbb{P}(V_{J_i}) & \xrightarrow{m} & \mathbb{P}(\text{Sym}(V)), \end{array}$$

où π_α désigne le produit des morphismes lisses

$$\begin{aligned} T_{J_i} &\rightarrow \mathbb{P}(k \oplus V_{J_i}), t \mapsto k \cdot (1 + t), \text{ pour tout } i \in I_1; \\ T_{J_i} &\rightarrow \mathbb{P}(V_{J_i}), t \mapsto k \cdot t, \text{ pour tout } i \in I_2, \end{aligned}$$

et m est donné simplement par la multiplication. On sait que m satisfait (4) par proposition 3.2.4. Ainsi, le lemme 3.1.2 montre la non-dégénérescence à l'infini souhaitée. Notre γ induit une permutation des tores $T = \prod_i T_{J_i}$. Le polytope de Newton, ainsi que celui à l'infini, de $(l \circ \varphi)|_T$ sont tous les deux donnés par

$$\Delta = \prod_{i \in I} \Delta(\{0\} \cup J_i) \subset \Lambda_T \otimes \mathbb{R}.$$

Un tore T comme ci-dessus est préservé par γ si et seulement s'il existe des $J_O \subseteq B_O$ pour tout $O \in I/\gamma$ tels que $J_i = J_O$ pour tout i dans l'orbite O . Pour un tel T γ -stable, on a

$$\begin{aligned} \dim T &= \sum_{i \in I} |J_i| = \sum_{O \in I/\gamma} |O| \cdot |J_O|, \\ \det(\gamma, \Lambda_T) &= (-1)^{\sum_O |J_O|(|O|-1)}. \end{aligned}$$

Le sous-polytope Δ^γ des points fixes par γ est l'image de l'application « diagonale »

$$\prod_O \Delta(\{0\} \cup J_O) \hookrightarrow \prod_{i \in I} \Delta(\{0\} \cup J_i).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \dim(\Delta^\gamma) &= \sum_O |J_O|, \\ \text{Vol}(\Delta^\gamma) &= \prod_O \text{Vol}(\Delta(\{0\} \cup J_O)) = \prod_O \frac{1}{|J_O|!}, \\ \det(1 - \gamma; (\Delta^\gamma - \Delta^\gamma)^\perp) &= \prod_O |O|^{|J_O|}, \end{aligned}$$

où

$$(\Delta^\gamma - \Delta^\gamma)^\perp := \{u \in (\Lambda_T)^\vee \otimes \mathbb{R} \mid u \text{ est constante sur } \Delta^\gamma\}.$$

La trace

$$\text{Tr}(\gamma; \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(\prod_i V_i, (l \circ \varphi)^* \mathcal{L}_\psi))$$

est la somme des

$$\text{Tr}(\gamma; \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(T, (l \circ \varphi)^* \mathcal{L}_\psi))$$

où T parcourt les strates γ -stables comme ci-dessus de $\prod_i V_i$. Si $l \in \text{ST}(V^\vee)$ est générique, comme on a déjà montré que $(l \circ \varphi)|_T$ est non-dégénérée à l'infini, le théorème 5.0.2 et la proposition 4.3.30 impliquent que

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(\gamma; \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(T, (l \circ \varphi)^* \mathcal{L}_\psi)) \\ &= (-1)^{\dim T} \det(\gamma; \Lambda_T) \det(1 - \gamma; (\Delta^\gamma - \Delta^\gamma)^\perp) \dim(\Delta^\gamma)! \text{Vol}(\Delta^\gamma) \\ &= (\sum_O |J_O|)! \prod_O \frac{(-|O|)^{|J_O|}}{|J_O|!}. \end{aligned}$$

En somme,

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}(\gamma; \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(\prod_i V_i, (l \circ \varphi)^* \mathcal{L}_\psi)) \\
&= \sum_{J_O \subseteq B_O, \forall O \in I/\gamma} (\sum_O |J_O|)! \prod_O \frac{(-|O|)^{|J_O|}}{|J_O|!} \\
&= \sum_{0 \leq n_O \leq \dim(V_O), \forall O \in I/\gamma} (\sum_O n_O)! \prod_O \frac{(-|O|)^{n_O} \binom{\dim V_O}{n_O}}{n_O!} \\
&= \mathcal{C}_\gamma((\dim V_O)_O).
\end{aligned}$$

□

5.1.7. *Cas II.* Soit X une courbe projective lisse irréductible sur k . Soit \mathcal{L} un fibré en droites sur X . Soient $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ des sous-faisceaux de \mathcal{L} de sorte que $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{\gamma(i)}$ pour tout $i \in I$. Pour toute γ -orbite $O \subseteq I$, notons $\mathcal{L}_O \subseteq \mathcal{L}$ comme \mathcal{L}_i pour un quelconque $i \in O$. Prenons le morphisme

$$\varphi : \prod_i \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}_i) \rightarrow \oplus_{n \geq 0} \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}), (s_i) \mapsto \prod (1 + s_i).$$

Proposition 5.1.8. *Pour tout $l \in \oplus_{n \geq 0} \mathbf{H}^1(X, \mathcal{L}^{\otimes(-n)} \otimes \Omega)$ générique,*

$$\text{Tr}(\gamma; \mathbf{H}_{c,\text{ét}}^\bullet(\prod_i \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}_i), (l \circ \varphi)^* \mathcal{L}_\psi)) = \mathcal{C}_\gamma((\dim \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}_O))_O).$$

Démonstration. On peut supposer que tous les \mathcal{L}_i sont non-nuls. Ils sont alors aussi des fibrés en droites sur X . Le morphisme φ se factorise comme

$$\prod_i \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}_i) \rightarrow \text{Sym}(\mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})), (v_i) \mapsto \prod (1 + v_i),$$

sui de

$$\text{Sym}(\mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})) \rightarrow \oplus_{n \geq 0} \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$$

lequel est le produit des morphismes

$$\text{Sym}^n(\mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})) \rightarrow \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}), \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi notre énoncé est du même type que celui de la proposition 5.1.6, sauf que notre fonctionnelle linéaire l est plus spécifique. Pour adapter la preuve de 5.1.6, il faut, pour tout $i \in I$, bien choisir une base de $\mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}_i)$. Pour tout i , prenons un ensemble fini B_i des points deux-à-deux distincts de X tels que,

$$\begin{aligned}
& \dim \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}_i) = |B_i|, \\
& \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}_i(-\sum_{b \in B_i} b)) = 0.
\end{aligned}$$

De plus, on peut bien sûr supposer $B_i = B_{\gamma(i)}$ pour tout i . Pour tout i et tout $J_i \subseteq B_i$, on note $\mathcal{L}_{i,J_i} := \mathcal{L}_i(-\sum_{b \in B_i - J_i} b)$ le fibré en droites sur X muni de l'injection faisceutique $\mathcal{L}_{i,J_i} \hookrightarrow \mathcal{L}_i$. Alors, pour tout $b \in B_i$, $H^0(X, \mathcal{L}_{i,\{b\}})$ est de dimension 1. On choisit un élément non-nul e_b là-dedans. Alors, pour tout $J_i \subseteq B_i$, $H^0(X, \mathcal{L}_{i,J_i})$ est le sous-espace vectoriel de $H^0(X, \mathcal{L}_i)$ librement engendré par $(e_b)_{b \in J_i}$. En particulier, $(e_b)_{b \in B_i}$ forment une base de $H^0(X, \mathcal{L}_i)$. Il s'ensuit une stratification de $H^0(X, \mathcal{L}_i)$ par les tores $T_{J_i} := \mathbb{G}_m^{J_i}$ où J_i parcourt les sous-ensembles de B_i . Le produit $\prod_i H^0(X, \mathcal{L}_i)$ est alors stratifié par les tores $\prod_i T_{J_i}$. Comme dans la preuve de la proposition 5.1.6, on est réduit à regarder, pour toute partition $\alpha : I = I_1 \sqcup I_2$, des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} T_{J_i} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) - \{0\} \\ \pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i \in I_1} \mathbb{P}(k \oplus H^0(X, \mathcal{L}_{i,J_i})) \times \prod_{i \in I_2} \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L}_{i,J_i})) & \xrightarrow{m} & \mathbb{P}\left(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})\right), \end{array}$$

où φ_α envoie (t_i) sur $\prod_{i \in I_1} (1 + t_i) \times \prod_{i \in I_2} t_i$, π_α désigne le produit des morphismes lisses

$$\begin{aligned} T_{J_i} &\rightarrow \mathbb{P}(k \oplus H^0(X, \mathcal{L}_{i,J_i})), t \mapsto k \cdot (1 + t), \text{ pour tout } i \in I_1, \\ T_{J_i} &\rightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L}_{i,J_i})), t \mapsto k \cdot t, \text{ pour tout } i \in I_2, \end{aligned}$$

et m est donné simplement par la multiplication. On sait que m satisfait (4), cette fois par théorème 3.2.8. Ainsi, le lemme 3.1.2 montre que pour tout $l \in \bigoplus_{n \geq 0} H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes(-n)} \otimes \Omega)$ générique, $l \circ \varphi_\alpha$ définit un diviseur lisse sur $\prod_{i \in I} T_{J_i}$, ce qui nous permet de conclure comme dans la preuve de 5.1.6. \square

ANNEXE A. TRANSFORMATION DE FOURIER POUR LES CHAMPS VECTORIELS, D'APRÈS D. GAITSGORY

Suivons les conventions du text principal. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p . Soit S un champ algébrique sur k . Considérons la (2-)catégorie des champs algébriques sur S . Un objet dans cette catégorie muni d'une structure de groupe abélien est appelé *champ de Picard algébrique* sur S .

Pour $V_1 \rightarrow V_0$ un morphisme O_S -linéaire entre des fibrés vectoriels sur S , le champ quotient $[V_0/V_1]$ sur S sera un exemple de champ de Picard algébrique sur S . Un champ de Picard algébrique sur S localement de cette forme sera appelé *champ vectoriel* sur S .

Soit \mathcal{V} un champ vectoriel sur S , on peut définir son dual \mathcal{V}^\vee comme le champ algébrique sur S construit de la manière suivante :

Si \mathcal{V} est de la forme $[V_0/V_1]$ comme ci-dessus, prenons

$$\mathcal{V}^\vee := S \times_{V_1^\vee} V_0^\vee$$

où V_i^\vee est le fibré vectoriel sur S dual à V_i , $V_0^\vee \rightarrow V_1^\vee$ est le morphisme dual, et $S \rightarrow V_1^\vee$ est le morphisme « section zero ».

Cette construction est indépendante de la présentation de \mathcal{V} comme $[V_0/V_1]$,⁹ ce qui permet, par recollement, de définir \mathcal{V}^\vee pour un champ vectoriel \mathcal{V} général.

Théorème A.0.1. *La transformation de Fourier induit une équivalence des catégories*

$$\mathrm{Sh}(\mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}(\mathcal{V}^\vee)$$

respectant la t-structure perverse.

A notre connaissance, ce résultat est dû à D. Gaitsgory. L’auteur lui remercie pour un échange là-dessus.

ANNEXE B. RAFFINEMENT NON-SINGULIER ET ÉQUIVARIANT D’UN ÉVENTAIL

Suivons la terminologie de [11].

Soit Λ un réseau, i.e. un groupe abélien libre de rang fini. Soit \mathfrak{F} un éventail dans $\Lambda \otimes \mathbb{R}$. Notons $\mathrm{Aut}(\Lambda, \mathfrak{F}) \subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$ le sous-groupe préservant \mathfrak{F} .

Théorème B.0.1. *L’éventail \mathfrak{F} admet un raffinement non-singulier et préservé par $\mathrm{Aut}(\Lambda, \mathfrak{F})$.*

Démonstration. Notons $\mathfrak{F}(i) \subset \mathfrak{F}$ le sous-ensemble des cônes de dimension i . Notons $\mathfrak{F}(< i) := \cup_{j < i} \mathfrak{F}(j)$. C’est un sous-éventail de \mathfrak{F} . En fait, on va canoniquement associer à tout éventail \mathfrak{F} un éventail $\mathfrak{F}_{\mathrm{raff}}$ tel que :

- Il raffine \mathfrak{F} , est non-singulier et est préservé par $\mathrm{Aut}(\Lambda, \mathfrak{F})$;
- Pour tout i , on a

$$\{\tau \in \mathfrak{F}_{\mathrm{raff}} \mid \tau \subset \mathfrak{F}(< i)\} = \mathfrak{F}(< i)_{\mathrm{raff}}.$$

Étape 1.

C’est un ingrédient pour l’étape suivante.

Soit σ un cône simplicial. Il est donc engendré par un ensemble B des éléments non-divisibles et linéairement indépendants de Λ . On note

9. Plus précisément, un quasi isomorphisme $(V_1 \rightarrow V_0) \xrightarrow{\sim} (W_1 \rightarrow W_0)$ induit un isomorphisme $S \times_{W_1^\vee} W_0^\vee \xrightarrow{\sim} S \times_{V_1^\vee} V_0^\vee$.

$\mathfrak{F}(\sigma)$ l'éventail de toutes les faces de σ . Par abus de langage, la volume du parallélépipède engendré par B sera aussi appelée « volume de σ ».

Supposons que B contient un élément spécial $*$ fixé tel que $B - \{*\}$ est partie d'une \mathbb{Z} -base de Λ . Pour tout tel couple $(\sigma, *)$, construisons ci-dessous canoniquement un éventail non-singulier, noté $\mathfrak{F}(\sigma, *)$, tel que :

- Il raffine $\mathfrak{F}(\sigma)$;
- Pour toute face $\sigma' \subset \sigma$, on a

$$\{\tau \in \mathfrak{F}(\sigma, *) \mid \tau \subset \sigma'\} = \begin{cases} \mathfrak{F}(\sigma', *), & \text{si } * \in \sigma'; \\ \mathfrak{F}(\sigma'), & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'abord, remarquons qu'il existe un unique sous-ensemble minimal B' de B contenant $*$ tel que

$$(\oplus_{b \in B - B'} \mathbb{Z}b) \oplus (\Lambda \cap \oplus_{b \in B'} \mathbb{R}b)$$

est un facteur direct de Λ . Si $B' = \{*\}$, alors $\mathfrak{F}(\sigma)$ est déjà non-singulier. Prenons $\mathfrak{F}(\sigma, *) := \mathfrak{F}(\sigma)$. Si B' contient d'autres éléments, alors il existe un unique $e \in \Lambda$ de la forme $\sum_{b \in B'} c_b b$ où les coefficients $c_b \in]0, 1[$ et c_* est le plus petit possible. Dans ce cas, notons σ_b le cône engendré par $B \cup \{e\} - \{b\}$ pour tout $b \in B'$. Ces cônes forment une subdivision de σ . Le choix de e garantit alors que leurs volumes sont strictement plus petites, et que celui ne contenant pas $*$, c'est-à-dire σ_* , est non-singulier. Par récurrence, on peut définir

$$\mathfrak{F}(\sigma, *) := \mathfrak{F}(\sigma_*) \cup (\cup_{b \in B' - \{*\}} \mathfrak{F}(\sigma_b, *)).$$

Etape 2.

Revenons au problème initial. Faisons récurrence sur la dimension d de \mathfrak{F} .

Tout $\sigma \in \mathfrak{F}(d)$ est engendré par ces faces de dimension 1. Chaque telle face est engendré par un unique élément non-divisible de Λ . La somme de ces éléments pourrait être divisible. Notons par $*_\sigma \in \Lambda$ l'unique élément non-divisible dont un multiple (positif) est cette somme.

Par récurrence, supposons que $\mathfrak{F}(< d)_{\text{raff}}$ est défini. Pour tout couple de cônes $(\sigma \in \mathfrak{F}(d), \tau \in \mathfrak{F}(< d)_{\text{raff}})$ tel que $\tau \subset \sigma$, comme τ est non-singulier, le cône $\tau + \mathbb{R}_{\geq 0} *_\sigma$ avec l'élément spécial $*_\sigma$ s'inscrit bien dans le cadre de l'étape 1. Ainsi on dispose de son raffinement canonique $\mathfrak{F}(\tau + \mathbb{R}_{\geq 0} *_\sigma, *_\sigma)$. On peut enfin définir

$$\mathfrak{F}_{\text{raff}} := \mathfrak{F}(< d)_{\text{raff}} \cup (\cup_{\sigma \in \mathfrak{F}(d)} \mathfrak{F}(\tau + \mathbb{R}_{\geq 0} *_\sigma, *_\sigma)).$$

□

RÉFÉRENCES

- [1] J. Arthur, Unipotent automorphic representations : conjectures, *Astérisque*, tome 171-172 (1989), p. 13-71
- [2] M. F. Atiyah, R. Bott and L. Gårding, Lacunas for Hyperbolic Differential Operators with Constant Coefficients. II, *Acta Mathematica* 131(1) :145-206, December 1973.
- [3] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, P. Deligne, B. Saint-Donat, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). *Lecture Notes in Mathematics* 305, Springer 1973.
- [4] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, O. Gabber, *Faisceaux Pervers*, *Astérisque* 100 - nouvelle impression, 2018.
- [5] J. M. Boardman, Singularities of differentiable maps, *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 33 (1967), p. 21-57.
- [6] A. Braverman, D. Gaitsgory, Geometric Eisenstein series, *Inv. Math.* 150 (2002), 287-384.
- [7] D. Collingwood, W. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
- [8] P. Deligne, N. Katz, SGA7 t. II. Groupes de monodromie en géométrie algébrique, *Lecture Notes in Mathematics*, Volume : 340, Springer-Verlag, 1973.
- [9] J. Franel, Sur une question de Laisant. *L'intermédiaire des mathématiciens* 1, 45-47, 1894.
- [10] L. Fu, ℓ -adic GKZ hypergeometric sheaves and exponential sums, *Advances in Mathematics*, Volume 298, 6 August 2016, Pages 51-88.
- [11] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, (AM-131), Princeton University Press, 1993.
- [12] W. T. Gan, N. Gurevich, D. Jiang, Cubic unipotent Arthur parameters and multiplicities of square-integrable automorphic forms, *Inventiones mathematicae* 149(2), 225-265, August 2002.
- [13] A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Pub. math. IHES* 29 (1966), 95-103.
- [14] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Seconde partie, *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, Tome 24 (1965), p. 5-231.
- [15] R. P. Langlands, On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series, *Springer-Verlag Lecture Notes in Maths.*, vol. 544, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1976, pp. 1–337.
- [16] G. Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, Tome 65 (1987), p. 131-210.
- [17] G. Laumon and L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge.*, vol. 39, Springer-Verlag, 2000.

- [18] J. Denef, and F. Loeser, Weights of exponential sums, intersection cohomology, and Newton polyhedra, *Inventiones mathematicae* 106.2 (1991) : 275-294.
- [19] V. Lafforgue, S. Lysenko, Geometrizing the minimal representations of even orthogonal groups, *Representation Theory, An Electronic Journal of AMS*, Volume 17, Pages 263–325 (May 28, 2013) S 1088-4165(2013)00431-4, errata : page web de Sergey Lysenko.
- [20] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger, Décomposition spectrale et séries d’Eisenstein : une paraphrase de l’écriture, Birkhauser, 1994.
- [21] <https://oeis.org/A000172>
- [22] A. Stapledon, Representations on the cohomology of hypersurfaces and mirror symmetry, *Advances in Mathematics* 226 (2011) 5268–5297.
- [23] R. Thom, Les singularités des applications différentiables, *Annales de l’institut Fourier*, tome 6 (1956), p. 43-87.
- [24] D. Zagier, Integral solutions of Apéry-like recurrence equations, *Groups and Symmetries : From the Neolithic Scots to John McKay*, CRM Proceedings and Lecture Notes, Vol. 47 (2009), Amer. Math. Society, 349-366.