

Opérades et complexes de graphes : introduction au domaine de recherches

David Waszek
sous la direction de Benoit Fresse

11 octobre 2012

Table des matières

1	Introduction historique	1
2	La notion d'opérade	4
2.1	Définition	4
2.2	Exemples classiques	5
3	Opérades cycliques	6
3.1	Définition	6
3.2	Complexes de graphes	8
3.3	Formes bilinéaires invariantes	8
4	Des algèbres aux graphes	9
	Références	10

1 Introduction historique

« Then I found a strange construction of
cohomology classes of mapping class
groups... »

— Maxim Kontsevich, [Kon93]

Le point de départ des recherches que nous allons exposer est une construction de Maxim Kontsevich datant du début des années 90 ([Kon93, Kon94]). Nous commençons par quelques définitions. Soit $\Sigma_{g,b}$ une surface compacte orientable de genre g à b composantes de bord (par exemple, $\Sigma_{0,3}$ est une sphère à laquelle on a retiré trois disques ouverts). Le *mapping class group* $\Gamma_{g,b}$ de $\Sigma_{g,b}$ peut être défini comme le groupe des classes d'homotopie d'homéomorphismes de $\Sigma_{g,b}$ préservant l'orientation et égaux à l'identité sur les bords. Ce groupe est étroitement lié à l'*espace de modules* $\mathcal{M}_{g,b}$, qui paramètre les structures complexes dont on peut munir $\Sigma_{g,b}$ et qui joue un rôle important en géométrie algébrique ; on a en particulier

$$H^\bullet(\Gamma_{g,b}; \mathbf{Q}) = H^\bullet(\mathcal{M}_{g,b}; \mathbf{Q}).$$

Kontsevich s'est aperçu qu'on pouvait associer à toute algèbre associative A munie d'une structure de $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel (de dimension finie) et d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *invariante*, c'est-à-dire symétrique et vérifiant

$$\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle,$$

une classe de cohomologie dans $H^\bullet(\Gamma_{g,b}; \mathbf{Q})$ pour tous $g, n \geq 0$. Cette construction utilise l'intermédiaire combinatoire suivant.

Un *graphe en rubans* est un graphe connexe muni, en chaque sommet, d'un ordre cyclique sur les arêtes qui lui sont incidentes. En « épaississant » un tel graphe comme à la figure 1, c'est-à-dire en remplaçant les sommets par des disques et les arêtes par

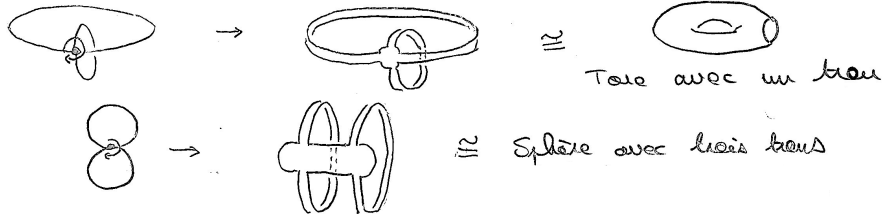


FIGURE 1 – Deux surfaces à bord obtenues par épaississement de graphes en rubans

des rubans, on obtient une surface compacte orientable à bord $\Sigma_{g,b}$. Une telle surface est associée à une infinité de graphes en rubans distincts : en fusionnant deux sommets par contraction d'une arête (et en munissant le sommet résultant de l'ordre cyclique induit sur ses arêtes incidentes) on ne change pas la surface représentée. Il est possible de mettre (une version raffinée de) ce modèle combinatoire à profit pour étudier $\mathcal{M}_{g,b}$, ce qui a été fait sous diverses formes partir du milieu des années 80 (par exemple par Harer et Zagier [HZ86], Penner [Pen88], et Kontsevich lui-même dans sa thèse [Kon92]).

Pour la construction qui nous occupe, Kontsevich a employé ce modèle sous la forme d'un *complexe de graphes* qu'il a défini pour l'occasion. On introduit tout d'abord une notion d'*orientation* pour les graphes en rubans, que nous n'explicitons pas. On définit ensuite $\mathcal{GRub}_k$, le $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel de base les classes d'isomorphismes de graphes en rubans orientés à k sommets (tous de valence ≥ 3), avec la relation

$$(\mathcal{G}, -\text{Or}) = -(\mathcal{G}, \text{Or}).$$

On introduit pour finir une *différentielle* $d : \mathcal{GRub}_{k+1} \rightarrow \mathcal{GRub}_k$ comme suit : pour $\mathcal{G}$ un graphe en rubans orienté,

$$d(\mathcal{G}) = \sum_{a \in \{\text{arêtes de } \mathcal{G}\}} \mathcal{G}/a$$

où $\mathcal{G}/a$ est le graphe en rubans orienté obtenu par contraction de l'arête a . Les orientations sont telles que $d^2 = 0$; ainsi, $\mathcal{GRub}_\bullet$ forme un complexe de chaînes. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{GRub}_k^{g,b} \subset \mathcal{GRub}_k$ de base les graphes en rubans correspondant à la surface $\Sigma_{g,b}$ forment un sous-complexe $\mathcal{GRub}_\bullet^{g,b}$ de $\mathcal{GRub}_\bullet$, et :

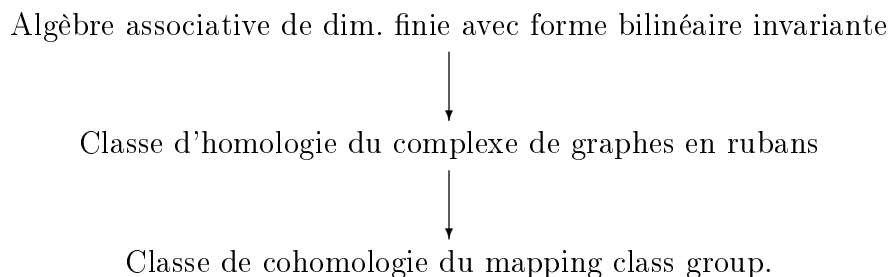
Théorème ([Kon93]). On a un isomorphisme

$$H_k(\mathcal{GRub}_\bullet^{g,b}) \cong H^{r-k}(\Gamma_{g,b})$$

où $r = 4g - 4 + 2b$.

Nous renvoyons à [CV03, section 4] pour une preuve relativement élémentaire de ce résultat.

La première construction de Kontsevich se schématise donc comme suit :



Kontsevich s'est alors aperçu que son résultat pouvait se généraliser. Les graphes en rubans sont, en un certain sens que nous préciserons, associés aux algèbres associatives ; il est possible de construire des complexes de graphes associés à d'autres types d'algèbres, comme les algèbres de Lie ou les algèbres commutatives¹. Comme précédemment, on peut alors construire des classes dans l'homologie de ces complexes à partir de données algébriques, mais il y a une subtilité : c'est à partir d'une *algèbre de Lie* munie d'une forme bilinéaire non dégénérée invariante, c'est-à-dire symétrique et vérifiant

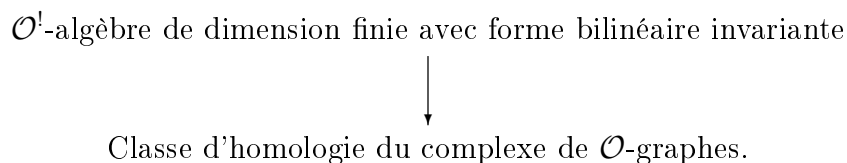
$$\langle [a, b], c \rangle = \langle a, [b, c] \rangle$$

que l'on peut construire une classe dans l'homologie du complexe de graphe *commutatif*, et inversement. Pour rendre compte de ce phénomène de dualité, Ginzburg et Kapranov [GK94] ont repris le concept d'*opérade* (initialement introduit par May [May72] en topologie pour l'étude des espaces de lacets itérés), qui offre l'une des formalisations possibles de la notion de type d'algèbre : il existe ainsi des opérades *Ass*, *Com*, *Lie* encodant respectivement les structures d'algèbre associative, commutative, de Lie. Ils ont ensuite montré que toute opérade *quadratique*² $\mathcal{O}$ admettait une opérade duale $\mathcal{O}^!$, avec en particulier

$$\text{Ass}^! = \text{Ass}, \text{Com}^! = \text{Lie}, \text{Lie}^! = \text{Com}.$$

Cette dualité entre opérades donne lieu à une dualité entre $\mathcal{O}$ -algèbres et $\mathcal{O}^!$ -algèbres, qui permet de faire entrer dans un cadre général plusieurs phénomènes connus précédemment (nous renvoyons à l'exposé de 1994 de Jean-Louis Loday au séminaire Bourbaki, « La renaissance des opérades » [Lod96]).

La construction de Kontsevich est applicable à toute opérade quadratique $\mathcal{O}$ qui est de surcroît *cyclique* : c'est cette condition, dégagée par Getzler et Kapranov [GK95], qui permet la construction du complexe de $\mathcal{O}$ -graphes et la définition de la notion de produit scalaire invariant sur une $\mathcal{O}$ -algèbre (resp. sur une $\mathcal{O}^!$ -algèbre). On a alors le schéma :



1. L'homologie de ces deux complexes est intéressante, car liée à la cohomologie des groupes d'automorphismes extérieurs de groupes libres. Nous renvoyons à [CV03, sections 3 et 5].

2. Dans leur article l'hypothèse faite sur l'opérade est en fait un peu plus restrictive ; leur résultat a ultérieurement été généralisé et il est aujourd'hui usuel de présenter cette dualité pour toute opérade quadratique, voir [LV12, chapitre 7].

Dans ce qui va suivre, nous présentons informellement les notions d'opérade et d'opérade cyclique, pour pouvoir donner une idée du lien entre type d'algèbre et type de graphe ; nous illustrons pour finir sommairement la manière dont on peut passer d'une algèbre associative à un cycle dans le complexe de graphes en rubans. Nous espérons ainsi donner une intuition de la manière dont s'agencent les différents éléments de la construction de Kontsevich. Le but est avant tout de donner au lecteur l'envie d'en apprendre davantage sur ces belles mathématiques où se rejoignent algèbre, combinatoire et géométrie. Je remercie chaleureusement Benoit Fresse de me les avoir fait découvrir, et de tout le temps qu'il a consacré à m'aider à y comprendre quelque chose.

2 La notion d'opérade

Nous présentons ici de manière assez informelle la notion d'opérade, puis explicitons les exemples classiques $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{C}om$ et $\mathcal{L}ie$. Pour des définitions plus précises, nous recommandons [MSS02, LV12].

2.1 Définition

Un type d'algèbre est habituellement caractérisé par la donnée d'opérations élémentaires et de relations sur ces opérations. Par exemple, la structure d'algèbre associative est caractérisée par une opération produit soumise aux relations d'associativité.

Le premier ingrédient d'une opérade (ensembliste) est une famille $\mathcal{O} = (\mathcal{O}(n))_{n \geq 0}$, où $\mathcal{O}(n)$ est l'ensemble de toutes les opérations à n variables qu'il est possible de faire en combinant les opérations élémentaires. Chaque $\mathcal{O}(n)$ doit être muni d'une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, correspondant à la permutation des variables. Par exemple, $\mathcal{A}ss(2)$ a deux éléments, qu'on peut voir comme correspondant aux opérations $(a_1, a_2) \mapsto a_1 \cdot a_2$ et $(a_1, a_2) \mapsto a_2 \cdot a_1$; plus généralement, on a l'égalité $\mathcal{A}ss(n) = \mathfrak{S}_n$, puisque par associativité, pour chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ il existe une unique manière de former le produit $a_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}$.

Nous travaillerons dans un cadre linéaire, et partons donc d'une collection de $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels $\mathcal{O}(n)$ munis d'une action de $\mathfrak{S}_n$; une telle collection est appelée $\mathfrak{S}$ -module (linéaire). (Dans ce cadre $\mathcal{A}ss(n) = \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$). Pour former une opérade (linéaire), un $\mathfrak{S}$ -module $\mathcal{O}$ doit de surcroît être muni d'une unité $\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{O}(1)$, correspondant à l'opération identité³, et d'opérations de composition

$${}_i\circ : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1)$$

satisfaisant des relations de compatibilité avec l'identité ($p \circ_i \text{Id} = p$, $\text{Id}_1 \circ p = p$), d'équivariance et d'associativité, que nous expliciterons (informellement) plus bas.

Exemple prototypique 2.1. L'exemple prototypique d'opérade est, pour V un $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel, la famille $\text{End}(V)$ avec

$$\text{End}(V)(n) = \text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

munie de l'action caractérisée par

$$(f \cdot \sigma)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}). \quad (2)$$

3. On a un élément $\text{Id} \in \mathcal{O}(1)$ correspondant à l'image de $1 \in \mathbf{Q}$ par le morphisme unité $\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{O}(1)$.

La composition est donnée par la composition habituelle des applications multilinéaires : pour $f \in \text{End}(V)(n)$, $g \in \text{End}(V)(m)$ et $1 \leq i \leq n$,

$$f \circ_i g(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+m-1}) = f(v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes g(v_i \otimes \dots \otimes v_{i+m-1}) \otimes v_{i+m} \otimes \dots \otimes v_{n+m-1}).$$

Définition 2.2. Une *algèbre sur l'opérade* $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel V muni d'un morphisme d'opérades $\mathcal{O} \rightarrow \text{End}(V)$ (c'est-à-dire d'une application linéaire envoyant identité sur identité et commutant aux actions des groupes symétriques et aux compositions).

Une algèbre sur $\mathcal{O}$ est donc en particulier un espace vectoriel V où chaque élément de $\mathcal{O}(n)$ est réalisé par une opération multilinéaire à n variables. Une algèbre associative (linéaire) est ainsi une algèbre sur l'opérade $\mathcal{A}ss$.

Revenons aux relations sur les compositions qui caractérisent une opérade. Remarquons qu'on peut représenter toute suite de compositions d'éléments de $\mathcal{O}$ par un arbre enraciné dont les sommets sont étiquetés par des éléments de $\mathcal{O}$ (un sommet à n arêtes entrantes, donc de valence $n + 1$, étant étiqueté par un élément de $\mathcal{O}(n)$), et dont les arêtes entrantes de chaque sommet sont numérotées (figure 2). L'équivariance signifie

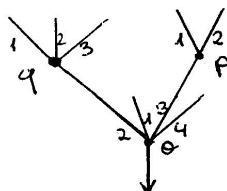


FIGURE 2 – Un arbre représentant la composée $(o_3 \circ p)_2 \circ q$, $o \in \mathcal{O}(4)$, $p \in \mathcal{O}(2)$, $q \in \mathcal{O}(3)$

que si l'on fait agir $\mathfrak{S}_n$ simultanément sur l'étiquette d'un sommet et sur la numérotation des arêtes correspondantes, on ne change pas le résultat. L'associativité signifie que quel que soit l'ordre dans lequel on contracte les arêtes d'un arbre de composition en utilisant les opérations $\circ_i$, on ne change pas le résultat.

2.2 Exemples classiques

2.2.1 L'opérade $\mathcal{Com}$

Le $\mathfrak{S}$ -module sous-jacent est

$$\mathcal{Com}(n) = \mathbf{Q} \text{ pour } n \geq 1$$

et $\mathcal{Com}(0) = 0$, l'action de $\mathfrak{S}_n$ étant triviale, ainsi que la structure de composition.

2.2.2 L'opérade $\mathcal{A}ss$

Le $\mathfrak{S}$ -module sous-jacent est

$$\mathcal{A}ss(n) = \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n] \text{ pour } n \geq 1,$$

représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$, et $\mathcal{A}ss(0) = 0$. On peut représenter les éléments de $\mathcal{A}ss(n)$ par des arbres *planaires* enracinés à un sommet et n feuilles numérotées. L'action à droite de $\mathfrak{S}_n$ est alors obtenue en appliquant σ^{-1} à la numérotation. (La planarité se

réduit ici à un ordre sur les feuilles numérotées, donc un ordre sur les entiers $\{1, \dots, n\}$. La structure de composition, sous la forme d'une application qui associe à un arbre aux sommets étiquetés par des éléments de $\mathcal{O}$ (comme à la figure 2) un élément de $\mathcal{O}$, est alors donnée par les opérations de câblage et de contractions d'arêtes évidentes.

2.2.3 L'opérade $\mathcal{L}ie$

Là encore $\mathcal{L}ie(0) = 0$. Le $\mathfrak{S}_n$ -module $\mathcal{L}ie(n)$ est engendré par les arbres binaires planaires enracinés à n feuilles numérotées, modulo les relations, que l'on peut appliquer à tout sous-arbre, représentées à la figure 3. Comme pour $\mathcal{A}ss$, la structure de composition

FIGURE 3 – Relations d'antisymétrie et de Jacobi pour l'opérade $\mathcal{L}ie$

est donnée par les opérations évidentes de câblage.

3 Opérades cycliques

Nous présentons tout d'abord la notion d'opérade cyclique. La source la plus claire sur la question est encore, nous semble-t-il, l'article original de Getzler et Kapranov [GK95]. Nous renvoyons également à [MSS02, section 5.1]. Nous décrivons ensuite, pour $\mathcal{O}$ une opérade cyclique, le complexe de graphes associé à $\mathcal{O}$, et introduisons la notion de forme bilinéaire invariante sur une $\mathcal{O}$ -algèbre.

3.1 Définition

Une opérade cyclique est une famille de $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels $\mathcal{O} = \mathcal{O}(n)$, où $\mathcal{O}(n)$ est muni d'une action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ (et non plus de $\mathfrak{S}_n$), équipée d'une unité $\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{O}(1)$ et d'opérations de « composition »

$${}_i\circ_j : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m \quad (3)$$

satisfaisant là encore des relations de compatibilité avec l'identité ($p {}_i\circ_j \text{Id} = \text{Id} {}_i\circ_j p = p$), d'équivariance et d'associativité. Explicitons ces conditions comme dans la section précédente. Toute suite de compositions généralisées ${}_i\circ_j$ peut être représentée par un arbre non enraciné dont les sommets sont étiquetés par des éléments de $\mathcal{O}$, et dont les arêtes incidentes à chaque sommet sont numérotées (un sommet de valence n étant étiqueté par un élément de $\mathcal{O}(n - 1)$, et ayant ses arêtes incidentes numérotées de 0 à $n - 1$; figure 4). L'équivariance signifie que si l'on fait agir $\mathfrak{S}_{n+1}$ simultanément sur l'étiquette d'un sommet et sur la numérotation des arêtes qui lui sont incidentes, on ne change pas le résultat; l'associativité signifie que le résultat des compositions représentées ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les effectue. Remarquons qu'on utilise ici des numérotations partant de 0 et qu'on écrit $\mathfrak{S}_{n+1}$ comme groupe des permutations des entiers de 0 à n : c'est pour souligner qu'une opérade cyclique est une opérade munie de structures supplémentaires (une extension de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{O}(n)$ en une action de $\mathfrak{S}_{n+1}$, des opérations de composition additionnelles).

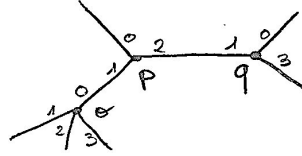


FIGURE 4 – Un arbre représentant $o_0 o_1 (p_2 o_1 q)$, $o \in \mathcal{O}(3)$, $p \in \mathcal{O}(2)$, $q \in \mathcal{O}(2)$

- Exemples 3.1.** 1. L'opérade $\mathcal{Com}$ munie de l'action triviale de $\mathfrak{S}_{n+1}$ sur $\mathcal{Com}(n)$ et des compositions triviales est cyclique.
2. On peut munir $\mathcal{Ass}(n)$ d'une action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ comme suit. Représentons un élément de $\mathcal{Ass}(n)$ par un arbre planaire à un sommet et n feuilles numérotées ; on convient d'assigner à la racine le numéro 0. On fait agir σ sur la numérotation ainsi étendue (l'action étant à droite, i devient $\sigma^{-1}(i)$), puis on choisit la feuille numérotée 0 comme nouvelle racine, en conservant l'ordre cyclique sur les feuilles. Un exemple est traité à la figure 5.

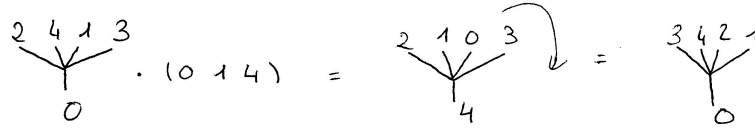


FIGURE 5 – Action d'un élément de S_{4+1} sur un élément de $\mathcal{Ass}(4)$

3. Pour $\mathcal{Lie}(n)$, on part de la représentation d'un élément comme arbre binaire planaire enraciné à n feuilles numérotées, et on procède de manière similaire : on assigne à la racine le numéro 0, puis on renumérote en appliquant σ^{-1} et on désigne la feuille ayant obtenu le numéro 0 comme nouvelle racine. On conserve l'ordre cyclique sur les demi-arêtes incidentes à chaque sommet induit par la planarité. Un exemple est traité à la figure 6. Cette action est bien définie parce qu'elle préserve les sous-

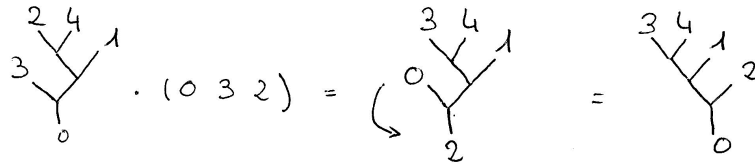


FIGURE 6 – Action d'un élément de S_{4+1} sur un élément de $\mathcal{Lie}(4)$

espaces engendrés par les relations d'antisymétrie et de Jacobi. Il suffit de le vérifier pour les cycles $\tau_2 = (0 \ 1 \ 2)$ et $\tau_3 = (0 \ 1 \ \dots \ 3)$ respectivement. L'antisymétrie est claire ; la vérification pour Jacobi est effectuée à la figure 7.

$$\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \cdot \tau_3 = - \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

FIGURE 7 – Invariance par τ_3 du $\mathfrak{S}$ -module des relations de Jacobi

3.2 Complexes de graphes

Soit $\mathcal{O}$ une opérade cyclique. Nous pouvons construire un complexe de graphes associé à $\mathcal{O}$ comme suit. Soit $\mathcal{G}$ un graphe. Considérons un sommet de valence n de $\mathcal{G}$. Un *étiquetage* par $\mathcal{O}$ de ce sommet est une classe d'équivalence

- d'un élément de $\mathcal{O}(n-1)$
- et d'une numérotation de 0 à $n-1$ des arêtes incidentes à ce sommet

sous l'action simultanée de $\mathfrak{S}_n$. Un *$\mathcal{O}$ -graphe* est un graphe (connexe, à sommets tous de valence ≥ 2) dont les sommets sont ainsi étiquetés par $\mathcal{O}$.

Exemples 3.2. – Un étiquetage par l'opérade *Com* ne contient aucune information.

Un *Com*-graphe est donc un graphe sans structure supplémentaire.

- En utilisant les descriptions de l'opérade *Ass* et de sa structure cyclique données plus haut, on voit qu'un *Ass*-graphe est précisément un graphe en rubans : l'étiquetage d'un sommet se réduit à un ordre cyclique sur les arêtes incidentes à ce sommet.
- Un *Lie*-graphe est un graphe comportant, en chaque sommet, un « schéma de raccordement » des arêtes incidentes à ce sommet sous la forme d'un arbre binaire planaire.

On peut définir une notion d'orientation pour les $\mathcal{O}$ -graphes, que nous n'explicitons pas ici (voir [CV03, section 2]). Le fait que $\mathcal{O}$ soit une opérade cyclique dit précisément que l'on peut définir une opération de contraction d'arête pour les $\mathcal{O}$ -graphes. On peut alors, comme dans l'introduction, introduire un complexe de chaînes $\mathcal{OG}_\bullet$, où $\mathcal{OG}_k$ est le $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel de base les classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}$ -graphes orientés à k sommets et où la différentielle est définie, pour un $\mathcal{O}$ -graphe orienté, comme la somme des résultats de toutes les contractions possibles d'une arête.

3.3 Formes bilinéaires invariantes

Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Cette forme permet une identification

$$\mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V) \cong \mathrm{Hom}(V^{\otimes n+1}, \mathbf{K})$$

qui munit l'espace $\mathrm{End}(V)(n)$ d'une action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ comme en (2) page 4 et fait de $\mathrm{End}(V)$ une opérade cyclique.

Supposons maintenant que V soit muni d'une structure de $\mathcal{O}$ -algèbre, où $\mathcal{O}$ est une opérade cyclique. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dite *invariante* eu égard à la structure de $\mathcal{O}$ -algèbre de V si le morphisme d'opérades $\phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathrm{End}(V)$ caractérisant cette structure est un morphisme d'opérades cycliques. Plus explicitement, cela revient à dire que pour tous $n \geq 0$, $o \in \mathcal{O}(n)$ et $x_0, \dots, x_n \in A$, on a

$$\langle (\phi(o \cdot \tau_n))(x_0, \dots, x_{n-1}), x_n \rangle = \langle \phi(o)(x_1, \dots, x_n), x_0 \rangle, \quad (4)$$

où τ_n est le cycle $(0 \ 1 \ \dots \ n) \in \mathfrak{S}_{n+1}$. Pour $o = \mathrm{Id} \in \mathcal{O}(1)$, on obtient que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ doit être symétrique. Les conditions restantes se réduisent, dans les cas *Ass* et *Lie*, aux formules données dans l'introduction.

4 Des algèbres aux graphes

La construction d'une classe dans l'homologie du complexe de $\mathcal{O}$ -graphes à partir d'une $\mathcal{O}^1$ -algèbre A munie d'une forme bilinéaire invariante procède en deux étapes principales. La première est algébrique ; elle permet, par le biais de la « géométrie symplectique non commutative » de Kontsevich, d'encoder la structure de A en un élément d'une certaine $\mathcal{O}$ -algèbre. La seconde, plus combinatoire, utilise cet élément pour calculer le coefficient à attribuer à chaque $\mathcal{O}$ -graphe dans le cycle à produire. Ces deux étapes sont techniquement complexes et nous ne pouvons donner ici plus de détails ; nous renvoyons à [HL08] pour un traitement très soigneux dans le cas associatif, et à [Mah] ainsi qu'à notre mémoire de M2 pour le cas général.

Nous souhaitons cependant illustrer certaines des idées principales dans le cas associatif, qui est particulièrement simple du fait que l'opérade $\mathcal{A}ss$ est auto-duale.

Soit A une algèbre associative de base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, munie d'une forme invariante non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note

$$c_{ijk} = \langle e_i \cdot e_j, e_k \rangle$$

les constantes de structure de l'algèbre A . Remarquons que par invariance de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ces constantes sont inchangées si l'on permute cycliquement les indices : on a $c_{ijk} = c_{jki}$.

La chaîne que nous voulons construire dans le complexe de graphes en rubans est déterminée par le coefficient dont est affecté chaque graphe. Tout d'abord, tous les graphes possédant un sommet de valence différente de 3 seront affectés du coefficient 0⁴. Soit maintenant un graphe en rubans trivalent. Chaque étiquetage de ses arêtes par des entiers entre 1 et n (taille de la base de A), comme à la figure 8, détermine un produit de constantes de structure comme suit : on fait le produit, pour chaque sommet, de c_{ijk} , où

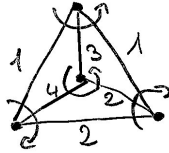


FIGURE 8 – Un graphe en rubans trivalent, aux arêtes étiquetées par des entiers entre 1 et n

i, j, k sont les étiquettes des arêtes incidentes au sommet, dans l'ordre cyclique déterminé par la structure de graphe en rubans. Dans le cas illustré figure 8, on obtient

$$\pm c_{131}c_{142}c_{423}c_{221}$$

le signe étant lié à des questions d'orientation que nous avons passées sous silence. Par invariance cyclique des constantes de structure, ce produit ne dépend que du graphe et de l'étiquetage. Le coefficient affecté au graphe trivalent de la figure 8 est alors la somme de ces produits pour tous les étiquetages possibles des arêtes, en d'autres termes

$$\sum_{1 \leq a, b, c, d, e, f \leq n} \pm c_{abd}c_{acf}c_{ceb}c_{fed},$$

et on peut procéder de même pour tout graphe trivalent en rubans.

4. Le cadre naturel de la construction est en fait celui des algèbres associatives à *homotopie près* (algèbres A_∞) : la chaîne dans le complexe de graphes obtenu à partir d'une telle algèbre comporte potentiellement des graphes ayant des sommets de valence quelconque. Une algèbre strictement associative peut être vue comme un cas particulier d'algèbre A_∞ dont toute la structure d'ordre supérieur est triviale, ce qui explique que la chaîne obtenue semble dégénérée.

Références

- [CV03] James CONANT et Karen VOGTMANN : On a theorem of Kontsevich. *Algebraic and Geometric Topology*, 3:1167–1224, 2003.
- [GK94] Victor GINZBURG et Mikhail KAPRANOV : Koszul duality for operads. *Duke Math. J.*, 76(1):203–272, 1994.
- [GK95] Ezra GETZLER et Mikhail M. KAPRANOV : Cyclic operads and cyclic homology. In S.-T. YAU, éditeur : *Geometry, Topology, and Physics for Raoul Bott*, pages 167–201, Cambridge, États-Unis, 1995. International Press.
- [HL08] Alastair HAMILTON et Andrey LAZAREV : Characteristic classes of A_∞ -algebras. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 3(1):65–111, 2008.
- [HZ86] J. HARER et D. ZAGIER : The Euler characteristic of the moduli space of curves. *Invent. Math.*, 85(3):457–485, 1986.
- [Kon92] Maxim KONTSEVICH : Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.*, 147(1):1–23, 1992.
- [Kon93] Maxim KONTSEVICH : Formal (non)-commutative symplectic geometry. In *The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990–1992*, pages 173–187, Boston, 1993. Birkhäuser.
- [Kon94] Maxim KONTSEVICH : Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress in Mathematics, II*, volume 120 de *Progress in Mathematics*, pages 97–121, Bâle, 1994. Birkhäuser.
- [Lod96] Jean-Louis LODAY : La renaissance des opérades. *Astérisque*, (237):Exp. No. 792, 3, 47–74, 1996. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.
- [LV12] Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE : *Algebraic Operads*, volume 346 de *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.
- [Mah] Swapneel MAHAJAN : Symplectic operad geometry and graph homology. [arXiv:math/0211464v1](https://arxiv.org/abs/math/0211464v1) [math.QA].
- [May72] J. P. MAY : *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271.
- [MSS02] Martin MARKL, Steve SHNIDER et Jim STASHEFF : *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [Pen88] R. C. PENNER : Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces. *J. Differential Geom.*, 27(1):35–53, 1988.

Construction de classes dans le
complexe de graphes associé à une
opérade cyclique

David Waszek

Sous la direction de :

Benoit Fresse (Université Lille-I)

Introduction

Un graphe connexe est dit *en rubans* s'il est muni d'un ordre cyclique sur les arêtes incidentes à chaque sommet. Si, dans un tel graphe, on remplace les sommets par des disques et les arêtes par des bandes recollées sur ces disques, on obtient une surface compacte orientable S . De nombreux graphes donnent lieu à la même surface ; par exemple, si l'on contracte une arête en préservant pour le reste les ordres cycliques, on ne change pas la surface représentée. On peut en fait (en munissant ces graphes d'une orientation dans un sens approprié) construire un complexe de chaînes à partir des graphes représentant une certaine surface S , la différentielle d'un graphe étant donnée par la somme des graphes obtenus par toutes les contractions d'arêtes possibles. Il y a un isomorphisme entre groupes d'homologie de ce complexe et groupes de cohomologie du mapping class group de S (voir [CV03, section 4]). Maxim Kontsevich [Kon93, Kon94] s'est aperçu qu'on pouvait, à partir de la donnée d'une algèbre associative munie d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *invariant*, c'est-à-dire satisfaisant l'égalité

$$\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle$$

construire une classe dans l'homologie du complexe de graphes en rubans, et donc dans la cohomologie du mapping class group ; il s'est également rendu compte que cette construction pouvait se généraliser.

Une *opérade* est, informellement, une structure qui encode un certain type d'algèbres. Il y a ainsi une opérade $\mathcal{A}ss$ telle que les *algèbres sur l'opérade $\mathcal{A}ss$* soient les algèbres associatives ; de même, par exemple, pour les algèbres de Lie ou de Poisson. À toute opérade $\mathcal{O}$ satisfaisant une certaine condition de *cyclicité* (voir section 1.3), on peut associer un complexe de graphes (le cas des graphes en rubans correspond à l'opérade $\mathcal{A}ss$). Si l'opérade $\mathcal{O}$ est de plus *quadratique* (ce qui signifie qu'elle peut être définie par générateurs et relations d'une certaine manière particulièrement simple, voir section 1.2), on peut lui associer une *opérade duale* $\mathcal{O}^!$ (voir section 4.1). On a par exemple $\mathcal{L}ie^! = \mathcal{C}om$ et $\mathcal{A}ss^! = \mathcal{A}ss$. La construction de Kontsevich se généralise alors de la manière suivante : à toute algèbre sur $\mathcal{O}^!$ (ou à toute $\mathcal{O}_\infty^!$ -algèbre, c'est-à-dire algèbre sur $\mathcal{O}^!$ à homotopie près) munie d'une *forme bilinéaire invariante* (section 1.3), on peut associer une classe dans le complexe de graphes associé à $\mathcal{O}$.

Nous commençons, dans la section 1, par définir les notions d'opérade, d'algèbre sur une opérade, d'opérade cyclique, d'algèbre munie d'une forme bilinéaire invariante (cette notion n'a de sens que pour une algèbre sur une opérade cyclique). Nous définissons également le complexe de graphe associé à une opérade cyclique.

Nous développons ensuite, dans la section 2, un certain analogue, pour une opérade *cyclique* $\mathcal{O}$, de la géométrie symplectique classique. Cette « géométrie

symplectique non commutative » a pour but d'étudier les dérivations de la $\mathcal{O}$ -algèbre libre complète $\widehat{\mathcal{O}}(V)$. Elle nous permet de définir la notion de *dérivation symplectique* sur cette algèbre, et de montrer que l'algèbre de Lie de ces dérivations symplectiques admet une description plus simple, de la même manière que dans le cas classique, sur une variété M satisfaisant $H^1(M) = 0$, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs symplectiques est isomorphe à celle des fonctions sur M munies du crochet de Poisson.

L'enjeu de ce résultat est double. D'une part, cette description plus simple permet de faire le lien avec le complexe de graphes (section 3). Il existe en fait une application de l'homologie de cette algèbre de Lie dans l'homologie du complexe de graphes. D'autre part, une structure de $\mathcal{O}^!$ -algèbre (ou de $\mathcal{O}_\infty^!$ -algèbre) sur un espace vectoriel (gradué ou supergradué) de dimension finie U donne lieu à une dérivation sur une certaine $\mathcal{O}$ -algèbre libre complète; et si U est muni d'une forme bilinéaire invariante, la dérivation correspondante est symplectique (section 4). C'est par cet intermédiaire qu'on obtient le résultat annoncé plus haut, qui est notre théorème 4.4.1.

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à Benoit Fresse pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour l'aide inestimable qu'il m'a apportée pour comprendre cette théorie.

Conventions générales

Cadre supergradué

Nous travaillons, sauf mention contraire, dans la catégorie $\mathbf{K}\text{-sgrMod}$ des $\mathbf{K}$ -modules supergradués (c'est-à-dire $\mathbf{Z}_2$ -gradués) $V = V_0 \oplus V_1$, où $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique nulle. Nous noterons $|v|$ le degré de $v \in V$.

L'inversion de parité de $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$ est le module supergradué ΠV tel que $(\Pi V)_0 = V_1$ et $(\Pi V)_1 = V_0$.

Nous noterons le dual linéaire de $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$ par $V^\vee$; il s'agit du module supergradué tel que

$$(V^\vee)_i = \text{Hom}_{\mathbf{K}\text{-Mod}}(V_i, \mathbf{K}) \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

Le corps de base $\mathbf{K}$ est considéré comme un espace supergradué pair, c'est-à-dire concentré en degré 0. Par *forme bilinéaire* sur $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$, nous entendons une application *paire* (i.e. de degré 0)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \otimes V \rightarrow \mathbf{K},$$

ce qui implique $\langle u, v \rangle = 0$ si u et v sont homogènes de degrés différents. Nous dirons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \circ \tau = \langle \cdot, \cdot \rangle \quad (\text{resp. } -\langle \cdot, \cdot \rangle),$$

où τ est la permutation graduée des facteurs

$$\begin{aligned} \tau : V \otimes V &\rightarrow V \otimes V \\ v \otimes w &\mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v. \end{aligned}$$

Une forme bilinéaire symétrique dans cette terminologie est ainsi symétrique en degré pair et antisymétrique en degré impair.

Complétions

Soit V un module supergradué muni de surcroît d'une $\mathbf{N}$ -gradation *par ordre*

$$V = \bigoplus_{i \geq 0} V_i.$$

On peut définir sa *complétion*

$$\widehat{V} = \prod_{i \geq 0} V_i.$$

Pour des raisons de commodité, nous noterons les éléments de $\widehat{V}$

$$v = v_0 + v_1 + \dots \quad \text{où } v_i \in V_i$$

plutôt que

$$v = (v_0, v_1, \dots).$$

Cette notation est justifiée par le fait que l'on peut munir $\widehat{V}$ d'une topologie pour laquelle les séries de cette forme sont convergentes, de limite v (nous renvoyons à un cours d'algèbre commutative, par exemple [AM69, chap. 10]). Nous dirons qu'un morphisme $\widehat{V} \rightarrow \widehat{V}$ est *continu* s'il l'est par rapport à cette topologie. Nous dirons qu'une famille (infinie) d'éléments est une *base topologique* de $\widehat{V}$ s'il est possible d'écrire tout élément de $\widehat{V}$ comme combinaison linéaire infinie au sens précédent d'éléments de cette famille. Nous parlerons de même de famille génératrice topologique.

Actions de $\mathfrak{S}_n$

Nous notons $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Soit M un K -module muni d'une action à droite de $\mathfrak{S}_n$; on peut le munir d'une action à gauche en posant $\sigma \cdot m = m \cdot \sigma^{-1}$, et réciproquement en posant $m \cdot \sigma = \sigma^{-1} \cdot m$.

Explicitons les actions classiques de $\mathfrak{S}_n$ auxquelles nous aurons affaire de manière récurrente.

Soit V un espace vectoriel. On peut munir $V^{\otimes n}$ d'une action à droite par

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) \cdot \sigma = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Il s'agit bien d'une action à droite : elle déplace le facteur en position i à la position $\sigma^{-1}(i)$. L'action à gauche correspondante est bien sûr obtenue en remplaçant σ par σ^{-1} .

Soit X un ensemble fini de cardinal n . On note

$$\text{Num}(X) = \{\text{bijections } f : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} X\}$$

l'ensemble des numérotations des éléments de X par les entiers de 1 à n . L'ensemble $\text{Num}(X)$ est muni d'une action à gauche de $\mathfrak{S}_n$ obtenue en appliquant σ à la numérotation (l'élément numéroté i prend le numéro $\sigma(i)$), et d'une action à droite obtenue en lui appliquant σ^{-1} . Formellement, $\sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1}$ et $f \cdot \sigma = f \circ \sigma$. Le $\mathbf{K}$ -module libre (de degré 0) sur cet ensemble, $\mathbf{K} \text{Num}(X)$, hérite ainsi d'actions de $\mathfrak{S}_n$.

Si M est muni d'une action de $\mathfrak{S}_n$ à droite, on peut munir $M^\vee$ d'une action de $\mathfrak{S}_n$ à droite par l'égalité $(f \cdot \sigma)(m) = f(m \cdot \sigma)$.

Invariants, coinvariants

Soit M muni d'une action à droite de $\mathfrak{S}_n$. On peut former le module des $\mathfrak{S}_n$ -invariants

$$M^{\mathfrak{S}_n} = \{m \in M \mid m \cdot \sigma = m \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

et le module des $\mathfrak{S}_n$ -coinvariants

$$M_{\mathfrak{S}_n} = M / \langle m \cdot \sigma - m, m \in M, \sigma \in \mathfrak{S}_n \rangle.$$

Il y a un isomorphisme

$$M^{\mathfrak{S}_n} \xrightarrow{\cong} M_{\mathfrak{S}_n}$$

induit par la projection $M \twoheadrightarrow M_{\mathfrak{S}_n}$; en effet, on a une application réciproque $M_{\mathfrak{S}_n} \rightarrow M^{\mathfrak{S}_n}$ donnée par

$$\overline{m} \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} m \cdot \sigma.$$

De plus, on a un isomorphisme

$$(M_{\mathfrak{S}_n})^\vee \cong (M^\vee)^{\mathfrak{S}_n}$$

dans la mesure où pour $f \in M^\vee$,

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, f \cdot \sigma = f &\Leftrightarrow \forall m \in M, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, f(m \cdot \sigma) = f(m) \\ &\Leftrightarrow f \text{ factorise par } M_{\mathfrak{S}_n}. \end{aligned}$$

Soit maintenant M muni d'une action à droite de $\mathfrak{S}_n$ et N muni d'une action à gauche de $\mathfrak{S}_n$. On peut former le produit tensoriel au-dessus de $\mathfrak{S}_n$

$$M \otimes_{\mathfrak{S}_n} N = M \otimes_{\mathbf{K}} N / \langle m \cdot \sigma \otimes n - m \otimes \sigma \cdot n, m \in M, n \in N, \sigma \in \mathfrak{S}_n \rangle.$$

On a la relation

$$M \otimes_{\mathfrak{S}_n} N = (M \otimes N)_{\mathfrak{S}_n}$$

où $M \otimes N$ est muni de l'action *diagonale* à droite de $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire $(m \otimes n) \cdot \sigma = m \cdot \sigma \otimes n \cdot \sigma$, avec $n \cdot \sigma = \sigma^{-1} \cdot n$ comme ci-dessus.

Arbres et graphes

Pour nous, arbres et graphes seront caractérisés par la donnée :

- d'un ensemble de *sommets* S ;
- d'un ensemble de *demi-arêtes* D et pour chaque sommet $s \in S$, d'un ensemble $\text{Inc}(s) \subseteq D$ formé des *demi-arêtes incidentes* à s , ces $\text{Inc}(s)$ étant deux à deux disjoints;
- d'un ensemble d'*arêtes* A , et pour chaque $a \in A$, d'une paire $\text{Demi}(a) \subseteq D$ formée des *moitiés* de a , ces $\text{Demi}(a)$ étant deux à deux disjointes.

Les demi-arêtes qui ne sont pas les moitiés d'une arête sont appelées des *feuilles*. La *valence* d'un sommet s est $|\text{Inc}(s)|$.

L'*arbre trivial* est obtenu lorsqu'il n'y a ni sommets ni arêtes, et une unique demi-arête. Dans tous les autres cas, nous exigeons que toutes les demi-arêtes

soient incidentes à un sommet, c'est-à-dire que $S = \bigsqcup_{s \in S} \text{Inc}(s)$. Les *extrémités* d'une arête sont les sommets correspondant aux demi-arêtes qui la composent. Nous parlerons alors de *graphe* s'il n'y a pas de feuilles, et d'*arbre* si le CW-complexe obtenu en considérant les sommets comme des 0-cellules, les arêtes comme des 1-cellules recollées sur leurs extrémités et en ignorant les feuilles, est connexe et acyclique.

Dans cette description, un morphisme d'arbres ou de graphes $f : E \rightarrow E'$ est obtenu comme un triplet d'applications $f_S : S_E \rightarrow S_{E'}$, $f_D : D_E \rightarrow D_{E'}$ et $f_A : A_E \rightarrow A_{E'}$ tel que $f_D(\text{Inc}(s)) \subseteq \text{Inc}(f_S(s))$ pour tout $s \in S$ et $f_D(\text{Demi}(a)) = \text{Demi}(f_A(a))$ pour toute $a \in A$. On dit que f est un isomorphisme si f_S , f_D et f_A sont des bijections.

Une orientation d'une arête $a \in A$ est un ordre sur $\text{Demi}(a)$; parmi les sommets extrémités de a , on peut alors parler d'une *origine* et d'un *but*. Un *arbre enraciné* est un arbre dont on a distingué une feuille, la *racine*. Le choix d'une racine détermine des orientations sur toutes les arêtes de l'arbre, telles que le sommet correspondant à la racine n'est origine d'aucune arête et que tous les autres sommets sont origines d'une unique arête. Cette règle distingue, pour chaque sommet, une demi-arête exceptionnelle $d \in \text{Inc}(s)$, la demi-arête *sortante* (la racine étant sortante); on note alors $\text{Ent}(s) = \text{Inc}(s) \setminus \{d\}$ l'ensemble des demi-arêtes *entrantes* de s . Toute feuille, à l'exception de la racine, est alors entrante; on note $\text{Ent}(T)$ l'ensemble des *feuilles entrantes* de l'arbre T . Le cas de l'arbre trivial est à nouveau exceptionnel; nous considérons son unique feuille (la racine) comme à la fois entrante et sortante.

Table des matières

1	Opérades, opérades cycliques et complexes de graphes	7
1.1	Opérades, algèbres sur une opérade	7
1.2	Exemples classiques et opérades quadratiques	11
1.3	Opérades cycliques	12
1.4	Complexes de graphes	15
2	Géométrie symplectique non commutative	17
2.1	Cas classique	17
2.2	Cas formel et supergradué	19
2.3	Champs de vecteurs et formes différentielles non commutatives	20
2.4	Foncteur de Kontsevich et $\mathrm{DR}_{\mathcal{O}}$	21
2.5	Théorie symplectique	24
3	Description algébrique de l'homologie de graphe	27
3.1	Complexe de Chevalley-Eilenberg	27
3.2	Le morphisme $\psi_{2n m} : \Lambda^{\bullet} \mathcal{LO}_{2n m} \rightarrow \mathcal{OG}_{\bullet}$	28
3.3	Énoncé du théorème de Kontsevich	29
4	Algèbres à homotopie près et construction de classes	30
4.1	Dualité de Koszul pour une opérade quadratique	30
4.2	Algèbres sur $\mathcal{O}$ à homotopie près	31
4.3	Algèbres à homotopie près invariantes et champs de vecteurs symplectiques	32
4.4	Construction de classes dans le complexe de graphes	34
	Bibliographie	35

Section 1

Opérades, opérades cycliques et complexes de graphes

En suivant l'article original de Getzler et Kapranov [GK95], nous commençons par reprendre la définition d'une opérade en la formulant en termes combinatoires, au moyen d'arbres enracinés; cette définition se généralise ensuite aisément, en considérant cette fois des arbres non enracinés, pour donner lieu à la notion d'opérade *cyclique*. Nous donnons quelques exemples classiques et construisons enfin, pour toute opérade cyclique, un *complexe de graphes* associé.

La notion de base sur laquelle reposent nos définitions ultérieures est celle de $\mathfrak{S}$ -module.

Définition 1.0.1. Un $\mathfrak{S}$ -module (dans $\mathbf{K}\text{-sgrMod}$) est une famille

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}(n))_{n \geq 0}$$

d'espaces vectoriels supergradués $\mathcal{M}(n)$ munis d'une action à droite de $\mathfrak{S}_n$. Un morphisme de $\mathfrak{S}$ -modules $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est une famille d'applications $f_n : \mathcal{M}(n) \rightarrow \mathcal{N}(n)$ commutant à l'action de $\mathfrak{S}_n$.

Nous dénotons la catégorie des $\mathfrak{S}$ -modules par $\mathfrak{S}\text{-Mod}$.

1.1 Opérades, algèbres sur une opérade

Plusieurs définitions de la notion d'opérade existent. L'une de celles que l'on rencontre le plus fréquemment est qu'une opérade est un $\mathfrak{S}$ -module $\mathcal{O}$ muni d'une unité $\mathbf{K} \rightarrow \mathcal{O}(1)$ et d'opérations de composition

$${}_i\circ : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n+m-1) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \quad (1.1)$$

ces compositions satisfaisant certaines relations d'équivariance par rapport à l'action de $\mathfrak{S}_n$, d'associativité (l'ordre dans lequel on fait une suite de compositions n'a pas d'importance) et d'unité (l'unité opéradique se comporte comme une identité pour la composition). Pour plus de détails, nous renvoyons à [LV12, chap. 5].

Exemple prototypique 1.1.1. L'exemple prototypique en est, pour $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$, la famille $\text{End}(V)$ avec

$$\text{End}(V)(n) = \text{Hom}_{\mathbf{K}\text{-sgrMod}}(V^{\otimes n}, V)$$

munie de l'action caractérisée par

$$(f \cdot \sigma)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}) \quad (1.2)$$

c'est-à-dire $f \cdot \sigma = f \circ \sigma_*$ où σ_* désigne l'action à droite de σ sur $V^{\otimes n}$. La composition est donnée par la composition habituelle des applications multilinéaires : pour $f \in \text{End}(n), g \in \text{End}(m)$ et $1 \leq i \leq n$,

$$g \circ f(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+m-1}) = f(v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes g(v_i \otimes \dots \otimes v_{i+m-1}) \otimes v_{i+m} \otimes \dots \otimes v_{n+m-1}).$$

1.1.1 Motivation de la construction

Nous allons reformuler cette définition en partant du constat suivant. On peut représenter toute suite de compositions d'éléments de $\mathcal{O}$ par un arbre enraciné dont les sommets sont étiquetés par des éléments de $\mathcal{O}$, et dont les demi-arêtes entrantes de chaque sommet sont numérotées ; l'arbre de la figure 1.1 p. 8 représente ainsi la composition $(o \circ_3 p) \circ_2 q$, avec $o \in \mathcal{O}(4), p \in \mathcal{O}(2), q \in \mathcal{O}(3)$. L'équivariance signifie que si l'on fait agir $\mathfrak{S}_n$ simultanément sur l'étiquette d'un

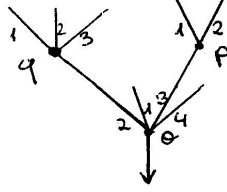


FIGURE 1.1 – Un arbre représentant la composée $(o \circ_3 p) \circ_2 q$

sommet et sur la numérotation des demi-arêtes correspondantes, on ne change pas le résultat ; on peut donc se limiter à considérer des classes d'équivalence d'arbres par rapport à cette action.

L'idée est alors de définir une opérade comme un $\mathfrak{S}$ -module $\mathcal{M}$ muni d'une application associant un élément de $\mathcal{M}$ à chaque classe d'équivalence d'arbres étiquetés par $\mathcal{M}$. Pour garantir la cohérence et l'associativité des produits de composition obtenus, il nous faut pouvoir appliquer notre opération de réduction d'abord à un sous-arbre, puis à l'arbre obtenu en remplaçant le sous-arbre par l'élément résultant, et exiger qu'on obtienne le même résultat quel que soit le sous-arbre choisi. Pour pouvoir réaliser cette opération sans perdre la trace de la manière dont le sous-arbre était raccordé au reste de l'arbre, il nous faudra considérer des arbres étiquetés dont de surcroît *les feuilles entrantes sont numérotées*.

1.1.2 Définition formelle

Nous avons besoin d'associer des numérotations d'arêtes à des éléments d'opérade de manière $\mathfrak{S}_n$ -équivariante. Nous introduisons dans ce but la notation suivante, pour $\mathcal{M}$ un $\mathfrak{S}$ -module et X un ensemble de cardinal n :

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} \mathbf{K} \text{Num}(X).$$

Nous définissons maintenant le $\mathfrak{S}$ -module des arbres étiquetés par $\mathcal{M}$:

$$\mathbb{T}(\mathcal{M})(n) = \bigoplus_{\substack{T \in \{\text{arbres enracinés}\} / \cong \\ |\text{Ent}(T)|=n}} \left(\mathbf{K} \text{Num}(\text{Ent}(T)) \otimes \bigotimes_{s \in S_T} \mathcal{M}(\text{Ent}(s)) \right),$$

la structure symétrique étant donnée par l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur la numérotation des feuilles entrantes. Cela définit un foncteur $\mathbb{T} : \mathfrak{S}\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{S}\text{-Mod}$. Remarquons que l'arbre trivial donne lieu à un facteur direct $\mathbf{K}$ dans $\mathbb{T}(\mathcal{M})(1)$.

Nous disposons de transformations naturelles $\iota : \text{Id}_{\mathfrak{S}\text{-Mod}} \rightarrow \mathbb{T}$ et $\alpha : \mathbb{T} \circ \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, illustrées figure 1.2 (page 9). La première transforme un élément du $\mathfrak{S}$ -module de départ en arbre à un seul sommet et n feuilles entrantes (la numérotation des feuilles de l'arbre correspondant à celle des arêtes entrantes de l'unique sommet) ; la seconde procède par greffage, en raccordant la feuille numérotée i de l'arbre à greffer à la demi-arête entrante numérotée i du sommet que l'on remplace.

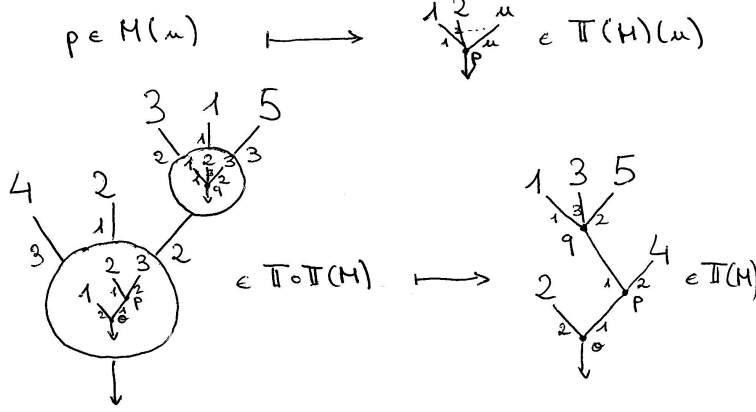


FIGURE 1.2 – Transformations naturelles $\iota : \text{Id}_{\mathfrak{S}\text{-Mod}} \rightarrow \mathbb{T}$ et $\alpha : \mathbb{T} \circ \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$

Nous pouvons maintenant définir une opérade.

Définition 1.1.2. Une *opérade* (dans $\mathbf{K}\text{-sgrMod}$) est un $\mathfrak{S}$ -module $\mathcal{O}$ muni d'un morphisme de $\mathfrak{S}$ -modules $\lambda : \mathbb{T}\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ tel que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \circ \mathbb{T}(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\mathbb{T}(\lambda)} & \mathbb{T}(\mathcal{O}) \\ \alpha_{\mathcal{O}} \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathbb{T}(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{O} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{O}}} & \mathbb{T}(\mathcal{O}) \\ \parallel & \swarrow \lambda & \\ \mathcal{O} & & \end{array}$$

Un *morphisme d'opérades* est un morphisme de $\mathfrak{S}$ -modules $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}\mathcal{O} & \xrightarrow{\mathbb{T}(f)} & \mathbb{T}\mathcal{O}' \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ \mathcal{O} & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}' \end{array}$$

commute.

La construction de $\lambda : \mathbb{T}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}$ pour une opérade définie par la donnée de compositions du type (1.1) est claire : on applique les opérations $\circ_i$ pour contracter les arêtes jusqu'à se retrouver avec un arbre à un seul sommet s et n feuilles. On choisit une étiquette $o \in \mathcal{O}(n)$ de l'unique sommet et une numérotation $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \text{Inc}(s)$ des demi-arêtes incidentes à s ; ces demi-arêtes étant également les feuilles de l'arbre, elles sont munies d'une seconde numérotation $g : \{1, \dots, n\} \rightarrow \text{Inc}(s)$. Le résultat de la réduction complète de l'arbre est alors $o \cdot (f^{-1} \circ g)$.

Remarque 1.1.3. Les transformations naturelles α et ι font commuter les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{T} \circ \mathbb{T} \circ \mathbb{T}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\mathbb{T}(\alpha_{\mathcal{M}})} & \mathbb{T} \circ \mathbb{T}(\mathcal{M}) & \xleftarrow{\iota_{\mathbb{T}(\mathcal{M})}} & \mathbb{T}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\mathbb{T}(\iota_{\mathcal{M}})} & \mathbb{T} \circ \mathbb{T}(\mathcal{M}) \\
 \downarrow \alpha_{\mathbb{T}(\mathcal{M})} & & \downarrow \alpha_{\mathcal{M}} & & \parallel & & \\
 \mathbb{T} \circ \mathbb{T}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{M}}} & \mathbb{T}(\mathcal{M}) & & \mathbb{T}(\mathcal{M}) & & \\
 & & & \swarrow \alpha_{\mathcal{M}} & & \nwarrow \alpha_{\mathcal{M}} & \\
 & & & \mathbb{T}(\mathcal{M}) & & &
 \end{array}$$

pour tout $\mathcal{M} \in \mathfrak{S}\text{-Mod}$. Cela fait du foncteur $\mathbb{T}$ équipé des transformations naturelles α et ι une *monade* dans $\mathfrak{S}\text{-Mod}$; une opérade telle que définie ci-dessus est alors précisément une *algèbre sur la monade* $\mathbb{T}$. Nous renvoyons par exemple à [ML98, chap. 6]. De plus, ces diagrammes garantissent que, pour tout $\mathcal{M} \in \mathfrak{S}\text{-Mod}$, le $\mathfrak{S}$ -module $\mathbb{T}(\mathcal{M})$ muni de

$$\alpha_{\mathcal{M}} : \mathbb{T} \circ \mathbb{T}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{M})$$

forme une opérade. On peut montrer que cet objet est libre dans la catégorie des opérades ; c'est l'*opérade libre* sur $\mathcal{M}$.

1.1.3 Algèbre sur une opérade

Nous introduisons pour finir la notion d'*algèbre* sur une opérade.

Définition 1.1.4. Soit $\mathcal{O}$ une opérade dans $\mathbf{K}\text{-sgrMod}$. Une *algèbre* sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel supergradué A muni d'un morphisme d'opérades $\mathcal{O} \rightarrow \text{End}(A)$.

Introduisons la notation, pour $\mathcal{M}$ un $\mathfrak{S}$ -module et $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$,

$$\mathcal{M}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{M}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}.$$

Une algèbre A sur $\mathcal{O}$ est entièrement caractérisée par un morphisme

$$\gamma_A : \mathcal{O}(A) \rightarrow A,$$

et réciproquement un tel morphisme définit une structure de $\mathcal{O}$ -algèbres s'il satisfait certaines conditions de cohérence vis-à-vis de la composition et de l'unité de $\mathcal{O}$, cf. [LV12, 5.2].

Il est usuel de noter $\gamma_A(o \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n)$ par $o(a_1, \dots, a_n)$. Si $a_1, \dots, a_n$ sont homogènes et que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$o(a_1, \dots, a_n) = \pm (o \cdot \sigma)(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}).$$

Notons que si $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$, $\mathcal{O}(V)$ est muni d'une structure d'algèbre sur $\mathcal{O}$. C'est la *$\mathcal{O}$ -algèbre libre* sur V . Nous renvoyons encore une fois à [LV12, 5.2].

1.2 Exemples classiques et opérades quadratiques

Nous introduisons maintenant les trois exemples classiques $\mathcal{Com}$, $\mathcal{Ass}$ et $\mathcal{Lie}$, les algèbres sur ces opérades étant respectivement les algèbres (non unitaires) commutatives, associatives et de Lie. Ces définitions sont là pour servir de rappel et pour introduire les descriptions de ces opérades que nous utiliserons ; pour un traitement détaillé, nous renvoyons à [LV12]. Nous définissons enfin la classe des opérades *quadratiques*, pour lesquelles la théorie que nous développerons plus bas fonctionne.

Les trois opérades suivantes sont concentrées en degré 0. Dans les trois cas, $\mathcal{O}(0) = 0$. Il existe également des variantes unitaires $\mathcal{Com}_+$ et $\mathcal{Ass}_+$ des opérades associatives et commutatives, encodant les structures d'algèbres commutatives ou associatives unitaires. On les obtient comme ci-dessous à la seule différence qu'on pose $\mathcal{O}_+(0) = \mathbf{K}$.

1.2.1 L'opérade $\mathcal{Com}$

Le $\mathfrak{S}$ -module sous-jacent est

$$\mathcal{Com}(n) = \mathbf{K} \text{ pour } n \geq 1$$

et $\mathcal{Com}(0) = 0$, l'action de $\mathfrak{S}_n$ étant triviale. La structure de composition se déduit des isomorphismes $\mathbf{K}^{\otimes n} \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}$.

1.2.2 L'opérade $\mathcal{Ass}$

Le $\mathfrak{S}$ -module sous-jacent est

$$\mathcal{Ass}(n) = \mathbf{K}[\mathfrak{S}_n] \text{ pour } n \geq 1,$$

représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$, et $\mathcal{Ass}(0) = 0$. On peut représenter les éléments de $\mathcal{Ass}(n)$ par des arbres *planaires* enracinés à un sommet et n feuilles numérotées. L'action à droite de $\mathfrak{S}_n$ est alors obtenue en appliquant σ^{-1} à la numérotation. La planarité se réduit dans ce cadre à un ordre sur les feuilles, donc un ordre sur les feuilles numérotées $\{1, \dots, n\}$. La structure de composition, sous la forme d'un morphisme $\mathbb{T}\mathcal{Ass} \rightarrow \mathcal{Ass}$, est donnée par les opérations de câblage évidentes.

1.2.3 L'opérade $\mathcal{Lie}$

Là encore $\mathcal{Lie}(0) = 0$. Le $\mathfrak{S}_n$ -module $\mathcal{Lie}(n)$ est engendré par les arbres binaires planaires enracinés à n feuilles numérotées, modulo le sous- $\mathfrak{S}$ -module engendré par les relations (valables pour tout sous-arbre) représentées à la figure 1.3. Nous préciserons et formaliserons cette construction dans le prochain paragraphe. Là encore, la structure de composition est donnée par les opérations évidentes de câblage.

1.2.4 Opérades quadratiques

On peut définir une opérade par générateurs et relations. Tout d'abord, il existe une notion adaptée d'*idéal opéradique*.

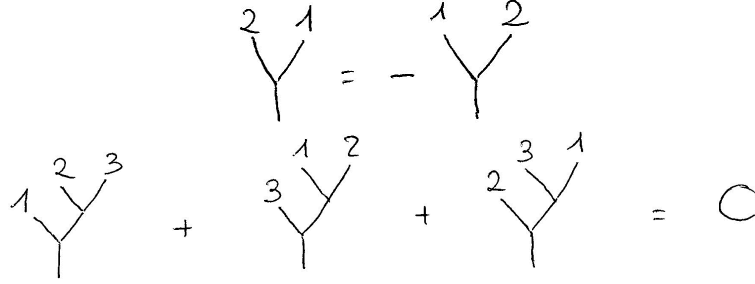


FIGURE 1.3 – Relations d'antisymétrie et de Jacobi pour l'opérade $\mathcal{L}ie$

Définition 1.2.1. Soit $\mathcal{O}$ une opérade, et soit $\mathcal{R}$ un sous- $\mathfrak{S}$ -module de $\mathcal{O}$. L'idéal opéradique $(\mathcal{R})$ engendré par $\mathcal{R}$ est l'image par $\mathbb{T}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}$ des arbres dont au moins un sommet est étiqueté par un élément de $\mathcal{R}$.

Par définition $(\mathcal{R})$ est stable par composition; le quotient $\mathcal{O}/(\mathcal{R})$ hérite donc d'une structure d'opérade. Si l'on se donne un $\mathfrak{S}$ -module $\mathcal{M}$ d'opérations génératrices et un sous- $\mathfrak{S}$ -module $\mathcal{R} \subset \mathbb{T}(\mathcal{M})$ de relations, on peut ainsi définir l'opérade quotient

$$\mathbb{T}(\mathcal{M})/(\mathcal{R}).$$

Les opérades quadratiques correspondent au cas particulier où les relations ne sont autorisées à porter que sur des composées de deux opérations génératrices. On introduit le sous- $\mathfrak{S}$ -module $\mathbb{T}(\mathcal{M})^{(2)}$ de $\mathbb{T}(\mathcal{M})$ engendré par les arbres étiquetés ayant deux sommets.

Définition 1.2.2. Une opérade est dite *quadratique* si elle peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{T}(\mathcal{M})/(\mathcal{R})$$

pour un $\mathfrak{S}$ -module $\mathcal{M}$ et un sous- $\mathfrak{S}$ -module $\mathcal{R} \subset \mathbb{T}(\mathcal{M})^{(2)}$.

Exemples 1.2.3. Les trois opérades Com , Ass et $\mathcal{L}ie$ décrites ci-dessus peuvent se mettre sous cette forme. Le $\mathfrak{S}$ -module de générateurs est dans chaque cas concentré en arité 2 (i.e. $\mathcal{M}(n) = 0$ pour $n \neq 2$); il s'agit respectivement la représentation triviale, la représentation régulière et la représentation de signe de $\mathfrak{S}_2$. On a dans les deux premiers cas des relations d'associativité et dans le troisième les relations de Jacobi.

1.3 Opérades cycliques

La notion d'opérade cyclique est obtenue en considérant des arbres non enracinés dans la définition ci-dessus. Remarquons d'emblée que tout arbre non enraciné étiqueté peut être transformé en arbre enraciné étiqueté; en effet, il suffit de choisir une racine, puis, en supposant que l'on a numéroté les demi-arêtes incidentes à chaque sommet s par les entiers de 0 à $Inc(s) - 1$, d'utiliser l'équivariance pour numéroté par 0 toutes les demi-arêtes sortantes. On voit ainsi qu'une opérade cyclique est en particulier une opérade. C'est la raison pour laquelle on introduit la variante notationnelle suivante.

Définition 1.3.1. Un $\mathfrak{S}_+$ -module (dans $\mathbf{K}\text{-sgrMod}$), ou $\mathfrak{S}$ -module *cyclique*, est une famille $\mathcal{M} = (\mathcal{M}(n))_{n \geq 0}$ d'espaces vectoriels supergradués $\mathcal{M}(n)$ munis d'une action à droite de $\mathfrak{S}_{n+1}$ vu comme groupe des permutations de l'ensemble $\{0, \dots, n\}$. Un morphisme de $\mathfrak{S}$ -modules $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est une famille d'applications $f_n : \mathcal{M}(n) \rightarrow \mathcal{N}(n)$ commutant à l'action de $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Ainsi, un $\mathfrak{S}_+$ module peut être défini comme un $\mathfrak{S}$ -module muni d'une structure supplémentaire, caractérisée par une action du cycle $(0 \dots n)$ étendant l'action de $\mathfrak{S}_n = \text{Perm}(\{1, \dots, n\})$ en une action de $\mathfrak{S}_{n+1} = \text{Perm}(\{0, \dots, n\})$. On dénote la catégorie des $\mathfrak{S}_+$ -modules par $\mathfrak{S}_+\text{-Mod}$; c'est une sous-catégorie (non pleine) de $\mathfrak{S}\text{-Mod}$.

On reprend alors la définition de la section précédente en définissant, pour X un ensemble de cardinal $n + 1$ et $\mathcal{M}$ un $\mathfrak{S}$ -module cyclique,

$$\mathcal{M}((X)) = \mathcal{M}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_{n+1}} \mathbf{K} \text{Num}(X)$$

puis

$$\mathbb{T}_+ \mathcal{M}(n) = \bigoplus_{\substack{T \in \{\text{arbres}\} / \cong \\ |\text{Feuilles}(T)| = n+1}} \left(\mathbf{K} \text{Num}(\text{Feuilles}(T)) \otimes \bigotimes_{s \in S_T} \mathcal{M}((\text{Inc}(s))) \right).$$

On définit ainsi un foncteur $\mathbb{T}_+ : \mathfrak{S}_+\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{S}_+\text{-Mod}$. On dispose exactement comme dans le cas non cyclique de transformations naturelles $\alpha_+ : \mathbb{T}_+ \circ \mathbb{T}_+ \rightarrow \mathbb{T}_+$ et $\iota_+ : \text{Id}_{\mathfrak{S}_+\text{-Mod}} \rightarrow \mathbb{T}_+$, qui vérifient les diagrammes de la remarque 1.1.3 page 10 et font donc de $\mathbb{T}_+$ une monade dans $\mathfrak{S}_+\text{-Mod}$.

Définition 1.3.2. Une *opérade cyclique* (dans $\mathbf{K}\text{-sgrMod}$) est un $\mathfrak{S}_+$ -module $\mathcal{O}$ muni d'un morphisme de $\lambda : \mathbb{T}_+(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ tel que les diagrammes analogues de ceux de la définition 1.1.2 page 9 commutent.

En d'autres termes, une opérade cyclique est une algèbre sur la monade $\mathbb{T}_+$.

Nous donnons la caractérisation suivante. Nous renvoyons à [MSS02, 5.1] pour une preuve.

Proposition 1.3.3. Soit $\mathcal{O}$ une opérade munie d'une structure de $\mathfrak{S}_+$ -module, décrite par une action de $\tau_n = (0 \ 1 \dots n)$ sur $\mathcal{O}(n)$ pour tout $n \geq 1$. L'opérade $\mathcal{O}$ est cyclique si et seulement si on a les relations, pour $p \in \mathcal{O}(n)$, $q \in \mathcal{O}(m)$,

- (1) $1 \cdot \tau_1 = 1$ où $1 \in \mathcal{O}(1)$ désigne l'unité opéradique ;
- (2) $(p \circ_1 q) \cdot \tau_{n+m-1} = (-1)^{|p||q|} (q \cdot \tau_m) \circ_m (p \cdot \tau_n) ;$
- (3) $(p \circ_i q) \cdot \tau_{n+m-1} = (p \cdot \tau_n) \circ_{i-1} q$ pour $2 \leq i \leq n$.

Exemples 1.3.4. 1. L'opérade *Com* munie de la structure triviale de $\mathfrak{S}_+$ -module est cyclique.

2. On peut munir $\mathcal{A}ss(n)$ d'une action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ comme suit. Représentons un élément de $\mathcal{A}ss(n)$ par un arbre planaire à un sommet et n feuilles numérotées; on convient d'assigner à la racine le numéro 0. On fait agir σ sur la numérotation ainsi étendue (l'action étant à droite, i devient $\sigma^{-1}(i)$), puis on choisit la feuille numérotée 0 comme nouvelle racine, en conservant l'ordre cyclique sur les feuilles. Un exemple est traité à la figure 1.4. La lectrice peut vérifier que cette action correspond à la formule donnée dans [GK95].

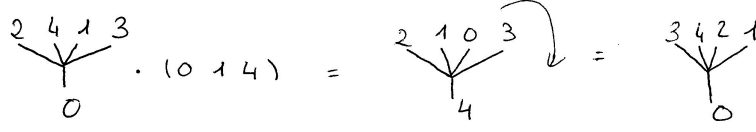


FIGURE 1.4 – Action d'un élément de S_{4+1} sur un élément de $\mathcal{Ass}(4)$

3. Pour $\mathcal{Lie}(n)$, on part de la représentation d'un élément comme arbre binaire planaire enraciné à n feuilles numérotées, et on procède de manière similaire : on assigne à la racine le numéro 0, puis on renumérote et on désigne la feuille ayant obtenu le numéro 0 comme nouvelle racine. On conserve l'ordre cyclique sur les demi-arêtes incidentes à chaque sommet induit par la planarité. Un exemple est traité à la figure 1.5. Cette action

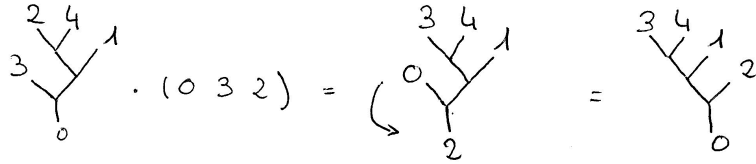


FIGURE 1.5 – Action d'un élément de S_{4+1} sur un élément de $\mathcal{Lie}(4)$

est bien définie parce qu'elle préserve les sous-espaces engendrés par les relations d'antisymétrie et de Jacobi. Il suffit de le vérifier pour les cycles τ_2 et τ_3 respectivement. L'antisymétrie est claire ; la vérification pour Jacobi est effectuée à la figure 1.6.

$$\left(\begin{array}{c} 2 \ 4 \\ \diagup \ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \ 4 \\ \diagup \ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \ 3 \\ \diagup \ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \right) \cdot \tau_3 = - \left(\begin{array}{c} 3 \ 4 \\ \diagup \ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \ 3 \\ \diagup \ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \ 2 \\ \diagup \ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \right)$$

FIGURE 1.6 – Invariance par τ_3 du $\mathfrak{S}$ -module des relations de Jacobi

Exemple 1.3.5. Soit $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Cette forme permet une identification

$$\text{Hom}(V^{\otimes n}, V) \cong \text{Hom}(V^{\otimes n+1}, \mathbf{K})$$

qui munit l'espace $\text{End}(V)(n)$ d'une action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ comme en (1.2) et fait de $\text{End}(V)$ une opérade cyclique. Plus explicitement, pour $f : V^{\otimes n} \rightarrow V$, l'application $f \cdot \tau_n$ où $\tau_n = (0 \ 1 \dots n)$ est caractérisée par

$$\langle (f \cdot \tau_n)(x_0, \dots, x_{n-1}), x_n \rangle = (-1)^{|x_0|(|x_1| + \dots + |x_n|)} \langle f(x_1, \dots, x_n), x_0 \rangle.$$

On peut alors définir une notion d'algèbre sur l'opérade cyclique $\mathcal{O}$.

Définition 1.3.6. Une *algèbre sur l'opérade cyclique* $\mathcal{O}$ est un module $A \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et d'un morphisme

d'opérades cycliques $\mathcal{O} \rightarrow \text{End}(A)$ (où la structure cyclique sur $\text{End}(A)$ est induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle$). En d'autres termes, il s'agit d'une algèbre sur $\mathcal{O}$ munie d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ telle que, pour tous $n \geq 0$, $o \in \mathcal{O}(n)$ et $x_0, \dots, x_n \in A$, on ait

$$\langle (o \cdot \tau_n)(x_0, \dots, x_{n-1}), x_n \rangle = (-1)^{|x_0|(|x_1| + \dots + |x_n|)} \langle o(x_1, \dots, x_n), x_0 \rangle, \quad (1.3)$$

ce qui implique une condition similaire pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$. On dit souvent que A est une $\mathcal{O}$ -algèbre *munie d'une forme bilinéaire invariante*.

Remarque 1.3.7. La condition (1.3) appliquée à l'unité opéradique (qui est invariante sous l'action de τ_1 , cf. proposition 1.3.3 condition (1)) implique que la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est nécessairement symétrique.

1.4 Complexes de graphes

Soit $\mathcal{O}$ une opérade cyclique. Nous supposons ici $\mathcal{O}(0) = 0$. Nous pouvons construire un complexe de graphes associé à $\mathcal{O}$ en partant de graphes dont les sommets sont étiquetés par des éléments de $\mathcal{O}$, sur le même principe que les arbres étiquetés ci-dessus. Soit Γ un graphe. Nous commençons par définir le module de ses étiquetages par $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O}(\Gamma) = \bigotimes_{s \in S_\Gamma} \mathcal{O}(\text{Inc}(s)).$$

À la suite de [CV03], nous définissons une *orientation* d'un graphe Γ comme déterminée par une numérotation de ses sommets et une orientation de ses arêtes, de sorte que cette orientation soit inversée par l'action d'une permutation impaire sur la numérotation des sommets et par le renversement de l'orientation d'une arête. Formellement :

Définition 1.4.1. Soit Γ un graphe. Une *orientation* de Γ est un vecteur non nul de l'espace

$$\text{Or}(\Gamma) = \det(\mathbf{K}S_\Gamma) \otimes \bigotimes_{a \in A_\Gamma} \det(\mathbf{K} \text{Demi}(a))$$

où $\det(V) = \Lambda^n V$ si V est un espace vectoriel de dimension n .

Remarque 1.4.2. Dans le cas d'un graphe connexe, cette notion d'orientation est équivalente à celle que donne Kontsevich dans [Kon93]. Nous renvoyons la lectrice à l'étude très soignée de la question dans [CV03, 2.3.1].

Pour définir le module sous-jacent au complexe de graphes, nous partons de l'espace suivant :

$$\mathbb{G}_n(\mathcal{O}) = \bigoplus_{\substack{\Gamma \in \{\text{graphes sans sommet monovalent}\} \\ |S_\Gamma| = n}} \mathcal{O}(\Gamma) \otimes \text{Or}(\Gamma).$$

Nous souhaitons identifier les graphes (étiquetés orientés) isomorphes. Pour ce faire, remarquons que si $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ est un isomorphisme de graphes, f détermine un morphisme

$$\tilde{f} : \mathcal{O}(\Gamma) \otimes \text{Or}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{O}(\Gamma') \otimes \text{Or}(\Gamma').$$

Nous posons alors

$$\mathcal{OG}_n = \mathbb{G}_n(\mathcal{O}) / \langle \tilde{f}(x) - x, f : \Gamma \xrightarrow{\cong} \Gamma', x \in \mathcal{O}(\Gamma) \otimes \text{Or}(\Gamma) \rangle.$$

Remarque 1.4.3. En particulier, un graphe qui possède une boucle (une arête ayant même origine et but) a un automorphisme qui renverse son orientation, et disparaît donc dans le complexe de graphes.

Il nous reste à définir la différentielle

$$d : \mathcal{OG}_n \rightarrow \mathcal{OG}_{n-1}.$$

Nous introduisons pour cela l'opération de contraction d'une arête. Soit Γ un graphe étiqueté muni d'une orientation $or \in \text{Or}(\Gamma)$. Soit a une arête de Γ , reliant deux sommets s_1 et s_2 . On choisit un représentant de l'orientation tel que s_1 soit numéroté 1, s_2 soit numéroté 2, et l'arête soit orientée de s_1 à s_2 (c'est toujours possible : comme il n'y a pas de sommet monovalent il y a nécessairement une autre arête). On peut extraire de Γ l'arbre (non enraciné) contenant les deux sommets s_1 et s_2 et toutes leurs demi-arêtes incidentes ; munissons de sucroît les feuilles de cet arbre, c'est-à-dire $I = (\text{Inc}(s_1) \cup \text{Inc}(s_2)) \setminus \text{Demi}(a)$, d'un ordre arbitraire. Le morphisme de $\mathfrak{S}$ -modules $\mathbb{T}_+(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}$ associe à cet arbre un élément de $\mathcal{O}$. On définit alors Γ/a à partir de Γ par :

- on remplace s_1 et s_2 par un unique sommet s ;
- on supprime les deux demi-arêtes $\text{Demi}(a)$ et on pose $\text{Inc}(s) = I$;
- on étiquète s par la classe d'équivalence de o et de la numérotation sur $I = \text{Inc}(s)$ que nous avons arbitrairement fixée.

On munit Γ/a de l'orientation or_a déduite de celle de Γ : s prend le numéro 1, les sommets suivants prennent les numéros de 2 à $n-1$ dans le même ordre qu'auparavant et toutes les arêtes gardent leur orientation.

On définit alors, pour $\Gamma \otimes or \in \mathcal{OG}_n$,

$$d(\Gamma \otimes or) = \sum_{a \in A_\Gamma} (\Gamma/a) \otimes or_a$$

Nous laissons la lectrice vérifier qu'avec la notion d'orientation que nous avons fixée, on a le résultat suivant.

Proposition 1.4.4. *Le morphisme d ainsi défini est une différentielle, c'est-à-dire $d^2 = 0$.*

Section 2

Géométrie symplectique non commutative

Nous commençons cette section par quelques rappels de géométrie différentielle et symplectique. Nous développons ensuite un analogue non commutatif de la géométrie symplectique, qui nous permet de définir une notion de *dérivation symplectique* sur la $\mathcal{O}$ -algèbre libre complète $\widehat{\mathcal{O}}(V)$, pour une opérade *cyclique* $\mathcal{O}$, et d'établir un isomorphisme entre l'algèbre de Lie de ces dérivations et une algèbre de Lie de « fonctions » admettant une description simple à partir de $\mathcal{O}$.

2.1 Cas classique

Soit M une variété différentielle. Soit $\Gamma(TM)$ l'espace des champs de vecteurs sur M et $\Omega(M)$ l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles sur M ; nous disons qu'une n -forme est d'*ordre* n , plutôt que de degré n , pour des raisons de compatibilité terminologique qui apparaîtront plus bas.

L'espace des champs de vecteurs $\Gamma(TM)$ est isomorphe à l'espace des dérivations de $\Omega^0(M)$, par le biais de la correspondance qui à $X \in \Gamma(TM)$ associe la dérivation

$$f \mapsto df(X).$$

Pour tout champ de vecteur $X \in \Gamma(TM)$, on peut définir des dérivations (au sens gradué) i_X et $\mathcal{L}_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$, respectivement le *produit intérieur par* X et la *dérivée de Lie le long de* X , au moyen des formules

$$(i_X \omega)(X_1, \dots, X_n) = \omega(X, X_1, \dots, X_n)$$

pour tous $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(TM)$ et

$$\mathcal{L}_X \omega = di_X \omega + i_X d\omega.$$

Le produit intérieur est d'ordre -1 et la dérivée de Lie d'ordre 0 . Cette dernière mesure la variation infinitésimale de la forme différentielle ω le long de X (en particulier $\mathcal{L}_X f = i_X df = df(X)$); elle est souvent définie plus explicitement au moyen du flux de X , la seconde égalité ci-dessus étant alors appelée « formule de Cartan ». Pour plus de détails, nous renvoyons à un cours de géométrie différentielle, par exemple [Min, p. 27].

Définition 2.1.1. Une *variété symplectique* (M, ω) est une variété différentielle M (de dimension paire) munie d'une 2-forme fermée $\omega \in \Omega^2(M) = \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$, appelée *forme symplectique*, telle qu'en tout $m \in M$, la forme bilinéaire antisymétrique $\omega_m \in \Lambda^2 T_m^*M$ est non dégénérée.

Exemple prototypique 2.1.2. Soit $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ une base de $\mathbf{R}^{2n}$. La forme constante $\omega = \sum_i p_i \wedge q_i$ fait de $\mathbf{R}^{2n}$ une variété symplectique. Elle correspond à la forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbf{R}^{2n}$ définie par

$$\langle p_i, p_j \rangle = \langle q_i, q_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle p_i, q_j \rangle = -\langle q_j, p_i \rangle = \delta_{ij}.$$

Remarque 2.1.3. Cet exemple est prototypique au sens suivant : l'important théorème de Darboux affirme qu'autour de tout point d'une variété symplectique (M, ω) , il est possible de trouver des coordonnées locales telles que ω s'écrive

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i.$$

Le fait que ω soit non dégénérée signifie que l'application

$$X \mapsto i_X \omega = \omega(X, \cdot)$$

réalise un isomorphisme entre champs de vecteurs et 1-formes.

Définition 2.1.4. Un champ de vecteurs X sur (M, ω) est dit *symplectique* si $\mathcal{L}_X \omega = 0$.

Puisque $d\omega = 0$, la formule de Cartan implique

$$\mathcal{L}_X \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad di_X \omega = 0 ;$$

il est donc équivalent de demander que le flot de X préserve ω ou que la forme $i_X \omega = \omega(X, \cdot)$ soit fermée.

Remarquons que comme ω est non dégénérée, il existe pour toute fonction $h \in \Omega^0(M)$ un (unique) champ de vecteurs X_h tel que $\omega(X_h, \cdot) = i_{X_h} \omega = dh$; il est symplectique puisque $d^2 h = 0$.

Définition 2.1.5. Un champ de vecteurs X sur (M, ω) est dit *hamiltonien* s'il est de la forme X_h , c'est-à-dire s'il existe une fonction $h \in \Omega^0(M)$ telle que $i_X \omega = \omega(X, \cdot) = dh$. On dit alors que h est un *hamiltonien* de X .

Notons que le hamiltonien h d'un tel champ de vecteurs est défini à une constante près, et que sous la condition topologique $H^1(M) = 0$, tout champ de vecteurs symplectique est hamiltonien. Dans tous les cas, les champs de vecteurs hamiltoniens sont stables par crochet. En effet, on a la formule

$$i_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y]$$

(que l'on peut prouver en la vérifiant sur des générateurs, les deux membres de l'égalité étant des dérivations), d'où :

$$\begin{aligned} i_{[X_f, X_g]} \omega &= \mathcal{L}_{X_f} i_{X_g} \omega - i_{X_g} \mathcal{L}_{X_f} \omega \\ &= di_{X_f} i_{X_g} \omega = d(\omega(X_g, X_f)) \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application $h \mapsto X_h$ transporte le crochet de champs de vecteurs en un crochet sur $\Omega^0(M)$, le *crochet de Poisson*, donné par la formule

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g),$$

et induit un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\Omega^0(M)/\{\text{fonctions constantes}\}$ et les champs de vecteurs hamiltoniens (ou même symplectiques si $H^1(M) = 0$).

Dans le cas de la variété symplectique $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$ (exemple 2.1.2), ou pour toute variété symplectique dans des coordonnées locales adaptées (cf. remarque 2.1.3), on peut écrire, pour $f, g \in \Omega^0(M)$,

$$X_f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

et

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (2.1)$$

2.2 Cas formel et supergradué

Nous allons en fait généraliser dans un cadre non-commutatif une variante *formelle* ainsi que supergradu e de la géométrie symplectique de $(\mathbf{R}^{2n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (exemple 2.1.2). Soit $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$ de dimension finie muni d'une forme bil naire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ antisymétrique et non dégénérée. La composante paire V_0 de V est donc de dimension paire, et on peut trouver une base homogène de V , que nous noterons $(p_i, q_i)_{1 \leq i \leq n}, (x_i)_{1 \leq i \leq m}$ ou parfois $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n+m}$, les p_i, q_i étant de degré 0 et les x_i de degré 1, telle que

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \langle p_i, q_i \rangle = -\langle q_i, p_i \rangle = \delta_{ij}.$$

Nous appelons *fonction* sur V toute série formelle à coefficients dans $\mathbf{K}$, c'est-à-dire tout élément de

$$\mathbf{K}[[e_1, \dots, e_{2n+m}]] = \widehat{S}(V) = \prod_{n \geq 0} (V^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}.$$

Un *champ de vecteurs* sur M est

$$X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial e_i} \quad \text{où} \quad X_i \in \widehat{S}(V)$$

et l'espace des champs de vecteurs est isomorphe à celui des dérivations *continues* de $\widehat{S}(V)$ par le biais de la correspondance qui à $X \in \Gamma(TM)$ associe

$$\xi : \widehat{S}(V) \rightarrow \widehat{S}(V) \quad \text{avec} \quad \xi(e_i) = X_i ;$$

en effet, une dérivation continue de $\widehat{S}(V)$ est déterminée par ses valeurs en les e_i . Comme ci-dessus, on a alors un isomorphisme entre l'algèbre de Lie des champs de vecteurs (ou des dérivations) et l'algèbre de Lie des séries formelles sans terme constant

$$\mathbf{K}[[e_1, \dots, e_{2n+m}]] / \mathbf{K} = \prod_{n \geq 1} (V^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$$

munie du crochet de Poisson défini par la formule (2.1) du cas classique, les dérivées étant à prendre au sens formel. Pour plus de détails, nous renvoyons à [Fuc86,  1.2].

2.3 Champs de vecteurs et formes différentielles non commutatives

Soit $\mathcal{O}$ une opérade cyclique. Soit V un espace vectoriel supergradué muni comme précédemment d'une base $(p_i, q_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(x_i)_{1 \leq i \leq m} = (e_i)_{1 \leq i \leq 2n+m}$.

Définition 2.3.1. La $\mathcal{O}$ -variété formelle sur V est la $\mathcal{O}$ -algèbre libre complète

$$\widehat{\mathcal{O}}(V) = \prod_{n \geq 0} \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}.$$

Une famille génératrice (topologique) de $\widehat{\mathcal{O}}(V)$ est donnée par les classes d'équivalence dans $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}$ d'éléments de la forme

$$o \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$$

pour $n \geq 0$, $o \in \mathcal{O}(n)$ et $v_1, \dots, v_n \in V$, que nous noterons souvent

$$o(v_1, \dots, v_n).$$

Nous les appellerons des *monômes* par analogie avec le cas commutatif.

Exemples 2.3.2. 1. On retombe sur le cas de la section précédente pour $\mathcal{O} = \mathcal{Com}_+$.

2. On a $\widehat{\mathcal{Com}}(V) = \prod_{n \geq 1} (V^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$ (il n'y a plus de termes constants).

3. De manière similaire $\widehat{\mathcal{Ass}}(V) = \prod_{n \geq 1} V^{\otimes n}$, l'algèbre associative libre sur V sans termes constants.

4. Quant à $\widehat{\mathcal{Lie}}(V)$, c'est l'algèbre de Lie libre sur V .

On souhaite, à l'image du cas commutatif, définir les champs de vecteurs comme des dérivations. Il nous faut tout d'abord introduire la notion appropriée de dérivation.

Définition 2.3.3. Soit A une $\mathcal{O}$ -algèbre. Une *dérivation* de A est une application $\xi : A \rightarrow A$ telle que pour tous $n \geq 1$, $o \in \mathcal{O}(n)$ et $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$\xi(o(a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{|\xi|(|o|+|a_1|+\dots+|a_{i-1}|)} o(a_1, \dots, \xi^i(a_i), \dots, a_n).$$

Remarque 2.3.4. La formule que nous avons donnée n'est valable que pour ξ et les a_i homogènes. D'une manière générale, nous supposerons tous les éléments homogènes dans nos formules, même lorsque nous ne le précisons pas ; le cas général s'obtient en décomposant.

Définition 2.3.5. Un *champ de vecteurs* sur $\widehat{\mathcal{O}}(V)$ est une dérivation *continue* $\xi : \widehat{\mathcal{O}}(V) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}(V)$.

Un champ de vecteur ξ est entièrement déterminé par les $\xi(e_i) \in \widehat{\mathcal{O}}(V)$.

On peut définir des *$\mathcal{O}$ -formes différentielles* sur $\widehat{\mathcal{O}}(V)$ comme suit. Nous notons dV une copie de l'espace supergradué ΠV , de sorte que pour $v \in V$, $|dv| \equiv |v| + 1 \pmod{2}$. Nous posons alors

$$\Omega_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V)) = \widehat{\mathcal{O}}(V \oplus dV).$$

Cette $\mathcal{O}$ -algèbre complète est munie d'une graduation (au sens complet) par nombre de symboles différentiels : nous parlerons d'*ordre*, comme dans le cas des formes différentielles classiques. On a en particulier

$$\Omega_{\mathcal{O}}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V)) = \widehat{\mathcal{O}}(V).$$

Soit ξ un champ de vecteur sur $\widehat{\mathcal{O}}(V)$. Il est aisé de définir comme dans le cas commutatif des dérivations

$$d, i_{\xi}, \mathcal{L}_{\xi} : \Omega_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V)) \rightarrow \Omega_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$$

en fixant leur valeur sur une base de $V \oplus dV$:

$$d(e_i) = de_i \quad d(de_i) = 0 \quad (2.2a)$$

$$i_{\xi}(e_i) = 0 \quad i_{\xi}(de_i) = \xi(e_i) \quad (2.2b)$$

$$\mathcal{L}_{\xi}(e_i) = \xi(e_i) \quad \mathcal{L}_{\xi}(de_i) = (-1)^{|\xi|} d\xi(e_i). \quad (2.2c)$$

Les dérivations d et i_{ξ} sont d'ordre 1, tandis que $\mathcal{L}_{\xi}$ est d'ordre 0. La différentielle d est impaire ; pour une dérivation homogène ξ , i_{ξ} et $\mathcal{L}_{\xi}$ sont également homogènes, respectivement de parité contraire et de même parité que ξ . La formule de Cartan

$$\mathcal{L}_{\xi} = [i_{\xi}, d]$$

est encore valable, dans la mesure où elle est vraie sur les e_i , de_i , et que les deux membres de l'égalité sont des dérivations.

Remarque 2.3.6. La définition précise du crochet est compliquée par le fait qu'il y a deux graduations différentes, le degré (c'est-à-dire la parité) et l'ordre. Pour une dérivation (homogène) ξ , on a

$$[i_{\xi}, d] = i_{\xi} \circ d - (-1)^{\text{ord}(i_{\xi}) \text{ord}(d) + |i_{\xi}| |d|} d \circ i_{\xi} = i_{\xi} \circ d + (-1)^{|\xi|} d \circ i_{\xi},$$

d'où le signe $(-1)^{|\xi|}$ en (2.2c).

Il est cependant difficile de poursuivre sur ces bases le développement d'une théorie symplectique. Le premier problème est qu'il n'y a pas de définition naturelle d'une forme symplectique standard ; il devrait s'agir d'un

$$\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^2(\widehat{\mathcal{O}}(V)) \subset \prod_{n \geq 2} \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} (V \oplus dV)^{\otimes n}.$$

2.4 Foncteur de Kontsevich et $\text{DR}_{\mathcal{O}}$

2.4.1 Description de $\text{DR}_{\mathcal{O}}$

Pour mettre en place une théorie symplectique, l'idée de Kontsevich [Kon93, Kon94] a été de remplacer l'algèbre des formes $\Omega_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$ par un certain module $\text{DR}_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$ que l'on ne peut définir que dans le cas d'une opérade cyclique. Il en a donné une définition plus générale, que nous détaillerons plus bas ; le point essentiel pour nous est que dans le cas libre, *et si* $\mathcal{O}(0) = 0$,

$$\text{DR}_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V)) = \widehat{\mathcal{O}}(V \oplus dV) = \prod_{n \geq 0} \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_{n+1}} (V \oplus dV)^{\otimes n+1}.$$

Remarquons tout de suite que cet espace n'a pas de structure de $\mathcal{O}$ -algèbre. Les éléments de la forme

$$o \otimes u_0 \otimes \dots \otimes u_n$$

pour $n \geq 0$, $o \in \mathcal{O}(n)$, et $u_0, \dots, u_n \in V \oplus dV$, forment une famille génératrice topologique de $DR_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$. On parlera à nouveau de *monômes*. On a des relations (pour des éléments homogènes)

$$o \otimes u_0 \otimes \dots \otimes u_n \equiv \pm (o \cdot \sigma) \otimes u_{\sigma(0)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(n)}. \quad (2.3)$$

On peut représenter $o \otimes u_0 \otimes \dots \otimes u_n$ comme un arbre non enraciné à un sommet et $n + 1$ demi-arêtes, dont le sommet est étiqueté par un élément de $\mathcal{O}$ et dont les demi-arêtes sont numérotées et étiquetées par des éléments de $V \oplus dV$ (cf. figure 2.4.1, dessin de gauche). Si tous les éléments placés sur les demi-arêtes sont

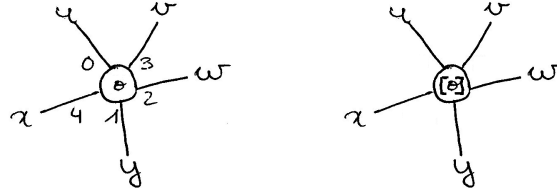


FIGURE 2.1 – Représentations de l'élément $o \otimes u \otimes y \otimes w \otimes v \otimes x$. (La seconde n'est bien définie que si tous les éléments sont pairs.)

de degré pair, on peut remplacer l'étiquetage du sommet s et la numérotation des éléments de $\text{Inc}(s)$ par un élément de $\mathcal{O}(\text{Inc}(s))$ (cf. figure 2.4.1, dessin de droite) ; en général, comme le montre la relation (2.3) ci-dessus, un tel symbole est mal défini.

Le module $DR_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$ est, à l'instar de $\Omega_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$, muni d'une graduation par ordre (nombre de symboles différentiels) : on note $DR_{\mathcal{O}}^i(\widehat{\mathcal{O}}(V))$ la composante d'ordre i . En particulier, $DR_{\mathcal{O}}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V))$ tiendra, dans notre théorie symplectique, le rôle du module des « fonctions » sur la variété non-commutative formelle $\widehat{\mathcal{O}}(V)$.

Exemples 2.4.1. 1. Dans le cas commutatif, $DR_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$ est l'algèbre commutative libre *sans termes linéaires* sur $V \oplus dV$: on a

$$DR_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V)) = \prod_{n \geq 2} ((V \oplus dV)^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}.$$

2. Dans le cas associatif, un monôme peut se représenter comme à la figure 2. On a deux numérotations sur lesquelles $\mathfrak{S}_{n+1}$ agit simultanément : on peut en supprimer une. De plus, l'action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ décrite dans la première section préserve un ordre cyclique sur les demi-arêtes étiquetées par les éléments de $V \oplus dV$. Dans le cas où toutes les étiquettes sont de degré pair, un tel monôme est ainsi exactement un mot cyclique (figure 2, gauche). On a la formule

$$DR_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V)) = \prod_{n \geq 2} ((V \oplus dV)^{\otimes n})_{\mathbf{Z}_n}.$$

où $\mathbf{Z}_n$ est vu comme le sous-groupe cyclique de $\mathfrak{S}_n$ engendré par $(1 \dots n)$.

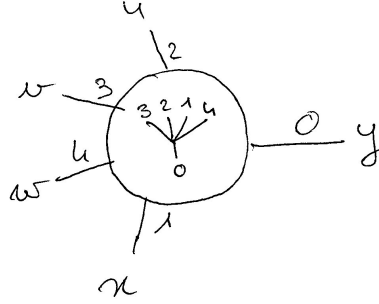


FIGURE 2.2 – Un monôme de DR_{Ass}

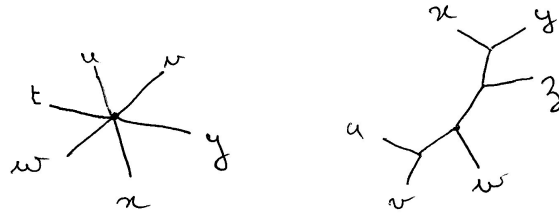


FIGURE 2.3 – Monôme de DR_{Ass} (à gauche) et DR_{Lie} (à droite) dans le cas où toutes les étiquettes sont de degré pair

3. Le cas Lie est similaire : si toutes les étiquettes sont de degré pair, un monôme est un arbre binaire planaire non enraciné dont toutes les feuilles sont étiquetées par des éléments de $V \oplus dV$ (figure 2, droite). Dans le cas général il faut en plus se souvenir d'une numérotation.

2.4.2 Construction générale de $\text{DR}_{\mathcal{O}}$ et forme bilinéaire invariante universelle

Soit donc $\mathcal{O}$ une opérade cyclique et A une $\mathcal{O}$ -algèbre. On rappelle qu'une forme bilinéaire invariante sur A (au sens de la définition 1.3.6 page 14) est une forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non dégénérée telle que, pour tous $n \geq 0$, $o \in \mathcal{O}(n)$, $x_0, \dots, x_n \in A$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$,

$$\langle (o \cdot \sigma)(x_0, \dots, x_{n-1}), x_n \rangle = \pm \langle o(x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}), x_{\sigma(n)} \rangle$$

où le signe est le même que dans l'égalité

$$(x_0 \otimes \dots \otimes x_n) \cdot \sigma = \pm x_{\sigma(0)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

Nous allons construire une flèche universelle $\mu : A \otimes A \rightarrow \lambda(\mathcal{O}, A)$ telle que toute forme bilinéaire invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se factorise de manière unique comme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & \mathbf{K} \\ & \searrow \mu & \nearrow \exists! \\ & \lambda(\mathcal{O}, A) & \end{array}$$

Pour ce faire, nous posons tout simplement

$$\lambda(\mathcal{O}, A) = (A \otimes A) / I$$

où I est le sous-espace engendré par les relations de la forme

$$(o \cdot \sigma)(x_0, \dots, x_{n-1}) \otimes x_n - \pm o(x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}) \otimes x_{\sigma(n)}$$

pour $n \geq 1$, $o \in \mathcal{O}(n)$, $x_0, \dots, x_n \in A$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$.

Le résultat essentiel est l'identification suivante, valable dans le cas libre.

Proposition 2.4.2. *Soit $\mathcal{O}$ une opérade cyclique telle que $\mathcal{O}(0) = 0$, et soit $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$. On a un isomorphisme*

$$\lambda(\mathcal{O}, \mathcal{O}(V)) \cong \mathcal{O}((V)) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_{n+1}} V^{\otimes n+1}.$$

Démonstration. Un élément de base de $\mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{O}(V)$ peut s'écrire

$$p(v_1, \dots, v_n) \otimes q(w_1, \dots, w_m)$$

avec $p \in \mathcal{O}(n)$, $q \in \mathcal{O}(m)$. On a

$$\begin{aligned} p(v_1, \dots, v_n) \otimes q(w_1, \dots, w_m) &\equiv \pm q(w_1, \dots, w_m) \otimes p(v_1, \dots, v_n) \\ &\equiv \pm (q \cdot \tau_m)(p(v_1, \dots, v_n), w_1, \dots, w_{m-1}) \otimes w_m \\ &\equiv \pm ((q \cdot \tau_m)_1 \circ p)(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_{m-1}) \otimes w_m \end{aligned}$$

que l'on peut voir comme un élément de

$$\mathcal{O}(n+m-1) \otimes_{\mathfrak{S}_{n+1}} (V^{\otimes n} \otimes V) \subset \text{DR}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(V)).$$

On peut montrer (en faisant quelques vérifications sur le résultat possible d'une double application d'une règle de réécriture) qu'il y a unicité de cette écriture (dans $\text{DR}_{\mathcal{O}}$), d'où l'isomorphisme de la proposition. (C'est essentiellement le contenu du *lemme de réduction* de Mahajan [Mah, pp. 11–12]). $\square$

Ce résultat s'étend immédiatement au cas complet. Remarquons que la réécriture que nous avons décrite dans la preuve nous donne une description explicite de

$$\mu : \widehat{\mathcal{O}}(V) \otimes \widehat{\mathcal{O}}(V) \rightarrow \text{DR}_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V)),$$

donnée par la formule

$$\mu(p(v_1, \dots, v_n), q(w_1, \dots, w_m)) = \pm ((q \cdot \tau_m)_1 \circ p) \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m.$$

On peut se représenter cette opération comme à la figure 2.4.2.

2.5 Théorie symplectique

On peut reprendre pour $\text{DR}_{\mathcal{O}}$ le travail accompli pour $\Omega_{\mathcal{O}}$. On supposera dans cette section que $\mathcal{O}(0) = 0$, puisque dans le cas contraire la proposition fondamentale 2.4.2 ci-dessus est en défaut.

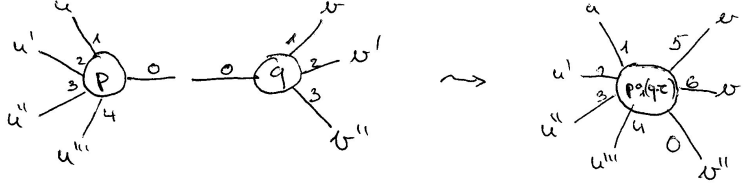


FIGURE 2.4 – La forme bilinéaire universelle $\mu : \widehat{\mathcal{O}}(V) \otimes \widehat{\mathcal{O}}(V) \rightarrow \mathrm{DR}_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$.

Soit ξ un champ de vecteurs sur $\widehat{\mathcal{O}}(V)$. On peut comme ci-dessus définir des opérateurs

$$d, i_{\xi}, \mathcal{L}_{\xi} : \mathrm{DR}_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V)) \rightarrow \mathrm{DR}_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$$

par les formules qu'en (2.2), la règle de dérivation étant cette fois donnée par (avec ici $\phi = d, i_{\xi}$ ou $\mathcal{L}_{\xi}$)

$$\phi(o \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^n \pm \mu(\phi(v_i), o \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes v_0 \otimes \dots \otimes v_{i-1})$$

pour tous $n \geq 1$, $o \in \mathcal{O}(n)$ et $v_0, \dots, v_n \in V \oplus dV$.

Il est possible de définir une forme symplectique naturelle dans $\mathrm{DR}_{\mathcal{O}}(\widehat{\mathcal{O}}(V))$; elle peut être représentée par

$$\omega = \sum_{i=1}^n u \otimes dp_i \otimes dq_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m u \otimes dx_j \otimes dx_j$$

dans $\mathcal{O}(1) \otimes_{\mathfrak{S}_2} (dV)^{\otimes 2}$, où $u \in \mathcal{O}(1)$ est l'unité opéradique. Notons qu'on a

$$u \otimes dp_i \otimes dq_i \equiv -u \otimes dq_i \otimes dp_i$$

et qu'en revanche, les dx_i sont pairs.

Pour que ω puisse jouer le rôle d'une forme symplectique, deux propriétés sont à vérifier : tout d'abord, ω doit être fermée — c'est-à-dire $d\omega = 0$ —, ce qui est clair ; ensuite, elle doit être non dégénérée, ce qui signifie dans notre cadre que l'application

$$\xi \mapsto i_{\xi}\omega$$

réalise un isomorphisme entre champs de vecteurs de $\widehat{\mathcal{O}}(V)$ et 1-formes dans $\mathrm{DR}_{\mathcal{O}}^1(\widehat{\mathcal{O}}(V))$. Or pour ξ un champ de vecteurs de $\widehat{\mathcal{O}}(V)$, on a

$$\begin{aligned} i_{\xi}\omega &= \sum_{i=1}^n (\mu(\xi(p_i), u \otimes dq_i) - \mu(\xi(q_i), u \otimes dp_i)) + \sum_{j=1}^m \mu(\xi(x_j), u \otimes dx_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (\xi(p_i) \otimes dq_i - \xi(q_i) \otimes dp_i) + \sum_{j=1}^m \xi(x_j) \otimes dx_j; \end{aligned}$$

et tout élément de $\mathrm{DR}_{\mathcal{O}}^1(\widehat{\mathcal{O}})$ peut s'écrire sous cette forme de manière unique (en utilisant l'action des groupes symétriques pour mettre le symbole différentiel en dernière position dans chaque monôme).

On énonce alors sans surprise la définition suivante.

Définition 2.5.1. Un champ de vecteurs ξ sur $\widehat{\mathcal{O}}(V)$ est dit *symplectique* si $\mathcal{L}_\xi \omega = 0$ et *hamiltonien* s'il existe $h \in \mathrm{DR}_\mathcal{O}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V))$ tel que $dh = i_\xi \omega$.

Le résultat suivant nous permet alors de conclure que tout champ de vecteurs symplectique est hamiltonien.

Proposition 2.5.2. *On a*

$$H^i(\mathrm{DR}_\mathcal{O}(\widehat{\mathcal{O}}(V))) = 0$$

pour tout $i \geq 0$.

Démonstration. On considère le champ de vecteurs défini par $\xi(e_i) = e_i$ pour tout i . La dérivation $\mathcal{L}_\xi$ est un isomorphisme mais d'après la formule de Cartan, est nulle en cohomologie. Notons que cet argument fonctionne même pour H^0 du fait que $\mathcal{O}(0) = 0$. $\square$

On peut résumer notre travail de la manière suivante.

Théorème 2.5.3. *Soit $\mathcal{O}$ une opérade cyclique telle que $\mathcal{O}(0) = 0$. On a un isomorphisme entre les champs de vecteurs symplectiques sur $\widehat{\mathcal{O}}(V)$ et les « fonctions » sur $\widehat{\mathcal{O}}(V)$, c'est-à-dire*

$$\{\xi \in \mathrm{Der}(\widehat{\mathcal{O}}(V)), \mathcal{L}_\xi \omega = 0\} \cong \mathrm{DR}_\mathcal{O}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V)).$$

Cela nous permet de transporter la structure d'algèbre de Lie des dérivations à $\mathrm{DR}_\mathcal{O}^0$. À l'image du cas classique, si $h \in \mathrm{DR}_\mathcal{O}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V))$, on note ξ_h le champ de vecteurs associé. Comme on a encore la formule, pour ξ et ξ' des champs de vecteurs

$$i_{[\xi, \xi']} = [\mathcal{L}_\xi, i_{\xi'}]$$

(il suffit de la vérifier sur des générateurs), ainsi que la formule de Cartan, on peut écrire comme dans le cas classique, pour $h, h' \in \mathrm{DR}_\mathcal{O}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V))$,

$$i_{[\xi_h, \xi_{h'}]} \omega = di_{\xi_h} i_{\xi_{h'}} \omega$$

d'où la définition suivante du « crochet de Poisson » sur $\mathrm{DR}_\mathcal{O}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V))$:

$$[h, h'] = i_{\xi_h} i_{\xi_{h'}} \omega.$$

Ceci nous permet de dériver la description explicite suivante (nous omettons les calculs). Soient deux monômes

$$m_1 = o_1 \otimes u_0 \otimes \dots \otimes u_n, \quad m_2 = o_2 \otimes v_0 \otimes \dots \otimes v_m.$$

On peut les représenter comme à la figure 2.4.1 page 22. Pour toute feuille d'un de ces arbres en étoile, on peut faire en sorte de la numéroté par 0, puis effacer l'élément de V qui l'étiquète : on obtient alors un monôme de $\widehat{\mathcal{O}}(V)$. Pour tout choix d'une feuille dans chacun des arbres en étoile, on peut alors appliquer μ aux deux éléments résultants de $\widehat{\mathcal{O}}(V)$. Formellement, on a :

$$[m_1, m_2] = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \pm \langle u_i, v_j \rangle \mu((p \cdot \tau_n^{i+1})(u_{i+1}, \dots, u_n, u_0, \dots, u_{i-1}), (q \cdot \tau_m^j)(v_{j+1}, \dots, v_m, v_0, \dots, v_{j-1})) \quad (2.4)$$

Remarque 2.5.4. On peut reformuler cette description du crochet sur $\mathrm{DR}_\mathcal{O}^0$ de manière à faire ressortir sa parenté formelle avec le crochet de poisson classique (2.1). Nous renvoyons à Mahajan [Mah].

Section 3

Description algébrique de l'homologie de graphe

Soit $V = V_{2n|m}$ un espace vectoriel supergradué de dimension paire $2n$ et impaire m muni de la forme bilinéaire antisymétrique standard. On a construit, dans la section précédente, une *algèbre de Lie* que nous allons écrire pour simplifier (en adaptant la notation de [CV03])

$$\mathcal{LO}_{2n|m} = DR_{\mathcal{O}}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V)) = \prod_{n \geq 0} \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_{n+1}} V^{\otimes n+1}.$$

Nous expliquons dans cette section comment construire une application de l'homologie de cette algèbre de Lie (en un sens que nous commençons par définir) dans l'homologie du complexe de graphes $\mathcal{OG}_{\bullet}$.

3.1 Complexe de Chevalley-Eilenberg

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie supergradué.

Définition 3.1.1. Le *complexe de Chevalley-Eilenberg* de $\mathcal{L}$ est l'algèbre extérieure $\Lambda^{\bullet} \mathcal{L}$ munie de la différentielle $d : \Lambda^k \mathcal{L} \rightarrow \Lambda^{k-1} \mathcal{L}$ définie par

$$d(l_1 \wedge \dots \wedge l_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \pm (-1)^{i+j-1} [l_i, l_j] \wedge l_1 \wedge \dots \wedge \widehat{l_i} \wedge \dots \wedge \widehat{l_j} \wedge \dots \wedge l_k$$

où le signe $\pm$ est défini par l'égalité, pour la permutation σ convenable,

$$(l_1 \otimes \dots \otimes l_k) \cdot \sigma = \pm l_i \otimes l_j \otimes l_1 \otimes \dots \otimes \widehat{l_i} \otimes \dots \otimes \widehat{l_j} \otimes \dots \otimes l_k.$$

L'homologie $H_{\bullet}(\mathcal{L})$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est l'homologie de ce complexe.

Remarque 3.1.2. Si l est un élément de degré *impair* de $\mathcal{L}$ tel que $[l, l] = 0$, on peut produire un cycle non trivial dans $H_k(\mathcal{L})$ pour tout k , en considérant

$$l \wedge \overset{k \text{ fois}}{\dots} \wedge l \in \Lambda^k \mathcal{L}.$$

En effet, puisque $[l, l] = 0$, la différentielle d'un tel élément est nulle. Cette construction ne fonctionne pas pour l pair, car par antisymétrie de l'algèbre extérieure, l'élément analogue dans $\Lambda^k \mathcal{L}$ serait nul.

Soit $n' \geq n, m' \geq m$. On a alors une inclusion $\mathcal{LO}_{2n|m} \rightarrow \mathcal{LO}_{2n'|m'}$, qui induit un morphisme de complexes

$$\Lambda^\bullet \mathcal{LO}_{2n|m} \rightarrow \Lambda^\bullet \mathcal{LO}_{2n'|m'}.$$

On note alors

$$\mathcal{LO}_\infty = \varinjlim_{n,m} \mathcal{LO}_{2n|m}$$

et

$$H_\bullet(\mathcal{LO}_\infty) = \varinjlim_{n,m} H_\bullet(\mathcal{LO}_{2n|m}).$$

3.2 Le morphisme $\psi_{2n|m} : \Lambda^\bullet \mathcal{LO}_{2n|m} \rightarrow \mathcal{OG}_\bullet$.

Nous renvoyons, pour cette construction, à l'article [CV03]. Nous la reprenons dans les grandes lignes pour indiquer comment faire les corrections de signes rendues nécessaires par le fait que nous travaillons dans un cadre supergradué. La lectrice pourra se référer à [HL08] où les signes sont traités de manière très soignée.

Soit $m_1 \wedge \dots \wedge m_k \in \Lambda^k \mathcal{LO}_{2n|m}$, où les m_i sont des monômes, c'est-à-dire s'écrivent

$$m_i = o_i \otimes v_{i,0} \otimes \dots \otimes v_{i,l_i}$$

où $o \in \mathcal{O}(k_i)$, avec de plus les $v_{i,j}$ homogènes. On rappelle qu'on peut représenter ces monômes par des arbres non enracinés à un sommet étiqueté par un élément de $\mathcal{O}$ et $n+1$ feuilles numérotées et étiquetées par des éléments de V . On fixe une telle représentation pour chacun des m_i . On va construire tous les graphes que l'on peut obtenir en raccordant les demi-arêtes de ces différents monômes, le coefficient d'un graphe ainsi obtenu étant calculé à partir des $v_{i,j}$. Plus précisément, nous commençons par poser la définition suivante.

Définition 3.2.1. Soit X un ensemble de cardinal $2k$. On appelle *diagramme de cordes sur X* toute partition c de X en paires

$$\{c_{i_1}, c_{j_1}\}, \dots, \{c_{i_k}, c_{j_k}\}.$$

On note $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des diagrammes de cordes sur X .

Soit D l'ensemble des feuilles des monômes m_i . Soit $c \in \mathcal{C}(D)$ un diagramme de cordes sur D . On peut définir un graphe étiqueté orienté $\Gamma_c \otimes or_c$ comme suit.

- Le graphe Γ_c a k sommets $s_1, \dots, s_k$, s_i étant numéroté i et étiqueté en reprenant la représentation en étoile de m_i choisie;
- les arêtes sont données par le diagramme de corde c ; on fixe arbitrairement une orientation de chaque arête.

On définit ensuite un coefficient pour ce graphe, de la manière suivante. L'idée est que si une arête relie une demi-arête étiquetée $v_{i,j}$ à une demi-arête étiquetée $v_{i',j'}$ (dans ce sens selon l'orientation fixée arbitrairement sur l'arête), on introduit un facteur $\langle v_{i,j}, v_{i',j'} \rangle$. Comme nous travaillons dans un cadre supergradué, il faut d'abord permuter les $v_{i,j}$ avant de pouvoir les contracter en utilisant la forme bilinéaire; ce signe est étudié de manière précise dans [HL08] (dans le

cas associatif, mais ce point se généralise sans difficultés à notre situation). On obtient ainsi un coefficient λ_c .

On pose alors

$$\psi_{2n|m}(m_1 \wedge \dots \wedge m_k) = \sum_{c \in \mathcal{C}(D)} \lambda_c \Gamma_c \otimes or_c.$$

Proposition 3.2.2. *L'application*

$$\psi_{2n|m} : \Lambda^\bullet \mathcal{LO}_{2n|m} \rightarrow \mathcal{OG}_\bullet$$

ainsi définie est un morphisme de chaînes, donc envoie cycle sur cycle.

La différentielle du complexe de graphes procède en contractant toutes les arêtes possibles; la différentielle du complexe de Chevalley-Eilenberg procède – en tenant compte de la description que nous avons donné du crochet de Poisson sur $\mathrm{DR}_{\mathcal{O}}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V))$ à la formule (2.4) – en contractant les monômes m_i de toutes les manières possibles. Ce constat rend le résultat crédible. La preuve en est faite très soigneusement dans [CV03, pp. 1194-1195] et nous y renvoyons la lectrice, avec l'avertissement qu'il faut faire des corrections de signe car nous travaillons dans un cadre supergradué.

3.3 Énoncé du théorème de Kontsevich

En reprenant les définitions ci-dessus, il est facile de se convaincre que, pour $n' \geq n$, $m' \geq m$, le diagramme de morphisme de chaînes suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^\bullet \mathcal{LO}_{2n|m} & \xrightarrow{\psi_{2n|m}} & \mathcal{OG}_\bullet \\ \downarrow & & \uparrow \psi_{2n'|m'} \\ \Lambda^\bullet \mathcal{LO}_{2n'|m'} & & \end{array}$$

On peut donc définir un morphisme de chaînes

$$\psi_\infty : \Lambda^\bullet \mathcal{LO}_\infty \rightarrow \mathcal{OG}_\bullet.$$

Kontsevich a prouvé le résultat suivant. Nous n'en avons pas besoin à strictement parler, mais il fournit un contexte important pour juger de la portée de la construction de classes que nous effectuons dans ce mémoire.

Théorème 3.3.1. *Le morphisme de chaînes ψ_∞ induit un isomorphisme en homologie.*

Nous renvoyons au très lisible article [CV03]; cependant, la preuve y est faite dans le cas non gradué (où V est purement pair). Une preuve légèrement différente se trouve dans [Ham06] : elle est faite dans le cas supergradué mais seulement pour l'opérade $\mathcal{Com}$. Le cas échant, la lectrice pourra cependant trouver dans ce dernier article (section 4) un résumé rapide des résultats de théorie supergradué des invariants nécessaires pour adapter la preuve de [CV03].

Section 4

Algèbres à homotopie près et construction de classes

Nous donnons d'abord un bref aperçu de la manière dont on peut définir, pour une opérade quadratique $\mathcal{O}$, une opérade quadratique duale $\mathcal{O}^!$ et une opérade différentielle (super)graduée $\mathcal{O}_\infty$ encodant la structure de $\mathcal{O}$ -algèbre à homotopie près.

Si $\mathcal{O}$ est cyclique, il en est de même de $\mathcal{O}_\infty^!$; nous décrivons partiellement cette structure cyclique, puis expliquons qu'il est équivalent de se donner une algèbre A sur $\mathcal{O}_\infty^!$ munie d'une forme bilinéaire invariante (au sens de la définition 1.3.6 page 14) ou de se donner un champ de vecteurs symplectique impair de carré nul sur une certaine $\mathcal{O}$ -algèbre libre complète. Nous utilisons alors les résultats des sections précédentes pour associer à une telle algèbre des classes dans le complexe de graphes de $\mathcal{O}$.

Dans cette section, $\mathcal{O}$ dénotera une opérade *de dimension finie en chaque arité*, c'est-à-dire telle que tous les $\mathcal{O}(n)$ soient de dimension finie.

4.1 Dualité de Koszul pour une opérade quadratique

La dualité de Koszul associe à toute opérade quadratique $\mathcal{O}$ une *opérade quadratique duale* $\mathcal{O}^!$, avec $\mathcal{O}^{!!} = \mathcal{O}$. On a en particulier $\text{Com}^! = \text{Lie}$, $\text{Ass}^! = \text{Ass}$. On peut aussi associer à $\mathcal{O}$ un autre objet, une *coopérade duale* $\mathcal{O}^i$. Nous renvoyons la lectrice à [LV12, 5.8] pour une définition précise de la notion de coopérade ; il nous suffira de savoir qu'il s'agit d'un $\mathfrak{S}$ -module muni d'une certaine structure supplémentaire (en fait, des opérations de « décomposition » plutôt que de composition). Notons que le dual linéaire d'une coopérade est une opérade, et que le dual linéaire d'une opérade de dimension finie en chaque arité est une coopérade. On peut en fait écrire

$$\mathcal{O}^! = (\Lambda \mathcal{O}^i)^\vee,$$

où $\Lambda \mathcal{O}^i$ désigne l'*inversion de parité opéradique* de $\mathcal{O}^i$, que nous introduisons maintenant.

Définition 4.1.1. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathfrak{S}$ -module (dans $\mathbf{K}\text{-sgrMod}$). L'*inversion de parité opéradique* $\Lambda \mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ est le $\mathfrak{S}$ -module défini par

$$\Lambda \mathcal{M}(n) = \Pi^{n-1} \text{sgn}_n \otimes \mathcal{M}(n)$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit diagonalement (c'est-à-dire simultanément sur les deux facteurs du produit tensoriel), et où sgn_n dénote la représentation de signe de $\mathfrak{S}_n$.

Remarque 4.1.2. Cette opération (qui correspond à la *suspension opéradique* dans le cas $\mathbf{Z}$ -graduée) peut être définie pour tout $\mathfrak{S}$ -module. Dans le cas où $\mathcal{M}$ est une opérade (resp. une coopérade) on peut munir $\Lambda\mathcal{M}$ d'une structure d'opérade (resp. de coopérade) ; cf. [MSS02, p. 127] et [LV12, 7.2.2].

La propriété caractéristique de cette opération est la suivante.

Lemme 4.1.3. *Pour tout $V \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$,*

$$\Pi(\mathcal{M}(V)) \cong (\Lambda\mathcal{M})(\Pi(V)).$$

4.2 Algèbres sur $\mathcal{O}$ à homotopie près

Pour toute opérade quadratique $\mathcal{O}$, on peut définir une notion de $\mathcal{O}$ -algèbre à homotopie près ; les $\mathcal{O}$ -algèbres en sont des cas particuliers. Cette structure est encodée par une certaine opérade différentielle (super)graduée $\mathcal{O}_\infty$. Nous nous appuierons essentiellement sur la caractérisation suivante.

Proposition 4.2.1. *La donnée d'une structure $\mathcal{O}_\infty$ sur un module supergraduée de dimension finie $A \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$ est équivalente à la donnée d'une dérivation $m : \widehat{\mathcal{O}}^1(\Pi A^\vee) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}^1(\Pi A^\vee)$ impaire et telle que $m^2 = 0$.*

Nous n'en donnerons pas de preuve complète et renvoyons la lectrice à [LV12, 10.1] ; nous donnons cependant une idée de la construction.

Tout d'abord, $\mathcal{O}_\infty$ a pour opérade sous-jacente dans $\mathbf{K}\text{-sgrMod}$ l'opérade libre $\mathbb{T}(\mathcal{O}^i)$; nous n'utiliserons pas sa différentielle. (L'opérade $\mathcal{O}_\infty$ peut plus précisément s'obtenir comme construction *cobar* de $\mathcal{O}^i$; nous renvoyons à [LV12, 7.3, 10.1]). Ainsi, une structure de $\mathcal{O}_\infty$ -algèbre sur $A \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$ est entièrement caractérisée par la donnée d'une application

$$\mathcal{O}^i(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}^i(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^{\otimes n} \rightarrow A, \quad (4.1)$$

c'est-à-dire par une famille d'applications

$$m_n : \mathcal{O}^i(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^{\otimes n} \rightarrow A$$

satisfaisant certaines conditions supplémentaires liées à la structure différentielle de $\mathcal{O}_\infty$.

Remarquons tout d'abord que d'après le lemme 4.1.3,

$$\mathcal{O}^i(A) \cong \Pi \Lambda \mathcal{O}^i(\Pi A).$$

En inversant la parité dans (4.1), on obtient donc un morphisme

$$\Lambda \mathcal{O}^i(\Pi A) \rightarrow \Pi A.$$

En dualisant (au sens linéaire), on obtient

$$(\Pi A)^\vee \rightarrow (\Lambda \mathcal{O}^i(\Pi A))^\vee,$$

d'où

$$(\Pi A)^\vee \rightarrow \prod_{n \geq 0} (\Lambda \mathcal{O}^i(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} (\Pi A)^{\otimes n})^\vee,$$

ce que les isomorphismes suivants (cf. préliminaires page 4)

$$\begin{aligned} (\Lambda \mathcal{O}^i(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} (\Pi A)^{\otimes n})^\vee &\cong ((\Lambda \mathcal{O}^i(n) \otimes (\Pi A)^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n})^\vee \\ &\cong ((\Lambda \mathcal{O}^i(n) \otimes (\Pi A)^{\otimes n})^\vee)^{\mathfrak{S}_n} \\ &\cong (\Lambda \mathcal{O}^i(n)^\vee \otimes (\Pi A^\vee)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \\ &\cong (\mathcal{O}^!(n) \otimes (\Pi A^\vee)^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n} \\ &\cong \mathcal{O}^!(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} (\Pi A^\vee)^{\otimes n} \end{aligned}$$

nous permettent de réécrire

$$\Pi A^\vee \rightarrow \widehat{\mathcal{O}^!}(\Pi A^\vee).$$

Pour conclure, il suffit de constater qu'il y a une correspondance évidente entre applications de cette forme et dérivations continues

$$\widehat{\mathcal{O}^!}(\Pi A^\vee) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}^!}(\Pi A^\vee).$$

Le contenu restant de la proposition 4.2.1 est alors que notre donnée de départ $\mathcal{O}^i(A) \rightarrow A$ correspond à une structure $\mathcal{O}_\infty$ si et seulement si la dérivation sur $\widehat{\mathcal{O}^!}(\Pi A^\vee)$ obtenue est impaire et de carré nul.

4.3 Algèbres à homotopie près invariantes et champs de vecteurs symplectiques

Nous souhaitons construire une classe dans le complexe de graphes associé à une opérade cyclique $\mathcal{O}$. Comme ces classes correspondent à des classes dans l'homologie de l'algèbre de Lie des dérivations sur une $\mathcal{O}$ -algèbre libre complète, et comme $\mathcal{O}^! = \mathcal{O}$, il nous faut partir d'une $\mathcal{O}_\infty^!$ -algèbre A . On obtient alors une dérivation (un champ de vecteurs)

$$\widehat{\mathcal{O}}(\Pi A^\vee) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}(\Pi A^\vee)$$

impaire et de carré nul. Pour construire une classe dans le complexe de graphes, il nous faut un champ de vecteurs symplectique. Nous allons l'obtenir à partir d'une $\mathcal{O}_\infty^!$ -algèbre A munie d'une forme bilinéaire invariante. Tout d'abord, il nous faut préciser la structure cyclique de $\mathcal{O}_\infty^!$.

4.3.1 Structure cyclique de $\mathcal{O}_\infty^!$

Nous décrivons ici une structure cyclique naturelle sur l'opérade dans $\mathbf{K}\text{-sgrMod}$ sous-jacente à $\mathcal{O}_\infty^!$, pour $\mathcal{O}$ cyclique quadratique. On rappelle que cette opérade sous-jacente est l'opérade libre sur $\mathcal{O}^{\text{li}}$; il suffit donc de décrire la structure de $\mathfrak{S}_+$ -module de $\mathcal{O}^{\text{li}}$, le reste de la structure étant alors entièrement déterminé par les formules (2) et (3) de la proposition 1.3.3 page 13.

On a vu plus haut que

$$\mathcal{O}^! = (\Lambda \mathcal{O}^i)^\vee.$$

On en déduit, en l'appliquant à $\mathcal{O}^!$,

$$\mathcal{O} = (\Lambda \mathcal{O}^!)^\vee$$

puis

$$\mathcal{O}^! = \Lambda \mathcal{O}^\vee.$$

Au niveau des $\mathfrak{S}$ -modules, on a donc

$$\mathcal{O}^!(n) = \Pi^{n-1} \text{sgn}_n \otimes \mathcal{O}(n)^\vee.$$

Nous affirmons que si $\mathcal{O}$ est cyclique, on peut munir $\mathcal{O}^!$ d'une structure naturelle de $\mathfrak{S}_+$ -module par

$$\mathcal{O}^!(n) = \Pi^{n-1} \text{sgn}_{n+1} \otimes \mathcal{O}(n)^\vee,$$

où $\mathcal{O}^\vee$ est muni de la structure de $\mathfrak{S}_+$ -module héritée de $\mathcal{O}$.

4.3.2 Equivalence entre structure $\mathcal{O}_\infty^!$ invariante et champ de vecteurs symplectique

Soit maintenant $U \in \mathbf{K}\text{-sgrMod}$ de dimension finie muni d'une structure de $\mathcal{O}_\infty^!$ -algèbre avec forme bilinéaire invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Une telle forme bilinéaire est symétrique (remarque 1.3.7 page 15) ; on en note une base comme d'habitude par $(p_i, q_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(x_i)_{1 \leq i \leq m} = (e_i)_{1 \leq i \leq 2n+m}$, où cette fois les p_i, q_i sont de degré impair et les x_i de degré pair. Notons $(p^i, q^i)_{1 \leq i \leq n}$, $(x^i)_{1 \leq i \leq m} = (e^i)_{1 \leq i \leq 2n+m}$ la base duale de $U^\vee$; on peut munir $U^\vee$ de la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\langle x^i, x^j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \langle p^i, q^i \rangle = -\langle q^i, p^i \rangle = \delta_{ij}.$$

Cette forme induit une forme bilinéaire *antisymétrique* sur $\Pi U^\vee$, à laquelle on peut donc associer

$$\omega = \sum_{i=1}^n u \otimes dp^i \otimes dq^i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m u \otimes dx^j \otimes dx^j \in \text{DR}_\mathcal{O}^2(\widehat{\mathcal{O}}(\Pi U^\vee)).$$

En vertu de la proposition 4.2.1 page 31, la $\mathcal{O}_\infty^!$ -algèbre U donne lieu à un champ de vecteurs

$$m : \widehat{\mathcal{O}}(\Pi U^\vee) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}(\Pi U^\vee).$$

Le résultat crucial de cette section est que sous ces hypothèses, on a $\mathcal{L}_m \omega = 0$. Plus précisément :

Proposition 4.3.1. *Soit U une $\mathcal{O}_\infty^!$ -algèbre et soit $m \in \text{Der}(\widehat{\mathcal{O}}(\Pi U^\vee))$ la dérivation correspondante. Supposons que U est munie d'une forme bilinéaire symétrique et soit $\omega \in \text{DR}_\mathcal{O}^2(\widehat{\mathcal{O}}(\Pi U^\vee))$ correspondant à la forme antisymétrique induite sur $\Pi U^\vee$. Alors*

$$\mathcal{L}_m \omega = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{est une forme bilinéaire invariante.}$$

Une preuve de ce résultat est donnée, pour les cas *Ass*, *Lie* et *Com*, dans [HL, 10.6]. Nous croyons que le cas général peut se traiter en exprimant la dérivation m en termes des constantes de structure de U pour les opérations génératrices de $\mathcal{O}_\infty^!$, c'est-à-dire les éléments du $\mathfrak{S}$ -module $\mathcal{O}^!$.

4.4 Construction de classes dans le complexe de graphes

Nous en venons finalement au résultat principal.

Théorème 4.4.1. *Soit $\mathcal{O}$ une opérade cyclique quadratique, et soit U une $\mathcal{O}_\infty^1$ -algèbre de dimension finie $m|2n$ munie d'une forme bilinéaire invariante. Alors U donne lieu à une classe dans $H_k(\mathcal{OG})$ pour tout $k \geq 2$.*

Démonstration. En vertu des propositions 4.2.1 et 4.3.1, la structure de U peut se traduire par un champ de vecteurs *symplectique* $m : \widehat{\mathcal{O}}(\Pi U^\vee) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}(\Pi U^\vee)$ impair de carré nul. On a donc $[m, m] = 0$. Sous la correspondance du théorème 2.5.3, ce champ de vecteurs symplectique donne lieu à un élément

$$h \in \mathrm{DR}_\mathcal{O}^0(\widehat{\mathcal{O}}(V)) = \mathcal{LO}_{2n|m}$$

impair et tel que $[h, h] = 0$. La remarque 3.1.2 nous permet de construire un cycle dans $\Lambda^k \mathcal{LO}_{2n|m}$ et la proposition 3.2.2 nous permet de le transférer dans $H_k(\mathcal{OG})$. $\square$

Remarque 4.4.2. Le hamiltonien h de m peut s'exprimer en fonction des constantes de structure de U ; on peut ainsi retrouver la construction telle qu'initialement décrite par Kontsevich [Kon93, Kon94].

Bibliographie

- [AM69] M. F. ATIYAH et I. G. MACDONALD : *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley, 1969.
- [CV03] James CONANT et Karen VOGTMANN : On a theorem of Kontsevich. *Algebraic and Geometric Topology*, 3:1167–1224, 2003.
- [Fre09] Benoit FRESSE : *Modules over operads and functors*, volume 1967 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [Fuc86] Dmitry B. FUCHS : *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*. Contemporary Soviet Mathematics. Consultants Bureau, New York, 1986.
- [GK95] Ezra GETZLER et Mikhail M. KAPRANOV : Cyclic operads and cyclic homology. In S.-T. YAU, éditeur : *Geometry, Topology, and Physics for Raoul Bott*, pages 167–201, Cambridge, États-Unis, 1995. International Press.
- [Ham06] Alastair HAMILTON : A super-analogue of Kontsevich’s theorem on graph homology. *Lett. Math. Phys.*, 76(1):37–55, 2006.
- [HL] Alastair HAMILTON et Andrey LAZAREV : Homotopy algebras and noncommutative geometry. [arXiv:math.QA/0410621](https://arxiv.org/abs/math.QA/0410621).
- [HL08] Alastair HAMILTON et Andrey LAZAREV : Characteristic classes of A_∞ -algebras. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 3(1):65–111, 2008.
- [Kon93] Maxim KONTSEVICH : Formal (non)-commutative symplectic geometry. In *The Gel’fand Mathematical Seminars, 1990–1992*, pages 173–187, Boston, 1993. Birkhäuser.
- [Kon94] Maxim KONTSEVICH : Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress in Mathematics, II*, volume 120 de *Progress in Mathematics*, pages 97–121, Bâle, 1994. Birkhäuser.
- [LV12] Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE : *Algebraic Operads*, volume 346 de *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.
- [Mah] Swapneel MAHAJAN : Symplectic operad geometry and graph homology. [arXiv:math/0211464v1](https://arxiv.org/abs/math/0211464v1) [[math.QA](https://arxiv.org/abs/math.QA)].
- [Min] Vincent MINERBE : An introduction to differential geometry. URL : <http://www.math.jussieu.fr/~minerbe/m2dg.pdf>.
- [ML98] Saunders MAC LANE : *Categories for the working mathematician*, volume 5 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1998.
- [MSS02] Martin MARKL, Steve SHNIDER et Jim STASHEFF : *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

Cochains

David Waszek

Supervisor : Prof. I. Grojnowski

Introduction

The goal of this essay is to show how certain algebras of differential forms may be used to describe the rational homotopy type of a topological space or of a continuous map.

For the sake of technical simplicity, we shall restrict our attention to simply-connected topological spaces; however, the methods we present generalize to *nilpotent spaces* (for a general discussion of nilpotent spaces, see [McC01, chap. 8*bis*]; for a treatment of rational homotopy theory in this setting see [BG76]), and similar tools may be used to study the nilpotent part of the fundamental group of any topological space (see [GM81, chap. XII]).

We first need a suitable notion of rational homotopy type. Given a topological space X , one can for instance try and compute $H_*(X; \mathbf{Q}) = H_*(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$; in his 1951 thesis [Ser51], Jean-Pierre Serre, applying this formula to Eilenberg-MacLane spaces and using what is now known as the Leray-Serre spectral sequence, showed how, in some cases, one could also compute the *rational homotopy groups* $\pi_* \otimes \mathbf{Q}$ of a topological space. This all amounts to extracting rational homotopy-theoretic information about a space.

However, Serre's methods also allowed him, in [Ser51] and in his subsequent paper [Ser53], to prove a rational version of "Whitehead's theorem", namely: a continuous map between simply-connected spaces induces isomorphisms on rational homotopy groups if and only if it induces isomorphisms on rational homology groups. Thus one can define a *rational homotopy equivalence* to be a map satisfying these conditions, and say that two simply-connected spaces have the *same rational homotopy type* if there is a chain of rational homotopy equivalences

$$X \rightarrow Z_1 \leftarrow Z_2 \leftarrow \dots \rightarrow Y$$

connecting them. On the other hand, it is not clear what the rational homotopy type of a map should be.

To phrase this question in very general terms, what we need is a *localization* of the category of simply-connected topological spaces with respect to the rational homotopy equivalences.

Definition. Let $\mathcal{C}$ be a category and let S be a class of arrows of $\mathcal{C}$. A *localization* of $\mathcal{C}$ with respect to S is a functor $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ such that

- (1) for every $f \in S$, $\gamma(f)$ is an isomorphism;
- (2) for every other functor $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ sending the arrows of S to isomorphisms, there is a unique $G : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow D$ such that $F = G\gamma$.

If it exists, such a localization is unique up to isomorphism.

Example. Let $\mathcal{A}$ be the category of abelian groups, and let $\mathcal{C}$ be the category with the same objects as $\mathcal{A}$ but with maps

$$\mathcal{C}(G, H) = \mathcal{A}(G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}, H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}).$$

Then the functor $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ which is the identity on objects and which sends a map f to $f \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ is a localization of $\mathcal{A}$ with respect to the maps whose kernel and cokernel are torsion. Notice that $\mathcal{C}$ is equivalent to the full subcategory of $\mathcal{A}$ whose objects are the groups G such that $G \cong G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ (by abuse of language, we shall frequently refer to such groups as *rational vector spaces*).

A *rational homotopy category* can be constructed formally by inverting the rational homotopy equivalences; using his theory of model categories, Quillen [Qui69, II.6] showed it to be equivalent to the category of simply-connected CW complexes all of whose homotopy groups are rational vector spaces. His method, however, is not as straightforward as one might hope, since the absence of coproducts in the category of simply-connected spaces means that it cannot be naively endowed with a model category structure.

We shall follow a more direct approach (due to Sullivan [Sul70, Sul74]) and construct, for any simply-connected space X , a rational homotopy equivalence $X \rightarrow X_{\mathbf{Q}}$, where $X_{\mathbf{Q}}$ is a CW complex all of whose homotopy groups are rational vector spaces. This map will behave very much like localization in the category of $\mathbf{Z}$ -modules, and will allow us to associate to every homotopy class of maps $X \rightarrow Y$ a unique homotopy class of maps $X_{\mathbf{Q}} \rightarrow Y_{\mathbf{Q}}$, thereby defining a notion of rational homotopy type for maps. Along the way, we obtain a characterization of the rational homotopy type of a space by its *rational Postnikov tower*.

The correspondence between algebra and topology which is at the core of Sullivan's theory then works as follows. One starts with a simply-connected topological space X of *finite type* (i.e. all of whose Betti numbers are finite — the cohomology of X need not be finite-dimensional), and associates to X a natural *commutative* differential graded algebra $A^*(X)$ over the rationals which computes the rational singular cohomology of X . (Note that the singular cochain algebra $C^*(X; \mathbf{Q})$ is not commutative, although the induced cohomology algebra is.) From $A^*(X)$ one constructs a certain free algebra $(\Lambda V, d)$ satisfying some minimality condition, such that there is a map $(\Lambda V, d) \rightarrow A^*(X)$ inducing an isomorphism on cohomology. This *minimal model* for $A^*(X)$, which is a kind of algebraic analogue of the Postnikov tower, is shown to be unique up to isomorphism. Moreover, there is an exact structural correspondence between this model and the rational Postnikov tower of X : the model may be built “in stages” from the tower, and the tower may be recovered from the model. Therefore, the minimal model contains all the rational homotopy-theoretic information about X ; for instance, the dimension of $\pi_n(X) \otimes \mathbf{Q}$ is equal to the number of generators of $(\Lambda V, d)$ in degree n . Going the other way, any minimal algebra over $\mathbf{Q}$ of finite type arises as the minimal model of $A^*(X)$ for some space X .

Similarly, one can represent any map between simply-connected spaces X and Y by a map between the minimal models for $A^*(X)$ and $A^*(Y)$, and there is a converse. But to make it precise, as well as to prove the uniqueness of the minimal model (which is essential to establish the structural correspondence described above), it is necessary to develop a homotopy theory for commutative differential algebras.

Sullivan used his construction of rational differential forms to transfer to algebra the topological notion of homotopy, and developed an algebraic obstruction theory, strongly analogous to that of topological spaces (his original methods may be found in the Friedlander-Griffiths-Morgan lecture notes [GM81], dating back to 1970–1971). We shall follow a slightly different path: we found Quillen’s axiomatic approach to homotopy theory (first exposed in [Qui67]), through model categories, to be a compelling tool both conceptually and technically; it makes the analogies between topological spaces and algebras precise and allows one to streamline the proofs in a very efficient way. Therefore, and though we by no means use model categories to their full power in this essay, we decided to develop the homotopy theory of commutative differential graded algebras in this framework. In doing so we heavily relied on [BG76].

We now give a rough outline of the essay. In section 1, we first review some classical results about Postnikov towers and introduce the notions of principal fibration and of k -invariant. We then present the Leray-Serre spectral sequence and apply it to prove a rational form of the Hurewicz theorem. In section 2, we discuss rational homotopy type; using the tools of section 1, we introduce the notion of rational space and of localization, we prove the existence of a localization in the simply-connected case, and show how the rational homotopy type of a simply-connected CW complex is entirely characterized by its rational Postnikov tower of principal fibrations. In section 3 we develop the homotopy theory of commutative differential graded algebras, using Quillen’s model categories. We prove the existence and uniqueness of the minimal model of a simply-connected CDGA, and briefly discuss homotopy categories. In section 4 we present Sullivan’s structural correspondence between minimal models and rational Postnikov towers; this requires a rather lengthy discussion of the transgression map of a fibration. Our end result may be phrased in the following way: the rational homotopy category of simply-connected topological spaces of finite type is equivalent to the homotopy category of simply-connected CDGAs over $\mathbf{Q}$ of finite type. We briefly describe Sullivan’s “PL forms” but do not construct them in any detail. We explain how to relate these to the algebra of smooth forms on a manifold and discuss the notion of real homotopy type.

Finally, we would like to thank our supervisor Prof. Grojnowski for guiding us to this beautiful theory.

Contents

1	Postnikov towers and the Leray-Serre spectral sequence	5
1.1	Weak homotopy type	5
1.2	Eilenberg-MacLane spaces, principal fibrations and k-invariants .	7
1.3	The Leray-Serre spectral sequences	9
1.4	The Hurewicz-Serre theorem	11
2	Rational homotopy type	14
2.1	Rational homotopy equivalences	14
2.2	Rational spaces	15
2.3	Localization and rational homotopy type	17
2.4	The rational Postnikov tower	19
3	A homotopy theory for CDGAs	22
3.1	Model categories	23
3.2	The model category of CDGAs	28
3.3	The homotopy relation for maps of CDGAs	30
3.4	Minimal models	31
4	Differential forms and rational homotopy type	35
4.1	Rational differential forms	35
4.2	The transgression map	36
4.3	Rational Postnikov tower and minimal model	40
4.4	Smooth differential forms and real homotopy type	42
	Bibliography	44

Section 1

Postnikov towers and the Leray-Serre spectral sequence

We first define weak homotopy type and recall how the weak homotopy type of a space is completely described by its Postnikov tower. Next, we review some material about Eilenberg-MacLane spaces and the links between homotopy and cohomology; this allows us to define the k -invariant of a principal fibration — an essential tool throughout the essay — and to analyze further the Postnikov tower of a simply-connected CW complex.

In the second half of this section we introduce the Leray-Serre spectral sequence and use it inductively on the Postnikov tower of a space to prove a rational Hurewicz theorem, which is the foundation stone of all our later study of rational homotopy type. An easy adaptation of these methods would allow one to compute the rational homotopy groups of spheres; we do not carry out this computation, but it is easily found in the literature (see for instance [BT82] or [Hat]).

1.1 Weak homotopy type

Definition 1.1.1. A continuous map $f : X \rightarrow Y$ is called a *weak (homotopy) equivalence* if

$$\pi_i(f) : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y) \text{ is an isomorphism for all } i \geq 0;$$

two spaces are said to have the *same weak homotopy type* if there is a chain of weak equivalences

$$X \rightarrow Z_1 \leftarrow Z_2 \leftarrow \dots \rightarrow Y$$

connecting them.

Remark 1.1.2. It is a theorem of Whitehead that two weakly equivalent CW complexes are in fact homotopy equivalent; see [Hat02, pp. 346–347]. Since we are mostly interested in CW complexes, this notion might therefore seem superfluous. It is however an exact prototype for the rational homotopy type to be defined in section 2, and is also an essential part of the simplest example of a model category structure (see section 3); this is why we are discussing it here.

We first quote the following classical result from homotopy theory. See for instance [Hat02, pp. 352–353].

Proposition 1.1.3. *Let X be a topological space. There is a CW complex X_0 and a weak homotopy equivalence $X_0 \rightarrow X$; moreover X_0 is unique up to homotopy equivalence.*

An easy consequence of the Hurewicz theorem is that a weak equivalence between simply-connected spaces also induces isomorphisms on homology and cohomology groups.

Proposition 1.1.4. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a weak homotopy equivalence between simply-connected spaces. Then*

$$H_i(f) : H_i(X) \rightarrow H_i(Y) \text{ and } H^i(f) : H^i(Y) \rightarrow H^i(X)$$

are isomorphisms for all $i \geq 0$.

Proof. Make f an inclusion by replacing Y by the homotopy equivalent space given by the mapping cylinder of f . The homotopy long exact sequence for the pair (Y, X) gives $\pi_i(Y, X, x_0) = 0$ for all $i > 0$; the (relative) Hurewicz theorem then gives $H_i(Y, X) = 0$ for all i . The conclusion follows from the homology long exact sequence and (for cohomology) from the universal coefficient theorem. $\square$

Recall that a *fibration* $E \xrightarrow{p} B$ is a map satisfying the homotopy lifting property for any space; if the base B is path-connected, the fibres over every point are all homotopy equivalent, so in this setting, the fibre of the fibration is well-defined up to homotopy. Additionally, the homotopy groups of the fibre, of the total space and of the base fit in a long exact sequence. See for example [BT82, p. 199 sqq.] for details. We shall often use the notation $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$.

Let X be a connected topological space. We can construct a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} & & \vdots \\ & & X_3 \\ & \nearrow i_3 & \downarrow p_2 \\ & X_2 & \\ & \nearrow i_2 & \downarrow p_1 \\ X & \xrightarrow{i_1} & X_1 \end{array}$$

where:

- (1) The maps $X \xrightarrow{i_n} X_n$ induce isomorphisms on π_i , $i \leq n$;
- (2) $\pi_i(X_n) = 0$ for $i > n$;
- (3) the maps $X_{n+1} \xrightarrow{p_n} X_n$ are fibrations.

Such a system of fibrations is called a *Postnikov tower* for X .

Remark 1.1.5. The easiest way to build a suitable X_n is to attach cells of dimension $n+2$ and higher to X so as to kill all homotopy groups of dimension greater than n ; see [Hat02, pp. 354–355].

We shall make repeated use of such systems, in the remainder of this section, to study X through inductive arguments over the X_n . The following lemma will be useful. It is easily proved, through a cell-by-cell Mayer-Vietoris argument, for a Postnikov tower $\{X_n, p_n, i_n\}$ constructed as suggested in remark 1.1.5 on the preceding page; it may be extended to any other Postnikov tower $\{X'_n, p'_n, i'_n\}$, since we can prove that there always exists weak homotopy equivalences $X_n \rightarrow X'_n$.

Lemma 1.1.6. *Let $\{X_n, p_n, i_n\}$ be a Postnikov tower for X . Then*

$$H_k(i_n) : H_k(X) \rightarrow H_k(X_n)$$

is an isomorphism for $1 \leq k \leq n$ and a surjection for $k = n + 1$.

We now state an important fact that prepares the ground for our study of rational homotopy type in section 2. See [Hat02, pp. 410-411] for a proof.

Proposition 1.1.7. *Let $\{X_n, p_n, i_n\}$ be a Postnikov tower for X . The map*

$$X \rightarrow \varprojlim X_n.$$

is a weak homotopy equivalence.

In other words, a Postnikov tower for X characterizes X entirely up to weak homotopy equivalence.

1.2 Eilenberg-MacLane spaces, principal fibrations and k-invariants

We are now going to analyse further the Postnikov towers of CW-complexes; this will lead us to a complete and economic classification of weak homotopy types, which we shall use in section 2.

From now on, we shall be working with CW-complexes; we assume that basepoints have been chosen, but usually omit mentioning them in order to keep the notations as simple as possible. We shall write $[X, Y]$ for the set of homotopy classes of maps $X \rightarrow Y$, and $\langle X, Y \rangle$ for the set of homotopy classes of basepoint preserving maps $X \rightarrow Y$.

We first discuss Eilenberg-MacLane spaces and principal fibrations.

Definition 1.2.1. An *Eilenberg-MacLane space of type (G, n)* is a topological space K such that

$$\pi_i(K) \cong \begin{cases} G & \text{if } i = n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We have the following. For a proof see [Hat02, pp. 365-366].

Proposition 1.2.2. *For every integer $n \geq 0$ and every group G , with G abelian if $n > 1$, there exists a CW complex which is an Eilenberg-MacLane space of type (G, n) . It is unique up to homotopy equivalence. We shall use the notation $K(G, n)$ to denote any such CW complex equipped with an identification*

$$\chi_{K(G, n)} : G \xrightarrow{\cong} \pi_n(K(G, n), *).$$

Moreover, consider two Eilenberg-MacLane spaces $K(G, n)$ and $K(H, n)$ and a homomorphism $\phi : G \rightarrow H$. Then there is a basepoint preserving map $f : K(G, n) \rightarrow K(H, n)$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ \chi_{K(G, n)} \downarrow & & \downarrow \chi_{K(H, n)} \\ \pi_n(K(G, n), *) & \xrightarrow{\pi_n(f)} & \pi_n(K(H, n), *) \end{array}$$

commutes.

The following fundamental theorem may be proved in two ways: either through very abstract and general methods, as in [Hat02, section 4.3], or through a rather transparent application of the so-called “obstruction theory”, which unfortunately requires cumbersome prerequisites. A readable and concise sketch of the latter approach may be found in [GM81, chapters V–VI].

Theorem 1.2.3. *Let X be a CW complex and let π be an abelian group. For every $n \geq 1$, there is a natural bijection*

$$T : \langle X, K(\pi, n) \rangle \rightarrow H^n(X; \pi).$$

Moreover, this bijection is of the form

$$T : \phi \mapsto H^n(\phi)(\alpha)$$

for some class $\alpha \in H^n(K(\pi, n); \pi)$.

Here, naturality means that for any $f : X \rightarrow K(\pi, n)$ and $g : Y \rightarrow X$, we have $T([gf]) = H^n(g)(T([f]))$.

Remark 1.2.4. The $\alpha \in H^n(K(\pi, n); \pi)$ in the statement of the theorem may be taken to be the class corresponding to the morphism $\kappa : H_n(K(\pi, n); \mathbf{Z}) \rightarrow \pi$ such that the composite

$$\pi \xrightarrow{\chi_{K(\pi, n)}} \pi_n(K(\pi, n), *) \xrightarrow{h} H_n(K(\pi, n); \mathbf{Z}) \xrightarrow{\kappa} \pi,$$

where h is the Hurewicz isomorphism, is the identity. We shall call this α the *fundamental class* of $K(\pi, n)$.

Remark 1.2.5. If $n > 1$, then $K(\pi, n)$ is simply-connected, and therefore the natural map $\langle X, K(\pi, n) \rangle \rightarrow [X, K(\pi, n)]$ is a bijection (see [Hat02, section 4.A]). Thus if $n > 1$ there is a bijection $[X, K(\pi, n)] \rightarrow H^n(X; \pi)$; it is natural with respect to *simply-connected* spaces X .

Let us now revert to the study of Postnikov towers. Let $\{X_n, p_n, i_n\}$ be a Postnikov tower for the CW complex X ; we may choose the X_n to be CW complexes (see remark 1.1.5 on page 6). The fibre of $F \hookrightarrow X_{n+1} \rightarrow X_n$ is an Eilenberg-MacLane space $K(\pi_{n+1}(X), n+1)$, as can be seen from the homotopy long exact sequence; in general, we call a fibration with fibre some $K(\pi, n)$ a (π, n) -fibration.

Definition 1.2.6. Let B be a connected CW complex. We say that $K(\pi, n) \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ is a *principal* (π, n) -fibration if it is a pullback of the pathspace fibration over $K(\pi, n+1)$.

$$\begin{array}{ccccc} K(\pi, n) & \longrightarrow & E & \longrightarrow & PK(\pi, n+1) \\ & & \downarrow p & & \downarrow \\ & & B & \xrightarrow{k} & K(\pi, n+1) \end{array}$$

The map $k : B \rightarrow K(\pi, n+1)$ in the previous definition corresponds to a class $H^{n+1}(B; \pi)$ according to theorem 1.2.3 on the preceding page (and to remark 1.2.5); this class is a *well-defined invariant of the fibration*, as may be proved by identifying it to a class intrinsically defined in terms of the map $E \rightarrow B$ (see [GM81, chap. VI]). It is called the *k-invariant* of the principal fibration.

Remark 1.2.7. Using the explicit form of the correspondence between maps into $K(\pi, n+1)$ and classes in $H^{n+1}(B; \pi)$ together with remark 1.2.4, we can describe the k-invariant of p as the pullback by k of the fundamental class of $K(\pi, n+1)$.

The main result of this section is the following. For a proof see for instance [Spa66, p. 440 sqq.].

Theorem 1.2.8. *Let X be a simply-connected CW complex. Then X has a Postnikov tower $\{X_n, p_n, i_n\}$ where the X_n are CW complexes and the p_n are principal fibrations, as in the diagram below.*

$$\begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \\ & & X_4 & \xrightarrow{k_4} & K(\pi_5(X), 6) \\ & \nearrow i_4 & \downarrow p_3 & & \\ & & X_3 & \xrightarrow{k_3} & K(\pi_4(X), 5) \\ & \nearrow i_3 & \downarrow p_2 & & \\ X & \xrightarrow{i_2} & X_2 = K(\pi_2(X), 2) & \xrightarrow{k_2} & K(\pi_3(X), 4) \end{array}$$

The *k-invariant* of the fibration $K(\pi_{n+1}(X), n+1) \hookrightarrow X_{n+1} \rightarrow X_n$, which is a cohomology class in $H^{n+2}(X_n; \pi_{n+1}(X))$, is called the *n-th k-invariant* of X .

So for a simply-connected CW complex X , the homotopy groups and the k-invariants of X characterize the (weak) homotopy type of X entirely.

1.3 The Leray-Serre spectral sequences

We are now going to state the two main theorems about the Leray-Serre spectral sequence. We refer the reader to [BT82] for a nice construction of the spectral sequence, and to [McC01] for reference.

Theorem 1.3.1 (Leray-Serre for homology). *Let $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ be a fibration with B simply-connected and F path-connected; let G be any abelian group. There is a first quadrant spectral sequence $\{E_{*,*}^r, d^r\}$, $d^r : E_{*,*}^r \rightarrow E_{*-r, *+r-1}^r$, converging to $H_*(E; G)$ with*

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; H_q(F; G)).$$

Theorem 1.3.2 (Leray-Serre for cohomology). *Let $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ be a fibration with B simply-connected and F path-connected; let G be any abelian group. There is a first quadrant spectral sequence of algebras $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, $d_r : E_r^{*,*} \rightarrow E_r^{*+r,*-r+1}$, converging to $H^*(E; G)$ as an algebra, with*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F; G)).$$

If additionally $G = \mathbf{k}$ is a field, we have

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; k) \otimes_k H^q(F; k)$$

as algebras.

Remark 1.3.3. Under the hypotheses of theorem 1.3.1, the map $H_i(f; G) : H_i(E; G) \rightarrow H_i(B; G)$ may be recovered as the composite

$$H_i(E; G) \rightarrow E_{i,0}^\infty \cong E_{i,0}^{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow E_{i,0}^2 \cong H_i(B; G).$$

There is a dual statement for cohomology.

The reader may assume that we are working with $\mathbf{Z}$ coefficients wherever no further precision is given.

As a first application, we sketch a proof of the following lemma, which will be of repeated use.

Lemma 1.3.4. *For any $n > 0$, $H^*(K(\mathbf{Z}, n); \mathbf{Q})$ is the free algebra (in the graded commutative sense) over $\mathbf{Q}$ on one generator of degree n ; that is, a polynomial algebra on one generator when n is even, and an exterior algebra on one generator when n is odd.*

Proof. The proof is inductive over n . The base case is immediate since $K(\mathbf{Z}, 1) \simeq S^1$. Now suppose the result has been proved for some odd n , and consider the rational cohomology spectral sequence associated to the pathspace fibration $K(\mathbf{Z}, n) \hookrightarrow PK(\mathbf{Z}, n+1) \rightarrow K(\mathbf{Z}, n+1)$. We show that the E_2 term, which is also the E_{n+1} term, looks like:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
& \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& 0 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
n & \mathbf{Q}a & & & & & \mathbf{Q}ab & & & & & & & & & \mathbf{Q}ab^2 & & \\
& 0 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& 0 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& \mathbf{Q} & 0 & \dots & 0 & & \mathbf{Q}b & 0 & \dots & 0 & & & & \mathbf{Q}b^2 & \dots & & \\
\hline
& & & & & & n+1 & & & & & & & 2(n+1) & & &
\end{array}$$

Indeed, the maps $d_{n+1} : E_{n+1}^{i,n} \rightarrow E_{n+1}^{i+n+1,0}$ have to be isomorphisms since the total space of the fibration is contractible. This immediately gives us the additive structure of $H^*(K(\mathbf{Z}, n+1); \mathbf{Q})$. Now let a be a generator of $H^n(K(\mathbf{Z}, n); \mathbf{Q}) \cong E_2^{0,n}$, and let b be its image under d_{n+1} ; it is a generator of $H^{n+1}(K(\mathbf{Z}, n+1); \mathbf{Q}) \cong E_2^{n+1,0}$. From the fact that

$$E_2^{p,q} \cong H^p(K(\mathbf{Z}, n+1); \mathbf{Q}) \otimes H^q(K(\mathbf{Z}, n); \mathbf{Q})$$

we deduce that $E_{n+1}^{n+1,n}$ is generated by ab ; then the graded Leibniz rule for d_{n+1} implies that $H^{2(n+1)}(K(\mathbf{Z}, n+1); \mathbf{Q})$ is generated by b^2 . In the same way $E_{n+1}^{2(n+1),n}$ is generated by ab^2 and $H^{3(n+1)}(K(\mathbf{Z}, n+1); \mathbf{Q})$ by b^3 ; and so on. The case when n is even is similar. $\square$

1.4 The Hurewicz-Serre theorem

Our next goal is to prove the following *rational* version of the Hurewicz theorem. Recall that an abelian group G is said to be *torsion* if $G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 0$.

Theorem 1.4.1 (Rational Hurewicz). *Let X be a simply-connected space. If $\pi_i(X)$ is torsion for $1 \leq i < n$, then $H_i(X)$ is torsion for $1 \leq i < n$ and there is an isomorphism*

$$\pi_n(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \xrightarrow{\cong} H_n(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

This theorem only relies on the following three properties of the collection $\mathcal{C}$ of torsion abelian groups:

- (1) for any short exact sequence $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ of abelian groups,

$$M \in \mathcal{C} \iff L \text{ and } N \in \mathcal{C};$$

- (2) for any $A, B \in \mathcal{C}$, $A \otimes_{\mathbf{Z}} B \in \mathcal{C}$ and $\text{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$;

- (3) for any $G \in \mathcal{C}$, $H_i(K(G, 1)) \in \mathcal{C}$ for all $i > 0$ (in other words, the positive dimensional homology groups of G are in $\mathcal{C}$).

Let us briefly check these. Property (1) and the first part of (2) are immediate. The second part of (2) and (3) are first proved for sums of cyclic groups, using the explicit construction of $K(\mathbf{Z}_m, 1)$ (as an infinite-dimensional lens space) and the Künneth theorem. Then, one may write G as a direct limit of sums of cyclic groups, and use the second part of proposition 1.2.2 on page 7 to get a direct system of Eilenberg-MacLane spaces converging to an Eilenberg-MacLane space of type (G, n) . To conclude, recall that H_* and Tor commute with direct limits (see [Hat02, p. 244 and p. 267]).

For any collection of abelian groups satisfying these three properties (in the language of [Ser53], for any *class* of abelian groups satisfying Serre's properties (II_A) and (III)), a similar generalized Hurewicz theorem holds, as follows. Note that property (1) implies that the trivial group is in $\mathcal{C}$.

Theorem 1.4.2 (Hurewicz-Serre). *Let X be a simply-connected space, and let $\mathcal{C}$ be a collection of abelian groups satisfying the properties above. If $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$*

for $1 \leq i < n$, then $H_i(X) \in \mathcal{C}$ for $1 \leq i < n$ and there is an isomorphism modulo $\mathcal{C}$ between $\pi_n(X)$ and $H_n(X)$: a map

$$\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

whose kernel and cokernel are in $\mathcal{C}$.

Example 1.4.3. This theorem may be applied to the collection of finitely generated abelian groups; it easily follows that any space all of whose homology groups are finitely generated also has finitely generated homotopy groups. In particular, the homotopy groups of spheres are finitely generated.

The proofs being identical, we shall prove theorem 1.4.1 on the previous page in this generalized form. We start with a lemma.

Lemma 1.4.4. *Let $\mathcal{C}$ be a collection of abelian groups satisfying the properties above, and $G \in \mathcal{C}$. Then*

$$H_i(K(G, n)) \in \mathcal{C}$$

for every $i \geq 1, n \geq 1$.

Proof. The case $n = 1$ is property (3) above. From there, use the homology Leray-Serre spectral sequence inductively on the pathspace fibration below.

$$\begin{array}{ccc} \Omega K(G, n+1) \simeq K(G, n) & \hookrightarrow & PK(G, n+1) \simeq * \\ & & \downarrow \\ & & K(G, n+1) \end{array}$$

At every step, prove that $H_i(K(G, n+1)) \in \mathcal{C}$ ($i > 0$) inductively on i , using the fact that $H_i(K(G, n+1)) \cong E_{i,0}^2$ ($i > 0$) has to be killed by some terms $E_{p,q}^r$ for $q < i$. Now from (1) we see that $E_{p,q}^r$ is in $\mathcal{C}$ whenever $E_{p,q}^2$ is, and from (2) and the universal coefficient theorem we see that $E_{p,q}^2$ is in $\mathcal{C}$ if $E_{p,0}^2$ and $E_{0,q}^2$ are. $\square$

Proof of theorem 1.4.2 on the preceding page. Consider the Postnikov tower for X . We shall show inductively on $2 \leq k < n$ that $H_i(X_k) \in \mathcal{C}$ for all $i > 0$. Since $H_k(X) = H_k(X_k)$ (cf. lemma 1.1.6 on page 7), this will in particular prove the first half of the proposition. As long as $\pi_k(X) = 0$, the result is obvious, X_k then being contractible; for $k = k_0$, the dimension of the first non-trivial homotopy group, it is our lemma, since $X_{k_0} = K(\pi_{k_0}(X), k_0)$. Now consider the Leray-Serre homology spectral sequence for the fibration $F = K(\pi_k(X), k) \hookrightarrow X_k \rightarrow X_{k-1}$. Since the positive degree homology groups of the base space and of the fibre are in $\mathcal{C}$, the universal coefficient theorem and property (2) together give

$$E_{p,q}^2 = H_p(X_{k-1}) \otimes H_q(F) \oplus \text{Tor}(X_{k-1}, F) \in \mathcal{C} \text{ for } (p, q) \neq (0, 0).$$

Using property (1) we then get $H_i(X_k) \in \mathcal{C}$ for $i > 0$.

Finally, consider the fibration $K(\pi_n(X), n) \hookrightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$. The E^2 term of the homology Leray-Serre spectral sequence looks like:

$$\begin{array}{c|c}
\pi_n(X) & \\
0 & \\
\vdots & \\
0 & \\
\mathbf{Z} & H_i(X_{n-1}) \in \mathcal{C}
\end{array}$$

and so we may write $H_n(X) = H_n(X_n)$ as an extension

$$0 \rightarrow E_{0,n}^\infty \rightarrow H_n(X) \rightarrow E_{n,0}^\infty \rightarrow 0;$$

but since $d^n : H_{n+1}(X_{n-1}) \rightarrow \pi_n(X)$ is the only differential affecting $E_{0,n}^*$, we also have a short exact sequence

$$0 \rightarrow H_{n+1}(X_{n-1}) \xrightarrow{d^n} \pi_n(X) \rightarrow E_{0,n}^\infty \rightarrow 0.$$

Combining these two, we get a map $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ whose kernel and cokernel are in $\mathcal{C}$. $\square$

Remark 1.4.5. This result may be generalized to the non simply-connected case, with $\pi_1(X) \in \mathcal{C}$, provided X is path-connected, $\pi_1(X)$ is abelian and the action of $\pi_1(X)$ on all higher homotopy groups $\pi_n(X)$ is trivial (such a space is occasionally called *simple* or *abelian*). See for instance [Hat, chap. I, pp. 14–17].

We shall gather some important corollaries of this result in the next section, when studying rational homotopy type.

Section 2

Rational homotopy type

The aim of this section is double: to define a suitable notion of rational homotopy type for spaces and maps, and to give a description of the rational homotopy type of a space through a rational analogue of the Postnikov tower of principal fibrations of section 1. This description will form the topological basis of the correspondence exposed in section 4.

2.1 Rational homotopy equivalences

We first introduce the rational homotopy type of a space, along the lines sketched in the introduction; our definition is mirrored on the weak homotopy type defined in section 1.

Definition 2.1.1. A map $f : X \rightarrow Y$ is called a rational (homotopy) equivalence if the localized map

$$\pi_i(f) \otimes \mathbf{Q} : \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \pi_i(Y) \otimes \mathbf{Q}$$

is an isomorphism for all $i \geq 0$. Two spaces are said to have the *same rational homotopy type* if there is a chain of rational equivalences

$$X \rightarrow Z_1 \leftarrow Z_2 \leftarrow \dots \rightarrow Y$$

connecting them.

There is an analogue of proposition 1.1.4 for rational homotopy equivalences, which relies on the rational Hurewicz theorem. First, note that the universal coefficient theorem gives us an isomorphism $H_*(X; \mathbf{Q}) \cong H_*(X) \otimes \mathbf{Q}$ under which $H_*(f, \mathbf{Q})$ is identified with the localized map $H_*(f) \otimes \mathbf{Q}$. Similarly, we have an isomorphism $H^*(X; \mathbf{Q}) \cong \text{Hom}(H_*(X); \mathbf{Q})$ identifying $H^*(f; \mathbf{Q})$ with the dual over $\mathbf{Q}$ of $H_*(f)$; this map, in turn, is readily identified with the dual of $H_*(f; \mathbf{Q})$.

Proposition 2.1.2. *Let $f : X \rightarrow Y$ be a rational homotopy equivalence between simply-connected spaces. Then*

$$H_i(f; \mathbf{Q}) : H_i(X; \mathbf{Q}) \rightarrow H_i(Y; \mathbf{Q}) \text{ and } H^i(f; \mathbf{Q}) : H^i(Y; \mathbf{Q}) \rightarrow H^i(X; \mathbf{Q})$$

are isomorphisms for all $i \geq 0$.

Proof. In light of our discussion above, it suffices to show the result for homology.

We shall first make the additional hypothesis that $\pi_2(f) : \pi_2(X) \rightarrow \pi_2(Y)$ is onto. Up to homotopy equivalence, we may convert f into a fibration $F \hookrightarrow X \rightarrow Y$; since localization preserves exactness, the homotopy long exact sequence of the fibration gives

$$\pi_i(F) \otimes \mathbf{Q} = 0 \text{ for } i \geq 1.$$

Our additional hypothesis guarantees $\pi_1(F) = 0$. We may therefore apply the rational Hurewicz theorem to F : we obtain

$$H_i(F; \mathbf{Q}) = 0 \text{ for } i \geq 1.$$

Hence the homology Leray-Serre spectral sequence with rational coefficients for this fibration collapses at the E^2 term, and the conclusion immediately follows from remark 1.3.3 on page 10.

In the general case, $\pi_1(F)$ is torsion, but F need not be simply-connected. However, one can prove that F is an H-space, and therefore simple; see [Spa66, p. 511] for details. One may then invoke the strengthened Hurewicz-Serre theorem mentioned in remark 1.4.5 on page 13 and proceed as above. $\square$

Remark 2.1.3. It is also possible to prove this statement using a relative version of the rational Hurewicz theorem, thus mirroring the proof of proposition 1.1.4 on page 6; this is the approach of Serre's original paper [Ser53]. It requires the (reasonably straightforward) development of a relative version of the Leray-Serre spectral sequence. In any case, some additional arguments are needed when $\pi_2(f)$ is not onto; this point is easily overlooked, as in [GM81, p. 89].

Example 2.1.4. If $n \geq 2$, there is a rational homotopy equivalence $K(\mathbf{Z}, n) \rightarrow K(\mathbf{Q}, n)$ (take a map that realizes the inclusion $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$; it induces isomorphisms on rational homotopy groups). We may therefore immediately deduce from lemma 1.3.4 on page 10 that $H^*(K(\mathbf{Q}, n); \mathbf{Q})$ is a free (graded commutative) algebra on one generator of degree n .

More generally, let V be a rational vector space. Then $H^*(K(V, n); \mathbf{Q})$ is a free algebra generated in dimension n ; hence it is the free algebra on $H^n(K(V, n); \mathbf{Q}) \cong \text{Hom}(H_n(K(V, n); \mathbf{Z}), \mathbf{Q}) \cong \text{Hom}(V, \mathbf{Q}) = V^*$.

2.2 Rational spaces

As explained in the introduction, we shall show below that any *simply-connected* CW complex X is rationally equivalent to a certain *rational* CW complex $X_{\mathbf{Q}}$. We first need to make sense of that notion of rational space; this is done through the following result.

Theorem 2.2.1. *Let X be a simply-connected space. The following conditions are equivalent:*

- (1) $\pi_i(X)$ is a rational vector space for all $i \geq 1$;
- (2) $H_i(X)$ is a rational vector space for all $i \geq 1$.

A simply-connected space satisfying these conditions is said to be rational.

Note that this is not a special case of the Hurewicz-Serre theorem, since the collection of rational vector spaces does not satisfy property (1) of 1.4; however, it does satisfy the weaker property that any extension of two rational vector spaces is a rational vector space, as well as property (2). This allows us to prove the following lemma, an analogue of which we used in the proof of the Hurewicz-Serre theorem.

Lemma 2.2.2. *Let $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ be a fibration. If the integral homology groups $H_{>0}(F; \mathbf{Z})$ and of $H_{>0}(B; \mathbf{Z})$ are rational vector spaces, then so are the $H_{>0}(E; \mathbf{Z})$.*

Proof. For the homology Leray-Serre spectral sequence associated to the fibration, we have

$$E_{p,q}^2 = H_p(E; \mathbf{Z}) \otimes H_q(F; \mathbf{Z})$$

as there is no torsion term; the $E_{p,q}^2$, $(p, q) \neq (0, 0)$, are therefore rational vector spaces. It is an easy exercise that any homomorphism of abelian groups between rational vector spaces is necessarily $\mathbf{Q}$ -linear; in particular its kernel and image are rational vector spaces. This implies that the $E_{p,q}^\infty$, $(p, q) \neq (0, 0)$, are rational vector spaces. Thus for $i > 0$, $H_i(E; \mathbf{Z})$ is obtained as the result of successive extensions of rational vector spaces, and the result follows. $\square$

Property (3) also holds for rational vector spaces. We now establish it, together with an analogue of lemma 1.4.4.

Lemma 2.2.3. *The integral homology groups $H_{>0}(K(\mathbf{Q}, n); \mathbf{Z})$ are rational vector spaces for every $n \geq 1$.*

Proof. For $n = 1$, the result follows from the explicit construction of a $K(\mathbf{Q}, 1)$: namely, take the direct limit of the sequence of maps $f_k : K(\mathbf{Z}, 1) \rightarrow K(\mathbf{Z}, 1)$ where f_k realizes the group homomorphism $z \mapsto kz$ on π_1 . Since such a map is of degree k on homology, and homology commutes with direct limits, one sees that $H_1(K(\mathbf{Q}, 1)) = \mathbf{Q}$ and that all higher homology groups vanish.

We then extend the result inductively to any n . Consider the homology spectral sequences with integral and rational coefficients associated to the fibration $K(\mathbf{Q}, n) \hookrightarrow PK(\mathbf{Q}, n+1) \rightarrow K(\mathbf{Q}, n+1)$; the map between these two spectral sequences induces an isomorphism on $E_{0,q}^2$, $q > 0$, and $E_{p,q}^\infty$, $(p, q) \neq (0, 0)$. We then invoke Zeeman's comparison theorem to conclude that it also induces an isomorphism on $E_{p,0}^2$, $p > 0$ (see for instance [McC01, pp. 82–85] — the theorem is stated and proved for cohomology, but ignoring the additional hypothesis and the complications in the proof required to get a conclusion on the product structure, it is easily transposed). Thus since the groups $H_{>0}(K(\mathbf{Q}, n+1), \mathbf{Q})$ are rational vector spaces, so are the $H_{>0}(K(\mathbf{Q}, n+1), \mathbf{Z})$. $\square$

With these two lemmas, we can proceed to the proof of the theorem.

Proof of theorem 2.2.1 on the preceding page. (1) $\implies$ (2). Let $\{X_n, p_n, i_n\}$ be a Postnikov tower for X . We prove by induction on $n \geq 2$ that $H_i(X_n)$ is a rational vector space for $i > 0$. The result then follows from lemma 1.1.6 on page 7. The base case (when n is the dimension of the first non-trivial homotopy group) follows from the lemma above. Now as usual consider the fibration $K(\pi_n(X), n) \hookrightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$. From the lemma 2.2.3 and the induction hypothesis, it follows that the integral homology groups (of positive degree) of

the base space and of the fibre are rational vector spaces; hence so are the $H_{>0}(X_n; \mathbf{Z})$ (lemma 2.2.2 on the previous page).

(2) $\implies$ (1). Here, we use a slightly different construction instead of the Postnikov tower. A *Whitehead tower*, or *upside-down Postnikov tower*, of X is a diagram of the form

$$\begin{array}{ccc}
& & \vdots \\
& & \downarrow \\
K(\pi_3(X), 2) & \longrightarrow & X_3 \\
& & \downarrow p_3 \\
K(\pi_2(X), 1) & \longrightarrow & X_2 \\
& & \downarrow p_2 \\
K(\pi_1(X), 0) & \longrightarrow & X_1 \\
& & \downarrow p_1 \\
& & X = X_0
\end{array}$$

where:

- (1) $\pi_i(X_n) = 0$ for $i \leq n$;
- (2) the maps $X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1}$ are fibrations with fibre $K(\pi_n(X), n-1)$;
- (3) the composite maps $X_n \rightarrow X$ induce isomorphisms on π_i , $i > n$.

Any topological space admits such a tower (see [BT82, pp. 253–254] or [Hat02, p. 356]). In this setting, the Hurewicz theorem yields

$$\pi_{n+1}(X) = \pi_{n+1}(X_n) = H_{n+1}(X_n)$$

so in our case it suffices to show that for every n , $H_{n+1}(X_n)$ is a rational vector space. This follows by inductive application of lemma 2.2.2 on the preceding page. $\square$

A rational homotopy equivalence between rational CW complexes is a weak homotopy equivalence and thus a homotopy equivalence. Therefore, for rational spaces, rational homotopy theory reduces to ordinary homotopy theory.

2.3 Localization and rational homotopy type

We now introduce the notion of *localization at (0)* (or *rationalization*) of a simply-connected topological space; such a localization can be described both as a rational homotopy equivalence to a rational space and through a certain universal property.

Proposition 2.3.1. *Let X and X' be simply-connected CW complexes, with X' rational, and let $f : X \rightarrow X'$ be a map. The following conditions on f are equivalent:*

- (1) *f is a rational homotopy equivalence;*

- (2) f has the following universal property: for any simply-connected rational CW complex Y and any map $g : X \rightarrow Y$, there is a map $h : X' \rightarrow Y$ unique up to homotopy such that

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ & \searrow g & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

commutes.

We call a map f satisfying these conditions a rationalization, or localization at (0), of X . When such a map exists, the rational CW complex X' is unique up to homotopy equivalence; we shall denote it by $X_{\mathbf{Q}}$.

Proof. (1) $\implies$ (2). Deform f to be the inclusion of a subcomplex into a CW complex. It is an easy application of obstruction theory that in this setting, a map $X \rightarrow Y$ may be extended to a map $X' \rightarrow Y$ if all $H^{i+1}(X, X'; \pi_i(Y))$, $i \geq 1$ vanish; and that a homotopy over X of two maps $X' \rightarrow Y$ may be extended over X' if all $H^{i+1}(X, X'; \pi_{i+1}(Y))$, $i \geq 1$ vanish (see for instance [Hu59, chap. VI] or [GM81, chap. V]). Now f is a rational equivalence, so $H^i(X, X'; \mathbf{Q}) = 0$, $i \geq 1$; since the homotopy groups of Y are rational vector spaces, the conditions above follow from the universal coefficient theorem.

(2) $\implies$ (1). The universal property of f for $Y = K(\mathbf{Q}, n)$, $n \geq 2$, shows that composition with f induces a bijection between $[X, K(\mathbf{Q}, n)]$ and $[X', K(\mathbf{Q}, n)]$. It follows from the naturality of the correspondence of theorem 1.2.3 on page 8 (and of remark 1.2.5 just underneath) that f induces an isomorphism on rational cohomology. $\square$

Example 2.3.2. In remark 2.1.4 on page 15, we mentioned the rational homotopy equivalence $K(\mathbf{Z}, n) \rightarrow K(\mathbf{Q}, n)$. More generally, there is a rationalization $K(\pi, n) \rightarrow K(\pi \otimes \mathbf{Q}, n)$ constructed by realizing the map $\pi \rightarrow \pi \otimes \mathbf{Q}$.

We shall prove below that every simply-connected CW complex admits a localization; let us admit this result for a moment. Let X and Y be two simply-connected CW complexes. It is clear that if X and Y are of the same rational homotopy type, then $X_{\mathbf{Q}} = Y_{\mathbf{Q}}$; we may therefore identify $X_{\mathbf{Q}}$ with the rational homotopy type of X . Now consider a map $f : X \rightarrow Y$. The universal property of rationalization gives us some $f_{\mathbf{Q}} : X_{\mathbf{Q}} \rightarrow Y_{\mathbf{Q}}$, unique up to homotopy, such that

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{f_{\mathbf{Q}}} & Y_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

commutes; this defines a map $[X, Y] \rightarrow [X_{\mathbf{Q}}, Y_{\mathbf{Q}}]$. The homotopy class of $f_{\mathbf{Q}}$ is called the *rational homotopy class* of f .

From there we can construct a localization of the category $\mathcal{T}_1$ of simply-connected topological spaces with respect to the rational homotopy equivalences,

as promised in the introduction. Indeed, let $\mathrm{Ho}_{\mathbf{Q}} \mathcal{T}_1$ be the category with the same objects as $\mathcal{T}_1$ but with maps

$$\mathrm{Ho}_{\mathbf{Q}} \mathcal{T}_1 (X, Y) = [X_{\mathbf{Q}}, Y_{\mathbf{Q}}].$$

It is easily seen that the functor $\gamma : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathrm{Ho}_{\mathbf{Q}} \mathcal{T}_1$ which is the identity on objects and sends f to $[f_{\mathbf{Q}}]$ is a localization of $\mathcal{T}_1$ with respect to the rational homotopy equivalences. Notice that the category $\mathrm{Ho}_{\mathbf{Q}} \mathcal{T}_1$ is equivalent to the homotopy category (in the usual sense, that is with homotopy classes of maps as arrows) of (simply-connected) rational CW complexes.

2.4 The rational Postnikov tower

We now introduce the rational analogue of the Postnikov tower of principal fibrations described in section 1; we show how to build such a tower and then use it to construct the rationalization of a space.

Definition 2.4.1. Let X be a simply-connected space. A *rational Postnikov tower* for X is a commutative diagram

$$\begin{array}{c} \vdots \\ X_{4,\mathbf{Q}} \\ \downarrow q_3 \\ X_{3,\mathbf{Q}} \\ \downarrow q_2 \\ X \xrightarrow{j_2} X_{2,\mathbf{Q}} = K(\pi_2(X) \otimes \mathbf{Q}, 2) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow j_4 \\ \nearrow j_3 \end{array}$$

where:

- (1) the spaces $X_{n,\mathbf{Q}}$, $n \geq 2$, are rational;
- (2) $\pi_i(X_{n,\mathbf{Q}}) = 0$ for $i > n$;
- (3) the maps $X \xrightarrow{j_n} X_{n,\mathbf{Q}}$ induce isomorphisms on the rational homotopy groups $\pi_i \otimes \mathbf{Q}$ for $i \leq n$;
- (4) the maps $X_{n+1,\mathbf{Q}} \xrightarrow{q_n} X_{n,\mathbf{Q}}$ are fibrations.

Remark 2.4.2. Let X be a simply-connected CW complex, and let $\{X_n, p_n, i_n\}$ be a Postnikov tower for X constructed as suggested in remark 1.1.5 on page 6. If a rational Postnikov tower as above exists, then it is easily seen that $j_n : X \rightarrow X_{n,\mathbf{Q}}$ can be extended to a map $X_n \rightarrow X_{n,\mathbf{Q}}$ inducing isomorphisms on rational homotopy groups; thus necessarily $X_{n,\mathbf{Q}} \simeq (X_n)_{\mathbf{Q}}$, which justifies our notation.

For CW complexes, it is indeed possible to construct a rational Postnikov tower through an inductive rationalization of the integral one. This is how we prove the following theorem.

Theorem 2.4.3. *Let X be a simply-connected CW complex. Then X has a rational Postnikov tower $\{X_{n,\mathbf{Q}}, q_n, j_n\}$ with the $X_{n,\mathbf{Q}}$ rational CW complexes and the q_n principal fibrations, as in the diagram below.*

$$\begin{array}{ccccc}
& & \vdots & & \\
& & X_{4,\mathbf{Q}} & \xrightarrow{k_{4,\mathbf{Q}}} & K(\pi_5(X) \otimes \mathbf{Q}, 6) \\
& \nearrow j_4 & \downarrow q_3 & & \\
& & X_{3,\mathbf{Q}} & \xrightarrow{k_{3,\mathbf{Q}}} & K(\pi_4(X) \otimes \mathbf{Q}, 5) \\
& \nearrow j_3 & \downarrow q_2 & & \\
X & \xrightarrow{j_2} & X_{2,\mathbf{Q}} = K(\pi_2(X) \otimes \mathbf{Q}, 2) & \xrightarrow{k_{2,\mathbf{Q}}} & K(\pi_3(X) \otimes \mathbf{Q}, 4)
\end{array}$$

The k -invariant of the principal fibration q_n , which is a cohomology class in $H^{n+2}(X_{n,\mathbf{Q}}; \pi_{n+1}(X) \otimes \mathbf{Q})$, is called the n -th rational k -invariant of X .

Proof. Let $\{X_n, p_n, i_n\}$ be an integral Postnikov tower for X . We inductively construct a rational Postnikov tower for X such that $X_{n,\mathbf{Q}} = (X_n)_{\mathbf{Q}}$. For the sake of brevity, we write π_n for $\pi_n(X)$.

For $n = 2$, there is a rationalization $K(\pi_2, 2) \rightarrow K(\pi_2 \otimes \mathbf{Q}, 2)$ (remark 2.3.2). (Note that if π_2 is torsion this is just a map to $\{*\}$.) Now suppose we have a rationalization $X_n \rightarrow X_{n,\mathbf{Q}}$. As usual there is a rational equivalence $K(\pi_{n+1}, n+2) \rightarrow K(\pi_{n+1} \otimes \mathbf{Q}, n+2)$; it induces a commutative square

$$\begin{array}{ccc}
PK(\pi_{n+1}, n+2) & \rightarrow & PK(\pi_{n+1} \otimes \mathbf{Q}, n+2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K(\pi_{n+1}, n+2) & \rightarrow & K(\pi_{n+1} \otimes \mathbf{Q}, n+2)
\end{array}$$

the upper map sending a path to its image under the lower map. Now let $k_n : X_n \rightarrow K(\pi_{n+1}, n+2)$ be the map inducing the fibration $X_{n+1} \rightarrow X_n$; the universal property of $X_n \rightarrow X_{n,\mathbf{Q}}$ gives us a map $k_{n,\mathbf{Q}} : X_{n,\mathbf{Q}} \rightarrow K(\pi_{n+1} \otimes \mathbf{Q}, n+2)$ such that

$$\begin{array}{ccc}
X_n & \xrightarrow{\quad} & X_{n,\mathbf{Q}} \\
k_n \downarrow & & \downarrow k_{n,\mathbf{Q}} \\
K(\pi_{n+1}, n+2) & \rightarrow & K(\pi_{n+1} \otimes \mathbf{Q}, n+2)
\end{array}$$

commutes. This map induces a fibration $X_{n+1,\mathbf{Q}} \rightarrow X_{n,\mathbf{Q}}$. Then the following solid line diagram commutes.

$$\begin{array}{ccccc}
& & PK(\pi_{n+1}, n+2) & \xrightarrow{\quad} & PK(\pi_{n+1} \otimes \mathbf{Q}, n+2) \\
& \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
X_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & X_{n+1,\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\quad} & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& K(\pi_{n+1}, n+2) & \xrightarrow{\quad} & K(\pi_{n+1} \otimes \mathbf{Q}, n+2) & \\
\downarrow & \nearrow k_n & \downarrow & \nearrow k_{n,\mathbf{Q}} & \\
X_n & \xrightarrow{\quad} & X_{n,\mathbf{Q}} & &
\end{array}$$

Hence one gets the same map when going from X_{n+1} to $K(\pi_{n+1} \otimes \mathbf{Q}, n+2)$ through $PK(\pi_{n+1} \otimes \mathbf{Q}, n+2)$ or through $X_{n,\mathbf{Q}}$; the universal property of the pullback therefore gives a map $X_{n+1} \rightarrow X_{n+1,\mathbf{Q}}$, the dashed arrow in the diagram. It is a rational equivalence and thus a rationalization. $\square$

Corollary 2.4.4. *Let X be a simply-connected CW complex. Then X admits a rationalization $f : X \rightarrow X_{\mathbf{Q}}$.*

Proof. Consider the rational Postnikov tower for X constructed in the theorem above. The map $X \rightarrow \varprojlim X_{n,\mathbf{Q}}$ is a rational homotopy equivalence, as can be seen from the same arguments as in the integral case (proposition 1.1.7 on page 7). Proposition 1.1.3 on page 6 gives us a weak (thus rational) homotopy equivalence $Z \rightarrow \varprojlim X_n$, where Z is a (necessarily rational) CW complex. Turning this weak homotopy equivalence into an inclusion, we get a pair $(Z, \varprojlim X_n)$ all of whose relative homotopy groups vanish. In this setting, it is easy to prove (by induction over the skeleta) that any map from a CW complex to $\varprojlim X_n$ may be retracted into a map with image in Z (see [Hat02, p. 347]). In other words, there exists a map $f : X \rightarrow Z$ such that

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow f & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \varprojlim X_n \end{array}$$

commutes up to homotopy; then f has to be a rational homotopy equivalence, and $Z = X_{\mathbf{Q}}$. $\square$

Note that a rational Postnikov tower for X is just a Postnikov tower for $X_{\mathbf{Q}}$. Such a tower characterizes the rational homotopy type of X entirely.

Section 3

A homotopy theory for CDGAs

In this section $\mathbf{k}$ is any field of characteristic zero.

Definition 3.0.5. A *differential graded algebra* (or DGA) over $\mathbf{k}$ is a non-negatively graded $\mathbf{k}$ -vector space

$$C^* = \bigoplus_{i \geq 0} C^i$$

equipped with a product $C^p \otimes C^q \rightarrow C^{p+q}$ and with a *differential* of degree 1, i.e. a map

$$d : C^p \rightarrow C^{p+1} \quad \text{with} \quad d^2 = 0,$$

which is also a *derivation* with respect to the product, i.e. satisfies the graded Leibniz rule

$$d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^p \alpha(d\beta)$$

for $\alpha \in C^p$. If $C \neq 0$, we require the product to have a *unit* (which has to be in C^0).

Additionally, we say that a differential graded algebra (C^*, d) is *commutative* (is a *commutative differential graded algebra*, CDGA) if it satisfies the relation of graded commutativity

$$\alpha\beta = (-1)^{pq} \beta\alpha \quad \text{for} \quad \alpha \in C^p, \beta \in C^q.$$

A *map* of differential graded algebras between (C^*, d) and (D^*, d) is a family $(f^n)_{n \geq 0}$ of maps $C^n \rightarrow D^n$ commuting with the differential and compatible with the product.

We shall denote the category of CDGAs over $\mathbf{k}$ by $\mathcal{G}$.

Remark 3.0.6. This terminology is not entirely standard: some authors do not include any condition on the grading in the definition and would refer to non-negatively graded (C)DGAs as (commutative) *cochain algebras*.

For any DGA (C^*, d) we can form the graded algebra $H^*(C)$ in the usual way; a map of DGAs $f : (C^*, d) \rightarrow (D^*, d)$ then induces a map $H^*(f) : H^*(C) \rightarrow H^*(D)$.

Definition 3.0.7. We say that a DGA (C^*, d) is *connected* if $H^0(C) = \mathbf{k}$, and *simply-connected* if additionally $H^1(C) = 0$.

For any graded object C^* , we shall freely use transparent notations like $C^{\leq n}$, $C^{\geq n}$, or C^+ to denote the elements of degree $\leq n$ (resp. $\geq n$, > 0).

We introduce one more piece of notation. Let $V = (V^i)_{i \geq 0}$ be a graded $\mathbf{k}$ -vector space. We write ΛV for the free graded commutative algebra on V ; more explicitly, if $\mathcal{B}$ is a homogeneous basis of V , then ΛV is the polynomial algebra on the elements of $\mathcal{B}$ of even degree tensor the exterior algebra on the elements of $\mathcal{B}$ of odd degree.

Pedantic remark 3.0.8. Remember that our algebras have units: the $\mathbf{k}$ -vector space ΛV contains a generator $1 \in (\Lambda V)^0$ even if $V^0 = 0$. More generally, note that in any CDGA we have $d(1) = 0$.

3.1 Model categories

This subsection is a general introduction to model categories. None of the individual results are particularly hard on their own; accordingly, we only included a few proofs, giving what we hope is a representative sample of the techniques. Details and proofs may be found in Quillen's original memoir [Qui67] or in the introductory paper by Dwyer and Spalinski [DS95]. We followed the terminology and notation of the latter (which is mostly identical with that of [Qui69]).

Let $\mathcal{C}$ be a category with three distinguished classes of arrows, the *weak equivalences* ($\xrightarrow{\sim}$), the *fibrations* ($\twoheadrightarrow$) and the *cofibrations* ($\hookrightarrow$). An *acyclic fibration* ($\xrightarrow{\sim}\twoheadrightarrow$) is an arrow which is both a fibration and a weak equivalence; an *acyclic cofibration* ($\hookrightarrow\xrightarrow{\sim}$) is an arrow which is both a cofibration and a weak equivalence.

Definition 3.1.1. We say that these choices define a *model category structure* on $\mathcal{C}$ if the following hold.

- M1. All finite limits and colimits exist in $\mathcal{C}$.
- M2. Let $A \xrightarrow{f} A'$ and $A' \xrightarrow{g} A''$ be two arrows. If any two of f , g and gf are weak equivalences, then so is the third.
- M3. If g is a *retract* of f , that is if there is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & Y \\ g \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow g \\ Y' & \xrightarrow{i'} & X' & \xrightarrow{r'} & Y' \end{array}$$

such that $ri = \text{Id}_Y$, $r'i' = \text{Id}_{Y'}$, and if f is a weak equivalence, a fibration or a cofibration, then so is g .

- M4. Given the following solid line diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

an arrow as shown dashed exists in the following two situations:

- (i) i is a cofibration and p an acyclic fibration;
- (ii) i is an acyclic cofibration and p a fibration.

M5. Any arrow $f : A \rightarrow B$ can be factored as:

- (i) $A \hookrightarrow A' \xrightarrow{\sim} B$;
- (ii) $A \xrightarrow{\sim} A' \twoheadrightarrow B$.

Remark 3.1.2. These axioms are self-dual, that is, a model category structure on $\mathcal{C}$ gives rise to a model category structure on the opposite category $\mathcal{C}^{\text{op}}$ in which the fibrations and the cofibrations have been swapped. Therefore, if some statement is true in any model category, then so is the dual statement obtained by exchanging the words *fibration* and *cofibration*.

Before proceeding to prove the first properties of model category structures, let us give some terminology.

Definition 3.1.3. If there is an arrow like the one shown dashed making the diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow \text{dashed} & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

commute, we say that p has the *right lifting property* with respect to i and that i has the *left lifting property* with respect to p .

Then one way to rephrase M4 above is: cofibrations have the left lifting property with respect to all acyclic fibrations, and fibrations have the right lifting property with respect to all acyclic cofibrations.

The category $\mathcal{C}$ has all finite limits and colimits, so in particular has an initial object $\emptyset$ and a terminal object $*$. Using these we give the following definition.

Definition 3.1.4. We say that an object X of $\mathcal{C}$ is *fibrant* (resp. *cofibrant*) if $X \rightarrow *$ is a fibration (resp. if $\emptyset \rightarrow X$ is a cofibration).

The first property we prove is that in a model category, the classes of fibrations and of cofibrations determine each other. This is a kind of converse of M4.

Proposition 3.1.5. *Let $\mathcal{C}$ be a model category. Then an arrow f is a cofibration (resp. an acyclic cofibration) if and only if it has the left lifting property with respect to all acyclic fibrations (resp. to all fibrations); and dually for fibrations.*

Proof. As an example, suppose $f : A \rightarrow B$ has the left lifting property with respect to all fibrations. Use M5 to factor f as

$$A \xrightarrow[\sim]{i} A' \xrightarrow{p} B$$

and notice that by hypothesis there exists an arrow $B \xrightarrow{r} A'$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & A' \\ f \downarrow & \nearrow i & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\text{Id}_B} & B \end{array}$$

commutes. Then f is a retract of i

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\text{Id}_A} & A & \xrightarrow{\text{Id}_A} & A \\ f \downarrow & & \wr \downarrow i & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{r} & B' & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

and so is an acyclic cofibration according to M3. $\square$

Remark 3.1.6. In particular, every isomorphism is a weak equivalence, a fibration and a cofibration.

Examples 3.1.7. 1. There is a model category structure on the category $\mathcal{T}$ of topological spaces in which:

- the weak equivalences are the weak homotopy equivalences;
- the fibrations are the Serre fibrations, i.e. the maps that have the homotopy lifting property with respect to CW complexes;
- the cofibrations are the maps that have the left lifting property with respect to every acyclic fibration.

Notice that every object is fibrant. An important class of cofibrations is constituted by the inclusions $X \rightarrow Y$ where Y is obtained from X by attaching cells (not necessarily in order of their dimension); in particular, CW complexes are cofibrant. In fact, one can prove that every cofibration is a retract of such a map (see [DS95, p. 108]).

2. We would like to define a model category structure with the rational homotopy equivalences as weak equivalences. Unfortunately, the category of simply-connected spaces is not closed under finite colimits (the same objection would apply to the category of nilpotent spaces). This is more than an insignificant nuisance, but a fair amount of the theory is still applicable; see [Qui69, II.6] for a full discussion.

An essential property of model categories is that they carry intrinsic notions of homotopy between maps. We now describe these.

Definition 3.1.8. A *cylinder object* for A is an object $A \wedge I$ of $\mathcal{C}$ together with a factorization

$$A \coprod A \xrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$$

of the map $\text{Id}_A \coprod \text{Id}_A : A \coprod A \rightarrow A$; a cylinder object for A is called *good* if i is a cofibration. We write $i_0, i_1 : A \rightarrow A \wedge I$ for the two maps represented by i .

Dually, a *path object* for X is an object X^I of $\mathcal{C}$ together with a factorization

$$X \xrightarrow{\sim} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

of the diagonal map $X \rightarrow X \times X$; a path object for X is called *good* if p is a fibration. We write $p_0, p_1 : X^I \rightarrow X \times X$ for the two maps represented by p .

Examples 3.1.9. In the case of topological spaces (example 3.1.7 above) one choice of a cylinder object for A is $A \times [0, 1]$, and one choice of a path object for X is $X^{[0,1]}$ (with the compact-open topology).

Definition 3.1.10. Two maps $f, g : A \rightarrow X$ are said to be *left homotopic* (written $f \stackrel{l}{\sim} g$) if there is a cylinder object $A \wedge I$ for A and a map $H : A \wedge I \rightarrow X$ such that the composite

$$A \coprod A \xrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow{H} X$$

is the map $f \coprod g : A \coprod A \rightarrow X$.

Dually, two maps $f, g : A \rightarrow X$ are said to be *right homotopic* (written $f \stackrel{r}{\sim} g$) if there is a path object X^I for X and a map $H : A \rightarrow X^I$ such that the composite

$$A \xrightarrow{H} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

is the map $(f, g) : A \rightarrow X \times X$.

Left and right homotopy are not equivalence relations in general; however, we have the following.

Proposition 3.1.11. *If A is cofibrant, then $\stackrel{l}{\sim}$ is an equivalence relation on $\mathcal{C}(A, X)$; dually, if X is fibrant, then $\stackrel{r}{\sim}$ is an equivalence relation on $\mathcal{C}(A, X)$.*

As an example of how these notions may be used, we prove the following fact. When A is cofibrant, we write $[A, X]_l$ for the set of left homotopy classes in $\mathcal{C}(A, X)$; similarly, when X is fibrant, we write $[A, X]_r$ for the set of right homotopy classes in $\mathcal{C}(A, X)$.

Proposition 3.1.12. *Let A be cofibrant and let $p : Y \xrightarrow{\sim} X$ be an acyclic fibration. Then composition with p induces a bijection $[A, Y]_l \rightarrow [A, X]_l$.*

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow & \downarrow p \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

Dually, if X is fibrant and $i : A \xrightarrow{\sim} B$ is an acyclic cofibration, then composition with i induces a bijection $[B, X]_r \rightarrow [A, X]_r$.

Proof. We prove the first part. To show the surjectivity, apply M4(i) to the diagram

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

for any $f : A \rightarrow X$.

Now consider $f, g : A \rightarrow Y$ such that $pf \stackrel{l}{\sim} pg$; this left homotopy is given through some cylinder object $A \wedge I$ for A . We may replace it by a good cylinder object $A \wedge I'$ (indeed, apply M5(i) to factor the map $A \amalg A \rightarrow A \wedge I$ as a cofibration followed by an acyclic fibration); so we have a factorization

$$A \amalg A \hookrightarrow A \wedge I' \xrightarrow{H} X$$

of $pf \amalg pg$. Applying M4(i) we get a lift as shown dashed in the diagram

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f \amalg g} & Y \\ \downarrow & \nearrow \text{dashed} & \downarrow \wr p \\ A \wedge I' & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

and this gives us the desired homotopy $f \stackrel{l}{\sim} g$. $\square$

The next proposition relates left and right homotopy; in particular, it implies that if A is cofibrant and X is fibrant, then the two homotopy relations agree and can be described through the use of just one good path or cylinder object.

Proposition 3.1.13. *Let $f, g : A \rightarrow X$ be two maps. If A is cofibrant and $f \stackrel{l}{\sim} g$, then $f \stackrel{r}{\sim} g$ through any good path object for X ; dually, if X is fibrant and $f \stackrel{r}{\sim} g$, then $f \stackrel{l}{\sim} g$ through any good cylinder object for A .*

Accordingly, if A is cofibrant and X is fibrant, we say that two maps $f, g : A \rightarrow X$ are *homotopic* if they are left or right homotopic. We write $[A, X]$ for the set of homotopy classes of maps $A \rightarrow X$. With the additional assumption that A is fibrant, we have a generalization of proposition 3.1.12 on the preceding page.

Proposition 3.1.14. *Let A be fibrant-cofibrant, let X and Y be fibrant and let $p : Y \rightrightarrows X$ be a weak equivalence (not necessarily a fibration). Then composition with p induces a bijection $[A, Y] \rightarrow [A, X]$.*

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \text{dashed} & \downarrow \wr p \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

Proof. Apply M5(ii) to factor p as

$$Y \xrightarrow[\sim]{i} Y' \xrightarrow[\sim]{j} X$$

the second map being acyclic because of M2. Then since A is fibrant M4(ii) yields a left inverse $r : Y' \rightarrow Y$ for i . From the second part of proposition 3.1.12 on the previous page, one sees that r is actually a two-sided *homotopy inverse* for i ; therefore composition with i induces a bijection $[A, Y] \rightarrow [A, Y']$. To conclude, apply the first part of proposition 3.1.12 to j . $\square$

Remark 3.1.15. In the context of topological spaces, a result akin to this one sometimes goes under the name of “Whitehead’s lifting lemma”.

Similarly, one proves the following useful fact.

Proposition 3.1.16. *A map $f : A \rightarrow X$ between fibrant-cofibrant objects is a weak equivalence if and only if it admits a homotopy inverse.*

We conclude this presentation with a discussion of the *homotopy category* $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$ associated to a model category $\mathcal{C}$. It is the localization of $\mathcal{C}$ with respect to the weak equivalences; of course, it does not depend on the fibrations or cofibrations. Indeed, one of the motivations of Quillen’s theory is that endowing a category $\mathcal{C}$ one wants to localize with an additional homotopic structure (the fibrations and the cofibrations) allows one to give a more explicit description of $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$. This description is the following.

Proposition 3.1.17. *The homotopy category $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$ associated to the model category $\mathcal{C}$ is equivalent to the category $\pi\mathcal{C}_{cf}$ whose objects are the fibrant-cofibrant objects of $\mathcal{C}$ and whose maps are the homotopy classes of maps determined by the model category structure.*

3.2 The model category of CDGAs

We are now going to describe a model category structure on the category $\mathcal{G}$ of CDGAs over $\mathbf{k}$. Before we start, note that $\mathcal{G}$ is closed under finite limits and colimits. In particular, two CDGAs (C, d) and (D, d) admit both a coproduct which is just their tensor product as graded algebras

$$(C \otimes D)^n = \bigoplus_{p+q=n} C^p \otimes D^q$$

with the obvious differential, and a product which is the underlying product of graded vector spaces

$$(C \times D)^n = C^n \times D^n$$

with componentwise multiplication and differentiation.

We now give the following definitions. Note that we shall keep the notations of the presentation of model categories above: do not mistake our weak equivalences for isomorphisms! We say that $f : (C, d) \rightarrow (D, d)$ is:

- a weak equivalence if $H^*(f) : H^*(C) \rightarrow H^*(D)$ is an isomorphism (f is a *quasi-isomorphism*);
- a fibration if f is *surjective*;
- a cofibration if f has the left lifting property with respect to all acyclic fibrations.

From proposition 3.1.5 on page 24 we know that this choice of the cofibrations is the only possible one once the fibrations and weak equivalences have been fixed; but we still have to check that the model category axioms hold, which amounts to checking that there indeed exists a model category with the weak equivalences and fibrations we specified.

Remark 3.2.1. As in the case of topological spaces, every object is fibrant.

Proposition 3.2.2. *The classes of weak equivalences, fibrations and cofibrations given above define a model category structure on $\mathcal{G}$.*

Before proceeding to the proof, we describe a large class of cofibrations, for both immediate and later use.

Definition 3.2.3. We shall call *relative Sullivan algebra with respect to (B, d)* any CDGA of the form $(B \otimes \Lambda V, d)$ where:

- $(B, d) \cong (B \otimes 1, d)$ is a connected sub-CDGA;
- V admits an exhaustive filtration $V(0) \subseteq V(1) \subseteq V(2) \subseteq \dots$ such that $d : V(0) \rightarrow B$ and for $k \geq 1$, $d : V(k) \rightarrow B \otimes \Lambda V(k-1)$.

A *Sullivan algebra* is a relative Sullivan algebra with $B = 0$.

Remark 3.2.4. We warn the reader that the authors of [FHT01] give a slightly different definition, in that they require V to have no elements of degree 0.

In other words, a relative Sullivan algebra $(B \otimes \Lambda V, d)$ is an algebra obtained from B by progressively adding new “free generators”, with the condition that their differential has to be in the previously constructed part of the algebra.

Example 3.2.5. To shed some light on this definition, we give the following counter-example: $(\Lambda(x_1, x_2, x_3), d)$ with $\deg x_i = 1$, $dx_1 = x_2x_3$, $dx_2 = x_1x_3$, $dx_3 = x_1x_2$ is free, but not Sullivan.

Lemma 3.2.6. *Let $(B \otimes \Lambda V, d)$ be a relative Sullivan algebra. Then the inclusion $(B, d) \rightarrow (B \otimes \Lambda V, d)$ is a cofibration. In particular, Sullivan algebras are cofibrant.*

Proof. Suppose we are given an acyclic fibration (i.e. a surjection inducing an isomorphism on homology) $(C, d) \xrightarrow[\sim]{\eta} (D, d)$ and the solid line diagram below.

$$\begin{array}{ccc} (B, d) & \longrightarrow & (C, d) \\ \downarrow & \nearrow \phi & \downarrow \eta \\ (B \otimes \Lambda V, d) & \xrightarrow{\psi} & (D, d) \end{array}$$

We need to construct ϕ as shown dashed. We already have ϕ on (B, d) ; we extend it to $(B \otimes \Lambda V(k), d)$ by induction on k . Assume ϕ has been constructed on $(B \otimes \Lambda V(k-1), d)$ (or if $k = 0$, on (B, d)), and write $V(k) = V(k-1) \oplus W$ where $d : W \rightarrow B \otimes \Lambda V(k-1)$. Let (w_i) be a basis of W . For each w_i , we need to construct $c_i \in C$ such that $\eta(c_i) = \psi(w_i)$ and $dc_i = \phi(dw_i)$.

We have $d(\phi(dw_i)) = \phi(d^2w_i) = 0$ and $\eta(\phi(dw_i)) = \psi(dw_i) = d\psi(w_i)$, so $\phi(dw_i)$ is a cocycle sent by the quasi-isomorphism η to a coboundary: hence $\phi(dw_i) = dt$ for some $t \in C$. Now $d(\eta(t) - \psi(w_i)) = 0$, so there is some $u \in C$ with $du = 0$ such that

$$\eta(u) = \eta(t) - \psi(w_i) + dv$$

for some $v \in D$. Finally, the surjectivity of η gives us $v' \in C$ such that $\eta(v') = v$. Set

$$c_i = t - u + dv'.$$

Then

$$\begin{aligned}\eta(c_i) &= \eta(t) - \eta(u) + d\eta(v') = \psi(w_i) \\ dc_i &= dt - du + d^2v' = \phi(dw_i)\end{aligned}$$

and c_i meets the required conditions. $\square$

Proof of proposition 3.2.2 on the previous page. Axiom M1 is discussed above; M2, M3 and M4(i) are immediate.

We first show M5(ii). Let $f : (A, d) \rightarrow (B, d)$ be a map of CDGAs. Let $(b_i)_{i \in I}$ be a basis of the $\mathbf{k}$ -vector space B . Define $(E(B), \delta) = (\Lambda(c_i, c'_i)_{i \in I}, \delta)$ where $\deg c_i = \deg b_i$, $\deg c'_i = \deg b_i + 1$, $\delta c_i = c'_i$ and $\delta c'_i = 0$; then $(A, d) \otimes (E(B), \delta)$ is a relative Sullivan algebra. Moreover, an easy computation shows $H^*(E(B), \delta) = \mathbf{k}$, so that the relative Sullivan algebra inclusion

$$(A, d) \rightarrow (A, d) \otimes (E(B), \delta)$$

is an acyclic cofibration. Then define $g : (A, d) \otimes (E(B), \delta) \rightarrow (B, d)$ by $g = f$ on (A, d) , $g(c_i) = b_i$ and $g(c'_i) = db_i$; then g is a well-defined surjective CDGA map, and we have a factorization

$$(A, d) \xrightarrow{\sim} (A, d) \otimes (E(B), \delta) \twoheadrightarrow (B, d)$$

of $f : (A, d) \rightarrow (B, d)$.

We omit the proof of M5(i), which is similar but slightly longer; see [BG76, pp. 21–22].

We now turn to M4(ii). Consider an acyclic cofibration $f : (A, d) \rightarrow (B, d)$; in the factorization we just obtained, the fibration $p : (A, d) \otimes (E(B), \delta) \twoheadrightarrow (B, d)$ is acyclic according to M2. Then, since f has the left lifting property with respect to p , using the same technique as in proposition 3.1.5 on page 24 we can show that f is a retract of $(A, d) \xrightarrow{\sim} (A, d) \otimes (E(B), \delta)$. It is easily seen that this last map has the left lifting property with respect to all fibrations, and therefore so does f . $\square$

3.3 The homotopy relation for maps of CDGAs

Let $A \in \mathcal{G}$ be *cofibrant* (for instance a Sullivan algebra) and let $X \in \mathcal{G}$ be any CDGA (always fibrant). Then left and right homotopy both define an equivalence relation on $\mathcal{G}(A, X)$, and these relations agree (proposition 3.1.13 on page 27); we shall simply say that $f, g \in \mathcal{G}(A, X)$ are *homotopic* (in symbols $f \sim g$) if they are right or left homotopic, and denote by $[A, X]$ the set of homotopy classes of maps from A to X .

The following “lifting lemma” is just a specialization of 3.1.14 on page 27; we state it explicitly for later reference.

Proposition 3.3.1. *Let (A, d) be cofibrant and let $p : (Y, d) \xrightarrow{\sim} (X, d)$ be a weak equivalence (not necessarily a fibration). Then composition with p induces a bijection $[(A, d), (Y, d)] \rightarrow [(A, d), (X, d)]$.*

$$\begin{array}{ccc} & & (Y, d) \\ & \nearrow & \downarrow p \\ (A, d) & \xrightarrow{\quad} & (X, d) \end{array}$$

Next, define $\Lambda(t, dt)$ to be the free CDGA on t and dt , with $\deg t = 0$, $\deg dt = 1$ and the obvious differential (which we omit from the notation); and define two CDGA maps $\varepsilon_0, \varepsilon_1 : \Lambda(t, dt) \rightarrow \mathbf{k}$ by

$$\varepsilon_0(t) = 0, \quad \varepsilon_1(t) = 1, \quad \varepsilon_0(dt) = \varepsilon_1(dt) = 0.$$

Then for any CDGA (X, d) the factorization

$$(X, d) \xrightarrow{\sim} (X, d) \otimes \Lambda(t, dt) \xrightarrow{(\text{Id}_X \otimes \varepsilon_0, \text{Id}_X \otimes \varepsilon_1)} (X, d) \times (X, d)$$

of the diagonal map exhibits $(X, d) \otimes \Lambda(t, dt)$ as a good path object for (X, d) . Then, as a further immediate consequence of proposition 3.1.13 on page 27, we get:

Proposition 3.3.2. *Let (A, d) and (X, d) be CDGAs, with (A, d) cofibrant. Then two maps $f, g : (A, d) \rightarrow (X, d)$ are homotopic (in the model category sense) if and only if there is a map $H : (A, d) \rightarrow (X, d) \otimes \Lambda(t, dt)$ such that the composite*

$$(A, d) \xrightarrow{H} (X, d) \otimes \Lambda(t, dt) \xrightarrow{(\text{Id}_X \otimes \varepsilon_0, \text{Id}_X \otimes \varepsilon_1)} (X, d) \times (X, d)$$

is the map $(f, g) : (A, d) \rightarrow (X, d) \times (X, d)$.

Remark 3.3.3. With a suitable definition of the notion of rational differential form on a topological space, the algebra $\Lambda(t, dt)$ can be seen as the algebra of rational differential forms on the unit interval I . Our explicit homotopy relation then becomes the algebraic analogue of the usual homotopy relation for maps of topological spaces, and with this motivation in mind can be taken as definition, thus avoiding any reference to the model category structure. This is Sullivan's original approach, as exposed in [GM81] and [DGMS75].

This characterization allows one to prove the following through direct computation; see [FHT01, p. 152].

Proposition 3.3.4. *Let $f \sim g : (A, d) \rightarrow (B, d)$ be homotopic CDGA maps, with (A, d) cofibrant. Then $H(f) = H(g)$.*

3.4 Minimal models

We finally introduce the notion of a minimal model for a CDGA, which is in a sense the algebraic analogue of the Postnikov tower, and which constitutes the algebraic basis for the duality exposed in section 4.

We define the notion of minimal CDGA through the following equivalent properties. In general, we say that an element a of a CDGA (A, d) is *decomposable* if it is in $A^+ \cdot A^+$.

Proposition 3.4.1. *Let $(\Lambda V, d)$ be a free CDGA, with $V^0 = V^1 = 0$. Then the following properties are equivalent.*

- (i) *The differential d is decomposable, i.e. $\text{Im } d \subseteq (\Lambda V)^+ \cdot (\Lambda V)^+$.*
- (ii) *The differential satisfies $d : V^k \rightarrow \Lambda(V^{\leq k-1})$, $k \geq 2$.*

We say that a CDGA is minimal if it is of the form $(\Lambda V, d)$ with $V^0 = V^1 = 0$ and if these properties hold.

Note that property (ii) exhibits $(\Lambda V, d)$ as a Sullivan algebra with filtration $V(k) = V^{\leq k}$ (in particular, any minimal CDGA is fibrant-cofibrant). In other words, a minimal algebra is constructed by progressively adding “free generators” in order of their degree with the condition that the differential of a new generator has to be in the previously constructed part of the algebra.

Proof. (i) $\implies$ (ii). Consider $v \in V^k$; then $d(v) \in (\Lambda V)^{k+1}$. Since $V^1 = 0$, for degree reasons $d(v) \in (\Lambda V)^{\leq k-1} \cdot (\Lambda V)^{\leq k-1}$. Hence $d(v) \in \Lambda(V^{\leq k-1})$.

(ii) $\implies$ (i). Since $\Lambda(V^{\leq k-1})$ has no generators in degree $k+1$, d is decomposable on V^k . Therefore d is decomposable on all generators of $(\Lambda V, d)$ and the conclusion follows. $\square$

We now define the notion of a *minimal model* for a CDGA.

Definition 3.4.2. Let (A, d) be a CDGA. A *minimal model* for (A, d) is a quasi-isomorphism

$$(\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} (A, d)$$

where $(\Lambda V, d)$ is minimal.

Before proceeding to the proof of the existence and uniqueness of such models in the simply-connected case, we need to discuss some properties of maps between minimal algebras.

First, let $(\Lambda V, d)$ be a free CDGA with $V^0 = 0$. The differential carries $(\Lambda V)^+ \cdot (\Lambda V)^+$ to $(\Lambda V)^+ \cdot (\Lambda V)^+$ (note that we regard this subspace as a subalgebra: it contains the unit); therefore we can form the *cochain complex of indecomposables* (V, d) , that is, the quotient graded vector space

$$V = \Lambda V / ((\Lambda V)^+ \cdot (\Lambda V)^+)$$

with the induced differential. Moreover, a CDGA map $f : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V', d')$ induces a map $Qf : (V, d) \rightarrow (V', d')$ between the associated cochain complexes of indecomposables; we shall call Qf the *linear part* of f .

If $(\Lambda V, d)$ is minimal, then the cochain complex of indecomposables is just $(V, 0)$; thus the linear part of a map $f : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V', d')$ between minimal models is just a morphism of $\mathbf{k}$ -vector spaces $Qf : V \rightarrow V'$. We now show that this linear map is a homotopy invariant.

Lemma 3.4.3. Let $f \sim g : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V', d')$ be homotopic maps between minimal CDGAs. Then $Qf = Qg : V \rightarrow V'$.

Proof. Consider a homotopy $H : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V', d') \otimes \Lambda(t, dt)$: we have $f = (\text{Id} \otimes \varepsilon_0)H$, $g = (\text{Id} \otimes \varepsilon_1)H$ with $\varepsilon_0(t) = 0$, $\varepsilon_1(t) = 1$, $\varepsilon_0(dt) = \varepsilon_1(dt) = 0$. Since $V^1 = 0$, all the elements of $(\Lambda V)^+$ are sent to $(\Lambda V')^+ \otimes \Lambda(t, dt)$, and so the decomposables $(\Lambda V)^+ \cdot (\Lambda V)^+$ are carried to $((\Lambda V')^+ \cdot (\Lambda V')^+) \otimes \Lambda(t, dt)$. As above, this allows us to define a map of cochain complexes

$$\tilde{H} : (V, 0) \rightarrow (V', 0) \otimes \Lambda(t, dt)$$

which is such that $Qf = (\text{Id} \otimes \varepsilon_0)\tilde{H}$, $Qg = (\text{Id} \otimes \varepsilon_1)\tilde{H}$. Now $\text{Im } \tilde{H}$ is contained in the space of cocycles of the cochain complex $(V', 0) \otimes \Lambda(t, dt)$, that is, in the subspace

$$V' \otimes ((\mathbf{k} \cdot 1) \oplus (\Lambda(t)dt)).$$

But on this subspace $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$; hence $Qf = Qg$. $\square$

This allows us to prove the following.

Proposition 3.4.4. *Let $\phi : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} (\Lambda V', d')$ be a quasi-isomorphism between two minimal CDGAs. Then ϕ is an isomorphism.*

Proof. Since minimal algebras are fibrant-cofibrant, ϕ admits a homotopy inverse (proposition 3.1.16 on page 28); applying the previous lemma then shows that $Q\phi$ is a bijection, and an easy induction on V'^k allows us to deduce from this that ϕ itself is surjective (so a fibration). Thus axiom M4(i) yields a right inverse $\psi : (V', d') \rightarrow (V, d)$ for ϕ , which has to be injective. Now ϕ and ψ are (two-sided) homotopy inverses, so as above ψ is also surjective and hence an isomorphism; therefore so is ϕ . $\square$

We finally prove the existence and uniqueness of minimal models in the simply-connected case, as promised.

Proposition 3.4.5. *Let (A, d) be a simply-connected CDGA. Then (A, d) admits a minimal model*

$$m : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} (A, d).$$

Moreover, $(\Lambda V, d)$ is unique up to isomorphism.

Proof. Existence. We inductively construct V^k , $d|_{V^k}$ and $m_k : (\Lambda(V^{\leq k}), d) \rightarrow (A, d)$ such that $H^i(m_k)$ is an isomorphism for $i \leq k$ and an injection for $i = k + 1$. The resulting $m : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} (A, d)$ will be a minimal model for (A, d) .

First, for each generator of $H^2(A)$, pick some $a_i \in A^2$ representing it, add a generator v_i to V^2 with $d(v_i) = 0$ and set $m_2(v_i) = a_i$. Then $H^1(m_2)$ is an isomorphism because (A, d) and $(\Lambda V^2, d)$ are simply-connected, $H^2(m_2)$ is an isomorphism by construction and $H^3(m_2)$ is an injection because ΛV^2 has no elements of degree 3 (it is a polynomial algebra on generators of degree 2).

Now suppose $(\Lambda(V^{\leq k}), d)$ and m_k have been constructed. Since $H^{k+1}(m_k)$ is injective, we can make it an isomorphism as above: for each generator of $H^{k+1}(A)$ not already in the image of $H^{k+1}(m_k)$, we pick $a_i \in A^{k+1}$ representing it, add a generator v_i to V^{k+1} with $d(v_i) = 0$ and set $m_{k+1}(v_i) = a_i$. We then make $H^{k+2}(m_k)$ injective by adding more generators in V^{k+1} so as to kill its kernel. For each generator of $\text{Ker}(H^{k+2}(m_k))$, pick $z_i \in (\Lambda V^{\leq k})^{k+2}$ representing it, and choose $b_i \in A^{k+1}$ such that $db_i = m_k(z_i)$; then add a generator w_i to V^{k+1} and set

$$dw_i = z_i, \quad m_{k+1}(w_i) = b_i.$$

(Notice that this definition of d satisfies the minimality condition.) This makes $H^{k+2}(m_{k+1})$ an injection and does not modify $H^{k+1}(m_{k+1})$ since the w_i are not cocycles. Therefore m_{k+1} has the desired properties.

Uniqueness. Suppose we are given two minimal models $m : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} (A, d)$ and $m' : (\Lambda V', d') \xrightarrow{\sim} (A, d)$ for (A, d) .

$$\begin{array}{ccc}
 (\Lambda V, d) & & \\
 \downarrow \phi & \searrow m & \\
 & (A, d) & \\
 & \nearrow m' & \\
 (\Lambda V', d') & &
 \end{array}$$

Proposition 3.3.1 on page 30 gives us a map $\phi : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V', d')$ such that $m'\phi \sim m$. Since ϕ is a quasi-isomorphism (proposition 3.3.4 on page 31), it is an isomorphism (proposition 3.4.4 on the previous page). $\square$

Let $\mathcal{G}_1$ be the full subcategory of $\mathcal{G}$ whose objects are the simply-connected CDGAs. The homotopy category of $\mathcal{G}_1$ — its localization with respect to the quasi-isomorphisms — is equivalent to the category $\pi\mathcal{G}_{1cf}$ with objects the fibrant-cofibrant simply-connected CDGAs and with arrows the homotopy classes of maps (proposition 3.1.17 on page 28); this category in turn is equivalent to its full subcategory on the minimal CDGAs. In other words, the homotopy category of simply-connected CDGAs is equivalent to the category of minimal CDGAs with arrows homotopy classes of maps.

Section 4

Differential forms and rational homotopy type

We first give a very sketchy account of Sullivan’s construction for a topological space of a natural CDGA over $\mathbf{Q}$, the algebra of “PL forms” on a topological space. We then discuss the transgression map of a fibration to prepare the ground for our discussion of the correspondence between minimal models and rational Postnikov towers. After exposing this correspondence we briefly relate the smooth forms on a manifold and the PL forms, and conclude with a short discussion of real homotopy type.

4.1 Rational differential forms

The basic building block of Sullivan’s construction is the algebra of rational differential forms on the standard n -simplex. This is the CDGA over $\mathbf{Q}$ given by:

$$\Lambda(t_0, \dots, t_n, dt_0, \dots, dt_n) / (\sum t_i = 1, \sum dt_i = 0)$$

where $\deg t_i = 0$ and $\deg dt_i = 1$, with the obvious differential. Note that this is just the algebra of $\mathbf{Q}$ -polynomial differential forms on $\mathbf{R}^{n+1}$ with the additional relation, true on $\Delta^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, that the sum of the coordinates be 1 (and the derived relation).

From there, one can proceed in two different ways to define a rational form on a space X . The first one, which is as far as we know Sullivan’s original construction, is to start with a triangularizable topological space X (for instance a smooth manifold), to choose a triangulation, which is a *simplicial complex*, and then to associate to each simplex a polynomial form as described in a way compatible with the restriction to faces; hence the name, often found in the literature, of “PL forms” (for Piecewise Linear). This process is very geometric, but has the drawback that one constantly has to worry about triangulations, subdivisions, simplicial approximations, and so on – this accounts for many technical complications in the Friedlander-Griffiths-Morgan lecture notes [GM81].

The other approach is to consider, for any topological space, the *simplicial set* $S_*(X)$ of singular simplices on X , and again to associate to every simplex a polynomial form in a way compatible with the face maps. This is our preferred method; we refer the reader to [BG76] or [FHT01, chapter 10]. We shall not delve any deeper into the construction; we limit ourselves to stating the follow-

ing result. Here $C^*(\cdot; \mathbf{Q})$ denotes the singular cochain complex functor with coefficients in $\mathbf{Q}$.

Theorem 4.1.1. *There exists a contravariant functor A^* from the category of topological spaces to the category of CDGAs over $\mathbf{Q}$ such that for any topological space X , there is a natural map of cochain complexes*

$$A^*(X) \rightarrow C^*(X; \mathbf{Q})$$

inducing an isomorphism on the cohomology algebras.

Let X be a simply-connected topological space. We extend the terminology of 3.4 as follows.

Definition 4.1.2. A *minimal model* for X is a quasi-isomorphism

$$m : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} A^*(X)$$

where $(\Lambda V, d)$ is minimal.

We shall need one more fact about the functor A^* , namely, that it “preserves homotopy”. Let X and Y be two simply-connected topological spaces, and let $m : (\Lambda V, d) \rightarrow A^*(X)$ and $m' : (\Lambda V', d') \rightarrow A^*(Y)$ be minimal models for X and Y . Then to a map $f : X \rightarrow Y$ we can associate $A^*(f) : A^*(Y) \rightarrow A^*(X)$ and from there a map $(\Lambda V', d') \rightarrow (\Lambda V, d)$ (use the lifting lemma 3.3.1 on page 30). We have the following (for a proof see [FHT01, p. 149]).

Proposition 4.1.3. *Let X and Y be simply-connected topological spaces, and let $m : (\Lambda V, d) \rightarrow A^*(X)$ and $m' : (\Lambda V', d') \rightarrow A^*(Y)$ be minimal models for X and Y respectively. Then the natural map*

$$\mathcal{T}_1(X, Y) \rightarrow \mathcal{G}_1((\Lambda V', d'), (\Lambda V, d))$$

induces a map

$$[X, Y] \rightarrow [(\Lambda V', d'), (\Lambda V, d)].$$

4.2 The transgression map

4.2.1 The definition through differential forms

Let $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ be a fibration with B and F path-connected. Let A^* be the functor defined above, sending a space to its CDGA of rational differential forms. (Note however that the discussion below would apply just as well to the singular cochain functor C^* : commutativity is not required). We have the following diagram.

$$\begin{array}{ccc} A^*(F) & \xleftarrow{A^*(i)} & A^*(E) \\ & & \uparrow A^*(p) \\ & & A^*(B) \end{array}$$

In this setting, a cohomology class in $H^{n-1}(F; \mathbf{Q})$ is said to be *transgressive* if it is possible to extend some form $\omega \in A^{n-1}(F)$ representing it to a form $\tau \in$

$A^{n-1}(E)$ such that $d\tau = p^*(\beta)$ for some closed form $\beta \in A^n(B)$ (by *closed* we mean that $d\beta = 0$, as is customary in the context of smooth differential forms). We shall denote the subgroup of transgressive elements by $T^{n-1} \subseteq H^{n-1}(F; \mathbf{Q})$.

The cohomology class $[\beta] \in H^n(B; \mathbf{Q})$ depends on several choices (the choice of a cochain in $C^{n-1}(F)$ representing our cohomology class, that of an extension in $C^{n-1}(E)$, that of an antecedent by p^*). The process just described therefore defines a map from T^{n-1} to some quotient B^n of $H^n(B; \mathbf{Q})$; this $t^n : T^{n-1} \rightarrow B^n$ is called the n -th *transgression map* of the fibration. We could generalize it to any coefficient group G by replacing $A^*(\cdot)$ with, say, $C^*(\cdot; G)$.

This definition seems strange at first sight, but is exactly the notion we shall need to relate principal fibrations and elementary extensions of algebras; its geometric content will become clear in 4.3. However, before we can proceed to this, we need to establish some properties of t^n and, in the case of a principal fibration, to relate it to the k -invariant.

4.2.2 The definition through relative cohomology

First, notice that we can avoid any reference to forms (or to cochains) in the definition of the transgression and phrase it in terms of cohomology classes only, in the following way. Let G be an abelian group (setting $G = \mathbf{Q}$ gives us the transgression defined above). Consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^{n-1}(*; G) & \xrightarrow{\delta} & H^n(B, *; G) & \xrightarrow{j} & H^n(B; G) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow p_0^* & & \downarrow p^* \\ \cdots & \longrightarrow & H^{n-1}(F; G) & \xrightarrow{\delta} & H^n(E, F; G) & \xrightarrow{j} & H^n(E; G) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

where the lines are fragments of the cohomology long exact sequences for the pairs $(B, *)$ and (E, F) , and p_0 is the obvious map of pairs associated to p . Then define:

- $T^{n-1} = \delta^{-1}(\text{Im } p_0^*)$;
- $B^n = H^n(B; G)/(j(\ker p_0^*))$;
- $t^n(z) = j(r) + j(\ker p_0^*)$ where $z \in T^{n-1}$ and $p_0^*(r + \ker p_0^*) = \delta z$.

This definition has the advantage that it can be formulated over any coefficient ring. It also allows us to identify the transgression map t^n with a differential in the cohomology Leray-Serre spectral sequence associated to the fibration, as follows. We omit the proof; see [McC01, pp. 185–189].

Theorem 4.2.1. *Let $F \xhookrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ be a fibration with B simply-connected and F path-connected, and let $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ be the associated cohomology Leray-Serre spectral sequence with coefficients in G . Then:*

- (1) $E_n^{0,n-1} \cong T^{n-1} \subseteq H^{n-1}(F; G)$;
- (2) $E_n^{n,0} \cong B^n$;
- (3) *These isomorphisms identify $d_n : E_n^{0,n-1} \rightarrow E_{n-1}^{n,0}$ with the n -th transgression map $t^n : T^{n-1} \rightarrow B^n$.*

From this we immediately deduce that for a fibration with fibre a $K(\pi, n)$, the $(n+1)$ -th transgression is a map

$$t^{n+1} : H^n(F; G) \rightarrow H^{n+1}(B; G);$$

indeed, $E_2^{0,q} = 0$ for $1 \leq q \leq n-1$.

4.2.3 The homology transgression

There is also a notion of transgression for homology, with a definition similar to our second definition of the cohomology transgression above. The n -th homology transgression is a map from a subgroup of $H_n(B; G)$ to a quotient of $H_{n-1}(F; G)$ and can be identified with the differential

$$d^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$$

in the homology Leray-Serre spectral sequence; see [McC01, pp. 185 sqq.] for details.

4.2.4 The link with the k-invariant

Since principal (π, n) -fibrations are pullbacks of the “universal” (π, n) -fibration $K(\pi, n) \hookrightarrow PK(\pi, n+1) \rightarrow K(\pi, n+1)$, and since the transgression is natural with respect to (fibre-preserving) maps of fibrations (this is easily seen from the first definition we gave), we first turn to the study of the fibration $K(\pi, n) \hookrightarrow PK(\pi, n+1) \rightarrow K(\pi, n+1)$.

Consider the homotopy long exact sequence for this fibration. The only non-trivial map is the isomorphism

$$\partial : \pi_{n+1}(K(\pi, n+1), *) \rightarrow \pi_n(K(\pi, n), *)$$

which provides an explicit identification of the abstractly isomorphic homotopy groups of the fibre and of the base. (This map also is occasionally referred to as the *transgression* of the fibration.)

In our case the $(n+1)$ -th (integral) homology transgression is an isomorphism

$$t_{n+1} : H_{n+1}(K(\pi, n+1); \mathbf{Z}) \rightarrow H_n(K(\pi, n); \mathbf{Z})$$

which may be seen, from its definition (see McCleary’s big diagram [McC01, p. 185]), to make the following square commute

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(K(\pi, n+1), *) & \xrightarrow{h} & H_{n+1}(K(\pi, n+1); \mathbf{Z}) \\ \downarrow \partial & & \downarrow t_{n+1} \\ \pi_n(K(\pi, n), *) & \xrightarrow{h} & H_n(K(\pi, n); \mathbf{Z}) \end{array}$$

where the horizontal maps are the Hurewicz isomorphisms.

Since all lower homology groups are trivial, we may identify the cohomology transgression with coefficients in G

$$t^{n+1} : H^n(K(\pi, n); G) \rightarrow H^{n+1}(K(\pi, n+1); G)$$

with

$$t^{n+1} : \text{Hom}(H_n(K(\pi, n); \mathbf{Z}), G) \rightarrow \text{Hom}(H_{n+1}(K(\pi, n+1); \mathbf{Z}), G)$$

and then with the dual of the homology transgression t_{n+1} ; in other words, t^{n+1} is composition by t_{n+1} in the diagram below.

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(K(\pi, n+1); \mathbf{Z}) & \longrightarrow & G \\ \downarrow t_{n+1} & & \parallel \\ H_n(K(\pi, n); \mathbf{Z}) & \longrightarrow & G \end{array}$$

Now consider cohomology with π coefficients, and recall that we defined (remark 1.2.4 on page 8) the fundamental class of $K(G, m)$ to be the class in $H^m(K(G, m); G)$ corresponding to the map $\kappa : H_m(K(G, m); \mathbf{Z}) \rightarrow G$ such that the composite

$$G \xrightarrow{\chi_{K(G, m)}} \pi_m(K(G, m), *) \xrightarrow{h} H_m(K(G, m); \mathbf{Z}) \xrightarrow{\kappa} G$$

is the identity. In our case we see that the diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \pi & \xrightarrow{\chi_{K(\pi, n+1)}} & \pi_{n+1}(K(\pi, n+1), *) & \xrightarrow{h} & H_{n+1}(K(\pi, n+1); \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\kappa} & \pi \\ \parallel & & \downarrow \partial & & \downarrow t_{n+1} & & \parallel \\ \pi & \xrightarrow{\chi_{K(\pi, n)}} & \pi_n(K(\pi, n), *) & \xrightarrow{h} & H_n(K(\pi, n); \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\kappa} & \pi \end{array}$$

commutes when the rightmost maps correspond to the appropriate fundamental classes: in other words, the $(n+1)$ -th cohomology transgression for the universal (π, n) -fibration sends the fundamental class of the fibre to the fundamental class of the base.

Next, consider any principal (π, n) -fibration $p : E \rightarrow B$.

$$\begin{array}{ccccc} K(\pi, n) & \longrightarrow & E & \longrightarrow & PK(\pi, n+1) \\ & & p \downarrow & & \downarrow \\ & & B & \xrightarrow{k} & K(\pi, n+1) \end{array}$$

The naturality of the transgression means that the square

$$\begin{array}{ccc} H^n(K(\pi, n); \pi) & \xlongequal{\quad} & H^n(K(\pi, n); \pi) \\ t'^{n+1} \downarrow & & \downarrow t'^{n+1} \\ H^{n+1}(B; \pi) & \xleftarrow{H^{n+1}(k)} & H^{n+1}(K(\pi, n+1); \pi) \end{array}$$

commutes (where t'^{n+1} is the $(n+1)$ -th cohomology transgression for p). Since in effect we defined the k -invariant of p to be the pullback by k of the fundamental class of $K(\pi, n+1)$ (see remark 1.2.7 on page 9), we have just established that for a general principal (π, n) -fibration, the $(n+1)$ -th cohomology transgression map *sends the fundamental class of the fibre to the k -invariant of the fibration*.

4.2.5 The rational case

Now consider a principal (V, n) -fibration $K(V, n) \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, where V is a finite-dimensional rational vector space. The $(n + 1)$ -th transgression with rational coefficients for this fibration is a map

$$t^{n+1} : H^n(K(V, n); \mathbf{Q}) \rightarrow H^{n+1}(B; \mathbf{Q}).$$

Using the isomorphisms

$$V \xrightarrow[\chi_{K(V, n)}]{\sim} \pi_n(K(V, n), *) \xrightarrow[h]{\sim} H_n(K(V, n); \mathbf{Z}) \cong H_n(K(V, n); \mathbf{Q})$$

one sees that this t^{n+1} determines a map

$$V^* = \text{Hom}(V, \mathbf{Q}) \rightarrow H^{n+1}(B; \mathbf{Q})$$

which is dual (over $\mathbf{Q}$) to a map

$$H_{n+1}(B) \rightarrow V$$

which corresponds to a cohomology class in $H^{n+1}(B; V)$. We claim that this class is the k-invariant of the fibration. This is proved using the previous result for the transgression with coefficients in V and noting that in this rational setting, the cohomology transgressions with coefficient in $\mathbf{Q}$ and V are dual (over $\mathbf{Q}$ and V respectively) to the same homology transgression. We leave it to the reader to draw the relevant commutative diagram and do not spell out the matter in more details.

4.3 Rational Postnikov tower and minimal model

Let V be a finite-dimensional $\mathbf{Q}$ -vector space, and let $K(V, n) \xhookrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ be a principal (V, n) -fibration. We construct a CDGA $(H^*(K(V, n); \mathbf{Q}) \otimes A^*(B), d)$ and a map

$$\rho : (H^*(K(V, n); \mathbf{Q}) \otimes A^*(B), d) \rightarrow A^*(E)$$

as follows. Recall our first definition of the transgression: for every class $[\omega] \in H^n(K(V, n); \mathbf{Q})$ we pick a form $\tau \in A^n(E)$ and a closed form $\beta \in A^{n+1}(B)$ such that $[A^n(i)(\tau)] = [\omega]$ and $d\tau = A^{n+1}(p)(\beta)$. Then the transgression is given by $t^{n+1}([\omega]) = [\beta]$. We define d so as to extend the differential of $A^*(B)$, and we set $d([\omega]) = \beta$. Then we define:

$$\rho([\omega] \otimes \gamma) = \tau \cdot A^k(p)(\gamma)$$

for $\gamma \in A^k(B)$. The transgression is precisely defined so that $d\rho = \rho d$: therefore ρ is a well-defined CDGA map. In this construction, $A^*(B)$ may be replaced by a quasi-isomorphic CDGA (C, d) in a straightforward way.

The important fact about ρ is that it induces an isomorphism on cohomology. With the ingredients we already have, [DGMS75] and [Sul77] seem to imply that the proof of this fact can be completed using a simple geometric argument; we have not been able to do so. Instead, we refer the reader to the more algebraic argument of [GM81, appendix A1], which is unfortunately much complicated by the fact that they work with simplicial complexes. Alternatively, our proposition easily follows from [FHT01, proposition 15.6 p. 199].

Proposition 4.3.1 (Chevalley-Hirsch-Koszul formula). *Let $K(V, n) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ be a principal (V, n) -fibration, with V a finite-dimensional $\mathbf{Q}$ -vector space. Let $(B, d) \rightarrow A^*(B)$ be a quasi-isomorphism of CDGAs. Then the map*

$$\rho : (H^*(K(V, n); \mathbf{Q}) \otimes B, d) \rightarrow A^*(E)$$

constructed above is a quasi-isomorphism.

Now let X be a topological space of finite type; we can apply this proposition inductively to its rational Postnikov tower. This yields an inductively constructed graded vector space V^* and differential d such that the following diagram commutes.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & A^*(X_{4, \mathbf{Q}}) & \xleftarrow{\sim} & (\Lambda(V^{\leq 4}), d) \\
 & \nearrow A^*(j_4) & \uparrow A^*(q_3) & & \uparrow \\
 & & A^*(X_{3, \mathbf{Q}}) & \xleftarrow{\sim} & (\Lambda(V^{\leq 3}), d) \\
 & \nearrow A^*(j_3) & \uparrow A^*(q_2) & & \uparrow \\
 A^*(X) & \xleftarrow{A^*(j_2)} & A^*(X_{2, \mathbf{Q}}) & \xleftarrow{\sim} & (\Lambda(V^{\leq 2}), d)
 \end{array}$$

We have the following properties:

- The maps $A^*(j_k)$ are isomorphisms on cohomology in degrees $\leq k$;
- $V^k \cong \text{Hom}(\pi_k(X) \otimes \mathbf{Q}, \mathbf{Q})$;
- the differential $d : V^k \rightarrow \Lambda V^{\leq k-1}$ is dual (modulo the appropriate identifications) to the k -invariant of q_k .

From the first of these and the uniqueness of the minimal model, it follows that the direct limit $(\Lambda V, d)$ is the minimal model of X . The two others then show how the minimal model of X encodes the rational homotopy type of X . In particular, the dimension of $\pi_n(X) \otimes \mathbf{Q}$ can be read off from the number of generators of degree n ; but it is also possible, for example, to extract information about the Whitehead products (which are products $\pi_n(X) \times \pi_m(X) \rightarrow \pi_{n+m-1}(X)$, so a higher-order structure on the homotopy groups) from the differential — see [FHT01, p. 175 sqq.].

We now turn to the converse: given a minimal algebra $(\Lambda V, d)$ such that all V^k are finite-dimensional, we construct a rational Postnikov tower corresponding to it, and therefore (taking the direct limit and a CW model, as in corollary 2.4.4 on page 21) a rational space X and a quasi-isomorphism $A^*(X) \xrightarrow{\sim} (\Lambda V, d)$. This is immediate from the following observation.

Let B be a topological space, let $(C, d) \xrightarrow{\sim} A^*(B)$ be a quasi-isomorphism and let $(C, d) \otimes (\Lambda V, d)$ be a relative Sullivan algebra, where V is a finite-dimensional graded $\mathbf{Q}$ -vector space concentrated in degree $n \geq 2$. Then d determines a map $V \rightarrow H^{n+1}(B; \mathbf{Q})$, which dualizes to a map $H_{n+1}(B) \rightarrow V^*$ defining a cohomology class $H^{n+1}(B; V^*)$. Choosing a $K(V^*, n+1)$, we then get

a map $k : B \rightarrow K(V^*, n+1)$. Pulling back the universal $(V^*, n+1)$ -fibration, we get a principal $(V^*, n+1)$ -fibration with total space E whose transgression map may be identified with d . Then from the considerations above there is a quasi-isomorphism $(C, d) \otimes (\Lambda V, d) \rightarrow A^*(E)$ (remember that there is a canonical isomorphism $V^{**} \cong V$).

There is a similar result for maps. Recall that if X and Y are simply-connected topological spaces, and if $m : (\Lambda V, d) \rightarrow A^*(X)$ and $m' : (\Lambda V', d') \rightarrow A^*(Y)$ are minimal models for X and Y , then there is a map:

$$[X, Y] \rightarrow [(\Lambda V', d'), (\Lambda V, d)].$$

We have the following.

Proposition 4.3.2. *If A, X are two simply-connected rational CW complexes, and if $m : (\Lambda V, d) \rightarrow A^*(X)$ and $m' : (\Lambda V', d') \rightarrow A^*(Y)$ are minimal models for X and Y respectively, then the map*

$$[X, Y] \rightarrow [(\Lambda V', d'), (\Lambda V, d)].$$

is a bijection.

This is proved using the same general methods: from a map between the minimal algebras, we construct inductively a map between the Postnikov towers; but it is rather technical and requires a fair amount of obstruction theory. We refer the reader to [GM81, chapter XIV].

Now consider the functor from the homotopy category of simply-connected rational CW complexes of finite type to the homotopy category of minimal CDGAs over $\mathbf{Q}$ of finite type defined in the following way: a space X is sent to some minimal model of $A^*(X)$, and a homotopy class of maps $X \rightarrow Y$ is sent to the corresponding homotopy class of maps between the chosen minimal models. Our results mean that this functor is full, faithful and surjective on isomorphism classes of objects: it is an equivalence of categories.

Using the equivalences of categories we established in sections 2 and 3, this may be diversely rephrased, for example as: the rational homotopy category of simply-connected topological spaces of finite type is equivalent to the homotopy category of simply-connected CDGAs over $\mathbf{Q}$ of finite type.

4.4 Smooth differential forms and real homotopy type

Similarly to what we did in section 4.1, we can define an algebra of smooth differential forms on the standard n -simplex. Then, for any smooth manifold M , we can consider the simplicial set $S_*^\infty(M)$ of smooth singular simplices on M , and associate to each simplex a smooth form in a way compatible with the face maps. This defines a notion of piecewise smooth form on M and allows us to build $A_{C^\infty}^*(M)$, a CDGA over $\mathbf{R}$ which can be used to relate the de Rham complex $\Omega^*(M)$ and $A^*(M) \otimes \mathbf{R}$. We refer the reader to [FHT01, chapter 11] for details, and for the proof of the following theorem.

Theorem 4.4.1. *There exists a contravariant functor $A_{C^\infty}^*$ from the category of smooth manifolds to the category of CDGAs over $\mathbf{R}$ such that for any smooth manifold M , there are natural maps of CDGAs*

$$A^*(M) \otimes \mathbf{R} \rightarrow A_{C^\infty}^*(M) \leftarrow \Omega^*(M)$$

inducing isomorphisms on cohomology.

In particular, the minimal models of $A^*(M) \otimes \mathbf{R}$ and $\Omega^*(M)$ are isomorphic. In fact, we see that if $m : (\Lambda V, d) \rightarrow A^*(M)$ is the minimal model for $A^*(M)$, then the minimal model for $\Omega^*(M)$ is $(\Lambda V, d) \otimes \mathbf{R}$. This is what justifies calling the minimal model of $\Omega^*(M)$ the *real homotopy type* of M : it is the real form of the algebra containing all the rational homotopy-theoretic information about M . We do not know of any suitable “geometric” notion of real homotopy type; as far as we know, there is no “real Postnikov tower”. See [DGMS75] for a discussion.

It is then possible to compute the rank of $\pi_n(M) \otimes \mathbf{Q}$ from $\Omega^*(M)$ (recall that every compact smooth manifold has finite-dimensional cohomology): it is just the number of generators of degree n in the minimal model of $\Omega^*(M)$.

We very much regret that lack of time prevented us from adding computations and examples. One of the great advantages of rational homotopy theory is its computational power, and we did not do justice to it in this work. We refer the reader to [GM81, chapter XIII] and to [FHT01] for a broader overview of the possible applications.

Bibliography

- [BG76] Aldridge K. Bousfield and V. K. A. M. Gugenheim. On PL De Rham theory and rational homotopy type. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 179, 1976.
- [BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1982.
- [DGMS75] Pierre Deligne, Phillip A. Griffiths, John W. Morgan, and Dennis Sullivan. Real homotopy theory of Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 29:245–274, 1975.
- [DS95] William G. Dwyer and J. Spalinski. Homotopy theories and model categories. In I. M. James, editor, *Handbook of Algebraic Topology*, pages 73–126. North-Holland, 1995. Also available online. URL: <http://hopf.math.purdue.edu/cgi-bin/generate?/Dwyer-Spalinski/theories>.
- [FHT01] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational Homotopy Theory*, volume 205 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2001.
- [GM81] Phillip A. Griffiths and John W. Morgan. *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*, volume 16 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1981.
- [Hat] Allen Hatcher. Spectral sequences in algebraic topology. Preparatory draft, unpublished. URL: <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html>.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hu59] Sze-Tsen Hu. *Homotopy Theory*, volume VIII of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1959.
- [McC01] John McCleary. *A User’s Guide to Spectral Sequences*, volume 58 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, second edition, 2001.
- [Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical Algebra*, volume 43 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1967.
- [Qui69] Daniel G. Quillen. Rational homotopy theory. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 90(2):205–295, 1969.

- [Ser51] Jean-Pierre Serre. Homologie singulière des espaces fibrés. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 54(3):425–505, 1951.
- [Ser53] Jean-Pierre Serre. Groupes d’homotopie et classes de groupes abéliens. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 58(2):258–294, 1953.
- [Spa66] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966.
- [Sul70] Dennis Sullivan. *Geometric Topology - 1 : Localization, Periodicity, and Galois Symmetry*. MIT Press, 1970.
- [Sul74] Dennis Sullivan. Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 100(1):1–79, 1974.
- [Sul77] Dennis Sullivan. Infinitesimal computations in topology. *Publications I. H. E. S.*, 47:269–331, 1977.

Le Grand Théorème de Picard

Pierre-Yves Bienvenu, David Waszek

Sous la direction de
Olivier Benoist

Introduction

La théorie des singularités des fonctions analytiques est l'œuvre de quelques mathématiciens du XIX^e siècle, notamment du « grand législateur » Karl Weierstrass¹, qui énonça le théorème de Casorati-Weierstrass en 1876. Émile Picard, né en 1856 à Paris où il expira en 1941, est un ancien élève de l'École normale supérieure. En 1879, dans une courte note de l'Académie des sciences [Pic79], il expose ce qui allait devenir son petit théorème :

une fonction entière, qui ne devient jamais égale ni à a , ni à b , est nécessairement une constante.

Contrairement aux apparences, il s'agit principalement d'un théorème sur les singularités essentielles, car hormis les polynômes, dont la surjectivité est bien connue, les fonctions entières ont une singularité essentielle à l'infini. En 1880, Picard écrit un article [Pic80] où il redémontre son premier théorème et en avance un autre, le futur « grand ». Il souhaite *compléter l'étude faite par M. Weierstrass de la forme prise par une fonction analytique au voisinage d'un point singulier essentiel*.

Quant à nous, nous allons démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 1 (Petit théorème de Picard). Une fonction entière non constante atteint toute valeur complexe, sauf une au plus.

Théorème 2 (Grand théorème de Picard). Soit f une fonction holomorphe définie au voisinage de $s \in \mathbb{C}$ qui admet une singularité essentielle en s . Alors tout voisinage V de s contient une infinité d'antécédents de tous les nombres complexes, sauf d'un au plus.

Nous voulons adopter un raisonnement géométrique pour aboutir à ce résultat. Dans la première partie, nous exposerons quelques généralités sur les surfaces de Riemann et nous familiariserons avec les fonctions holomorphes vers la sphère de Riemann. Dans la suivante, nous présenterons la théorie des revêtements et l'appliquerons aux surfaces de Riemann ; nous énoncerons le théorème d'uniformisation et en déduirons l'existence d'un revêtement du plan complexe privé de deux points par le demi-plan supérieur. Nous établirons alors aisément le petit théorème de Picard. Dans la troisième partie, nous présenterons la géométrie hyperbolique : elle nous permettra de mieux comprendre la géométrie de certaines surfaces de Riemann et de démontrer le grand théorème.

Nous remercions chaleureusement notre directeur Olivier Benoist, dont la disponibilité sans limite, l'enthousiasme et les conseils nous ont été précieux.

1. Cette désignation se trouve dans la lettre de Gaston Darboux à Jules Houël du 8 février 1881, publié par Pierre Dugac en 1973 dans *Éléments d'analyse de Karl Weierstrass*.

Table des matières

1	Surfaces de Riemann	3
1.1	Premières définitions	3
1.2	Applications holomorphes entre surfaces de Riemann	4
1.3	Singularités et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$	6
1.4	Reformulation du grand théorème de Picard	7
2	Le point de vue des revêtements et le petit théorème de Picard	8
2.1	Chemins, lacets, homotopie et groupe fondamental	8
2.1.1	Chemins et lacets	8
2.1.2	Homotopie	9
2.1.3	Groupe fondamental	11
2.2	Revêtements	12
2.2.1	Définition	12
2.2.2	Relèvements par des revêtements : définition et premières propriétés	14
2.2.3	Relèvement des homotopies et des chemins	16
2.2.4	Théorème d'existence de relèvements	17
2.2.5	Morphismes de revêtements et revêtements simplement connexes	18
2.2.6	La base d'un revêtement universel comme quotient	20
2.2.7	Existence d'un revêtement simplement connexe	21
2.3	Revêtements et surfaces de Riemann	21
2.3.1	Structure conforme sur l'espace total d'un revêtement	21
2.3.2	Théorème d'uniformisation et classification des surfaces de Riemann connexes	23
2.3.3	Le cas de la sphère privée de trois points	23
2.4	Le petit théorème de Picard	25
3	Variétés riemanniennes, géométrie hyperbolique et grand théorème de Picard	27
3.1	Généralités	27
3.2	Une variété riemannienne connexe est un espace métrique	28
3.3	Géométrie hyperbolique : le demi-plan $\mathbb{H}$, le disque unité ouvert $\mathbb{D}$	30
3.4	Automorphismes conformes et isométries	30
3.5	Géodésiques hyperboliques	32
3.6	Surfaces de Riemann revêtues par le disque	34
3.7	Le grand théorème de Picard	35

Section 1

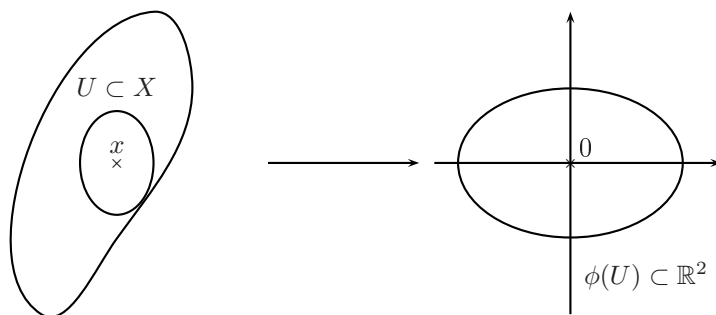
Surfaces de Riemann

Les surfaces de Riemann sont des variétés de dimension 2 (ou de dimension 1 sur $\mathbb{C}$) munies d'une structure raffinée : les changements de carte, qui sont des homéomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^2$, sont priés d'être holomorphes. L'objectif principal de cette partie est de définir les fonctions holomorphes entre surfaces de Riemann et de s'habituer à considérer les fonctions holomorphes ou méromorphes vers $\mathbb{C}$ comme des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ce point de vue nous offrira un accès plus aisé au théorème de Picard.

Pour approfondir cette partie, on peut consulter [For81].

1.1 Premières définitions

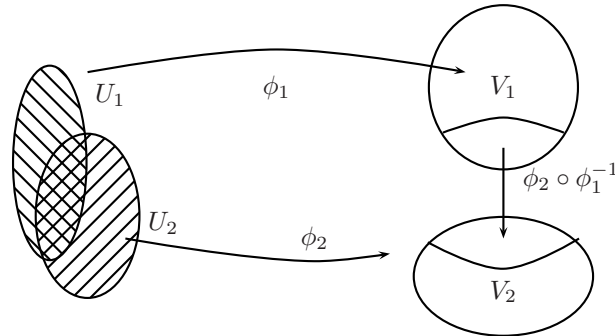
Définition 1.1.1. On appelle surface un espace topologique X séparé tel que tout point x admet un voisinage U homéomorphe à un ouvert V de $\mathbb{R}^2$. Si ϕ est le nom de l'homéomorphisme, on dira que (U, ϕ) est une carte au voisinage de x . On peut même imposer $\phi(x) = 0$.



Définition 1.1.2 (cartes compatibles). Soit X une surface. Soit U_1 et U_2 deux ouverts de X et $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$, $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ deux cartes vers $\mathbb{C}$. Ces deux cartes sont dites compatibles si le changement de carte

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

est une bijection holomorphe (sa réciproque l'est alors aussi).



Définition 1.1.3. Un atlas complexe sur X est un ensemble de cartes compatibles qui recouvrent X .

Deux atlas sont dits équivalents si toute carte de l'un est compatible avec toute carte de l'autre (c'est une relation d'équivalence).

Une structure complexe est alors le choix d'une classe d'équivalence d'atlas.

Définition 1.1.4. Une surface de Riemann est un couple (X, Σ) formé d'une surface et d'une structure complexe.

Exemples 1.1.1. 1. Tout ouvert U de $\mathbb{C}$ est automatiquement une surface de Riemann. En effet, il suffit de lui adjoindre l'atlas formé de la seule carte (U, Id_U) .

Tout ouvert d'une surface de Riemann en est une aussi : restreindre les cartes à cet ouvert.

2. **Les courbes elliptiques.** Ce sont des quotients de type $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$. En tant que quotients de $\mathbb{C}$ par un groupe discret agissant librement et proprement discontinûment, ils sont naturellement munis d'une structure de surface de Riemann.

3. On définit un espace topologique $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (où ∞ n'est pas un nombre complexe) : ses ouverts sont les ouverts de $\mathbb{C}$ ainsi que les $\mathbb{C} \setminus K \cup \{\infty\}$ pour K compact de $\mathbb{C}$.

On le munit de deux cartes : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$ et $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ (on pose $\frac{1}{\infty} = 0$). Elles sont bien compatibles

1.2 Applications holomorphes entre surfaces de Riemann

De même que l'on s'empresse de définir les applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les variétés $\mathcal{C}^\infty$, il est naturel de définir des applications holomorphes entre surfaces de Riemann. En effet, l'holomorphic est une propriété locale qu'il suffit de vérifier dans les cartes. C'est ce que l'on traduit dans la

Définition 1.2.1. Soit X, Y deux surfaces de Riemann. On dit que $f : X \rightarrow Y$ est holomorphe si pour tout couple de cartes $(\psi_1 : U_1 \subset X \rightarrow V_1, \psi_2 : U_2 \subset Y \rightarrow V_2)$, l'application

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}$$

entre deux ouverts de $\mathbb{C}$ est holomorphe sur son domaine de définition.

On peut étendre nos connaissances d'analyse complexe.

Proposition 1.2.1. *Les applications holomorphes non constantes entre surfaces de Riemann connexes sont ouvertes.*

Preuve. Soit une telle application $f : X \rightarrow Y$. Soit $x \in X$, U et V des ouverts de cartes connexes autour de x et $f(x)$. Alors quitte à remplacer U par $U \cap f^{-1}(V)$, on peut supposer que $f(U) \subset V$. Soit $\phi : U \rightarrow U'$ et $\psi : V \rightarrow V'$ ces cartes. Alors l'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U' \rightarrow V'$ est holomorphe entre deux ouverts connexes de $\mathbb{C}$ par définition et non constante. On applique alors le théorème de l'image ouverte : $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(U') = \psi(f(U))$ est ouvert. Ainsi, $f(U)$ l'est aussi. ■

Ceci a plusieurs corollaires intéressants.

Corollaire 1.2.2. *Soit X une surface de Riemann connexe, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe.*

1. *S'il existe x_0 tel que $\forall x \in X, |f(x)| \leq |f(x_0)|$, alors f est constante.*
2. *Si X est compacte, f est constante.*

Preuve. On raisonne par l'absurde. On suppose f non constante.

1. Alors $f(X)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient $f(x_0)$. Il contient donc aussi une petite boule de rayon r centré en $f(x_0)$, et donc $f(x_0)(1 + r/2)$ qui est de module plus grand. Voilà une contradiction.
2. Si X est compact, $f(X)$ est ouvert, mais il est compact, donc fermé. C'est donc $\mathbb{C}$, et alors $\mathbb{C}$ est compact : absurde. ■

Définition 1.2.2 (équivalence conforme). Soit X, Y deux surfaces de Riemann et $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est un équivalence conforme si elle est bijective et holomorphe. Quand $X = Y$, on parlera plus volontiers d'automorphisme conforme. On dit alors que X et Y sont conformément équivalentes.

Remarque 1.2.1. Une équivalence conforme est un homéomorphisme, mais la réciproque est fausse. L'application $z \mapsto \bar{z}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ qui inverse l'orientation des angles.

Exemples 1.2.1. 1. L'application

$$\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

est une équivalence conforme entre le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ et le disque unité ouvert $\mathbb{D}$. En fait, un théorème de Riemann stipule que tout ouvert non trivial et simplement connexe de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent au disque.

2. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Soit la relation d'équivalence sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$:

$$(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : (z_1, z_2) = \lambda(z'_1, z'_2).$$

Le quotient de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ par cette relation s'appelle droite projective complexe et se note $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Les éléments de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont de la forme $[1, z]$ avec $z \neq 0$ (ensemble U) ou $[z, 1]$ (ensemble V). Bien sûr, U et V se rencontrent car $[1, z] = [1/z, 1]$ si $z \neq 0$. On en déduit deux cartes évidentes. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est alors conformément équivalent à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Il faut voir $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ comme la sphère, qui lui est conformément équivalente via la projection stéréographique. On l'appelle la sphère de Riemann.

3. Tous les points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se valent. En effet, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{p\}$ est conformément équivalent à $\mathbb{C}$ et ce que p soit ∞ ou un nombre complexe. Si $p = \infty$, c'est clair, et sinon, on applique la transformation $z \rightarrow \frac{1}{z-p}$ qui est bien une équivalence conforme entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{p\}$ et $\mathbb{C}$.
4. Notons $B(\infty, R) = \{\infty\} \cup \{z \mid |z| \geq R\}$. Alors $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus B(p, R)$ est conformément équivalent au disque unité ouvert quels que soient $p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $R > 0$ ($B(p, R)$ est alors appelé calotte). En effet, c'est évident si $p = \infty$, et si $p \in \mathbb{C}$, par la transformation $z \rightarrow \frac{1}{z-p}$, on se ramène au cas précédent.

1.3 Singularités et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Soit $X' \subset X$ un ouvert d'une surface de Riemann tel que $S = X \setminus X'$ soit discret, $f : X' \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe. Les éléments de S seront appelés singularités de f sur X .

Définition 1.3.1. On dit que $s \in S$ est une singularité inessentielle s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(z-s)^k f$ est bornée au voisinage de s . Sinon, la singularité sera dite essentielle.

Définition 1.3.2. La fonction f est dite méromorphe sur X si elle n'a aucune singularité essentielle dans $X \setminus X'$.

L'intérêt de l'abolition de la distinction usuelle entre pôles et singularités éliminables apparaît dans le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Toute fonction méromorphe sur X se prolonge en fonction holomorphe vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Preuve. Soit $s \in X \setminus X'$.

- Si f est bornée au voisinage de s , nous sommes dans le cas bien connu des singularités éliminables. Alors f se prolonge en fonction holomorphe vers $\mathbb{C}$, a fortiori vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
- sinon, soit $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (z-s)^n f \text{ est bornée au voisinage de } s\}$. On sait qu'alors, $(z-s)^k f$ se prolonge en une fonction holomorphe g avec $g(s) \neq 0$. On a alors pour $z \neq s$ $f(z) = \frac{g(z)}{(z-s)^k}$. On pose $f(s) = \infty$. Visiblement, le prolongement ainsi défini est continu : pour tout voisinage de l'infini $V = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus K$, avec $K \subset B(0, R)$, on peut trouver un voisinage U de s tel que $f(U) \subset V$.

Soit $\phi : U_1 \subset X \rightarrow V_1, \psi : U'_1 \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow V'_1$ des cartes vers $\mathbb{C}$. Il s'agit de montrer que $g := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : V_1 \rightarrow V'_1$ est holomorphe entre ces deux ouverts de $\mathbb{C}$.

Elle est d'abord continue sur V_1 puisque f l'est sur U . Elle est de plus holomorphe sur $V \setminus \phi(S \cap U_1)$. Pour chaque singularité s , par discrétion, il existe un voisinage de s sur lequel la fonction est continue et holomorphe sauf en s .

Le principe du prolongement analytique amène alors à la conclusion désirée (s est une singularité éliminable pour g). ■

Cette remarque nous sera bien utile plus tard.

Proposition 1.3.2. *Soit $s \in S$. Il y a équivalence entre*

1. *la fonction f est localement à valeurs dans la sphère privée d'une calotte : il existe un voisinage V de s inclus dans X' , $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $R > 0$ tel que $f(V \setminus \{s\}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus B(z, R)$*
2. *la singularité s est inessentielle.*

Preuve. Une singularité est inessentielle si et seulement si la fonction a une limite dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en ce point. $2 \Rightarrow 1$ en découle. Supposons 1 et posons $g(z) = \frac{1}{f(z)-z}$. Nous définissons alors une fonction méromorphe bornée ($|g| \leq 1/R$) non nulle à moins que $f = \infty$ constamment. Alors comme $f = 1/g + z$, f est méromorphe et n'a pas de singularité essentielle. ■

On obtient aussi le théorème de Casorati-Weierstrass.

Théorème 1.3.3. *Soit s une singularité essentielle. Pour tout voisinage V de s inclus dans X' , $f(V \setminus \{s\})$ est dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Preuve. On suppose au contraire tenir un voisinage V de s inclus dans X' tel que $f(V \setminus \{s\})$ ne soit pas dense; il y a alors un ouvert $B(p, R)$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui ne le rencontre pas. Alors $f(V \setminus \{s\})$ est inclus dans la sphère privée d'une calotte. D'où la contradiction. ■

1.4 Reformulation du grand théorème de Picard

Cette partie suggère une nouvelle formulation du théorème de Picard.

Théorème 1.4.1 (de Picard). *Soient X une surface de Riemann, $s \in X$, et $f : X \setminus \{s\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une fonction holomorphe. Si $f(V \setminus \{s\})$ est inclus dans la sphère de Riemann privée de trois points, s n'est pas une singularité essentielle.*

Section 2

Le point de vue des revêtements et le petit théorème de Picard

Nous démontrons ici le petit théorème de Picard par des méthodes largement issues de la topologie algébrique. Nous présentons tout d'abord le groupe fondamental puis développons les bases de la théorie des revêtements ; nous établissons en particulier le théorème du relèvement (théorème 2.2.8). Nous appliquons ensuite cette théorie au cas des surfaces de Riemann et montrons comment obtenir des relèvements holomorphes.

Le petit théorème de Picard découle aisément de ces considérations, à condition de savoir qu'il existe un revêtement de la sphère de Riemann privée de trois points par le demi-plan supérieur (théorème 2.3.12). Nous dérivons ici l'existence d'un tel revêtement du très général théorème d'uniformisation (classification des surfaces de Riemann simplement connexes), que nous nous contentons d'énoncer.

2.1 Chemins, lacets, homotopie et groupe fondamental

Pour plus de précisions sur l'ensemble de cette section, et en particulier pour des preuves complètes de nos affirmations, se référer par exemple à [Paub]. On note ici X un espace topologique quelconque.

2.1.1 Chemins et lacets

On rappelle qu'un *chemin* dans X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$; on dit que $\gamma(0)$ est son *origine* et $\gamma(1)$ son *extrémité*. Le *chemin inverse* $\bar{\gamma}$ de γ est l'application :

$$\bar{\gamma} : t \mapsto \gamma(1 - t)$$

et la concaténation $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ de deux chemins γ_1 et γ_2 vérifiant $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ est l'application :

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 : t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{pour } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{pour } t \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

Un *lacet* dans X est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues ; l'origine du chemin est dans ce cas appelée *point base* du lacet. On appelle *lacet trivial* en x le chemin constant $t \mapsto x$. Pour un lacet γ de point base x , on

convient que γ^n ($n \in \mathbb{N}^*$) désigne la concaténation itérée n fois de γ avec lui-même, que $\gamma^{-n} = \overline{\gamma}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et que γ^0 désigne le lacet trivial en x .

Remarque 2.1.1. On identifie naturellement les lacets aux application continues $\mathbb{S}_1 \rightarrow X$, où $\mathbb{S}_1$ désigne l'espace topologique quotient de $[0, 1]$ par la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $0 \sim 1$.

2.1.2 Homotopie

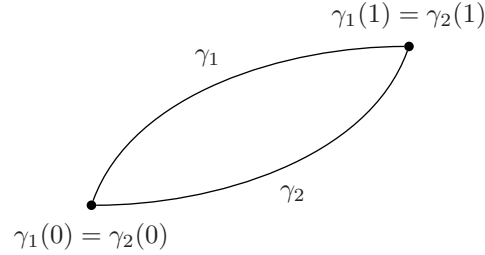
De nombreuses propriétés des applications continues — et en particulier des chemins et des lacets — sont préservées par déformation continue ; pour préciser cette idée, on introduit les définitions suivantes.

Définition 2.1.1. Soient X et Y deux espaces topologiques, soit A une partie de X , et soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(\cdot, 0) = f$ et $h(\cdot, 1) = g$. On dit que f et g (égales sur A) sont *homotopes relativement à A* s'il existe une telle application h vérifiant de plus que pour tout $a \in A$, pour tout $t \in [0, 1]$, $h(a, t) = f(a)$.

Remarque 2.1.2. On peut voir un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ comme une homotopie entre les applications sur un singleton $\{0\} \rightarrow X$ données par $0 \mapsto \gamma(0)$ et $0 \mapsto \gamma(1)$.

Cette notion s'applique naturellement aux chemins et aux lacets, mais quelques problèmes de terminologie se posent et **il importe de prendre garde aux conventions suivantes**.

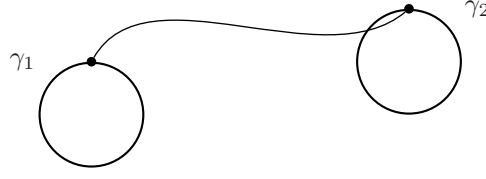
Définition 2.1.2. On dira que deux *chemins* γ_1 et γ_2 ayant même origine et même extrémité sont homotopes (ou que γ_1 et γ_2 sont homotopes *en tant que chemins*) si les applications γ_1 et γ_2 sont homotopes relativement à $\{0, 1\}$.



Définition 2.1.3. On dira que deux *lacets* γ_1 et γ_2 ayant même point base sont homotopes *relativement à leur point base* (ou que γ_1 et γ_2 sont *relativement homotopes*) si les applications γ_1 et $\gamma_2 : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ sont homotopes relativement à $\{0\}$.

Définition 2.1.4. On dira que deux *lacets* γ_1 et γ_2 sont *librement homotopes* si les applications γ_1 et $\gamma_2 : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ sont homotopes, et on appelle *homotopie libre* entre γ_1 et γ_2 une homotopie entre ces deux applications.

Remarque 2.1.3. Autrement dit, deux lacets $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ sont librement homotopes s'il existe une homotopie h entre les deux applications γ_1 et γ_2 telle que pour tout $s \in [0, 1]$, $h(\cdot, s)$ est toujours un lacet, c'est-à-dire $h(0, s) = h(1, s)$.



Exemple 2.1.1. Soient $r, r' \geq 0$. Les deux lacets $\gamma : t \mapsto re^{2i\pi t}$ et $\gamma' : t \mapsto r'e^{2i\pi t}$ sont librement homotopes dans l'ouvert $B(0, \max\{r, r'\})$ de $\mathbb{C}$: on peut par exemple prendre l'homotopie :

$$h : (t, s) \mapsto ((1-s)r + sr')e^{2i\pi t}.$$

On voit en particulier, en prenant $r' = 0$, que tout lacet circulaire centré en 0 est homotope au lacet trivial.

S'il est souvent possible, quoique fastidieux, de démontrer que deux lacets donnés sont homotopes en construisant une homotopie explicitement, comme nous venons de le faire, il n'est pas immédiat, en général, de montrer que deux lacets particuliers *ne sont pas* homotopes. Dans le cas où X est un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, et où l'on considère des chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on dispose d'un invariant particulièrement commode : les intégrales de contour de toute fonction holomorphe sur U le long de deux lacets $\mathcal{C}^1$ par morceaux librement homotopes dans U sont égales (forme homotopique du théorème de Cauchy ; cf. par exemple [Lan77, pp. 106–107]).

Exemple 2.1.2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts, et soient $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$, $r, r' \leq \frac{1}{2}|a-b|$. Notons $\gamma_a : t \mapsto a + re^{2i\pi t}$ et $\gamma_b : t \mapsto b + r'e^{2i\pi t}$. On souhaite montrer que pour $n, m \in \mathbb{Z}$, les lacets γ_a^n et γ_b^m ne peuvent être homotopes dans l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ que si $n = m = 0$. Or on calcule aisément :

$$\int_{\gamma_a^n} \frac{dz}{z-a} = 2in\pi$$

et, puisque la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, ouvert dans lequel, d'après l'exemple 2.1.1, γ_b est homotope à un lacet trivial :

$$\int_{\gamma_b^m} \frac{dz}{z-a} = 0$$

ce qui montre que l'on doit avoir $n = 0$; par symétrie, $m = 0$.

Une propriété essentielle de l'homotopie est d'être conservée par les applications continues. Pour ne pas alourdir les notations, nous ne la donnons que dans le cas particulier des lacets, le seul que nous utiliserons.

Proposition 2.1.1. Soient X et Y des espaces topologiques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si γ_1 et $\gamma_2 : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ sont des lacets de même point base relativement homotopes (resp. des lacets librement homotopes), alors $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2 : \mathbb{S}_1 \rightarrow Y$ sont des lacets de même point base relativement homotopes (resp. des lacets librement homotopes).

Preuve. Si h est une homotopie relative à $\{0\}$ (resp. une homotopie libre) entre γ_1 et γ_2 , alors $f \circ h$ est une homotopie relative à $\{0\}$ (resp. une homotopie libre) entre $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$. ■

2.1.3 Groupe fondamental

Fixons à présent $x \in X$. Il est facile de voir que l'homotopie relative de lacets définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacets de point base x ; les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées *classes d'homotopie* (de lacets en x), et l'ensemble quotient est noté $\pi_1(X, x)$. Si α est un lacet de point base x , on note $[\alpha]$ sa classe d'homotopie. La concaténation de deux lacets de même point base est toujours possible, et passe au quotient : si α et β sont deux lacets de $\pi_1(X, x)$, $[\alpha \cdot \beta]$ ne dépend que de $[\alpha]$ et de $[\beta]$. La concaténation induit alors une structure de groupe sur $\pi_1(X, x)$; l'élément neutre est la classe du lacet trivial en x et $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$. D'où :

Définition 2.1.5. Soit X un espace topologique et $x \in X$. On appelle *groupe fondamental* de X en x l'ensemble $\pi_1(X, x)$ muni de la loi de composition induite par la concaténation des lacets.

Si X est connexe par arcs, le groupe fondamental ne dépend pas du point base choisi :

Proposition 2.1.2. Soient X un espace topologique connexe par arcs et $x, y \in X$. Alors $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y)$.

On peut dans ce cas parler *du* groupe fondamental de X , en prenant garde au fait que l'isomorphisme ci-dessus n'est pas canonique en général. On dit alors que X (connexe par arcs) est *simplement connexe* si son groupe fondamental est trivial, c'est-à-dire si tout lacet est homotope à son point base.

Exemples 2.1.3. – Les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont simplement connexes.
– On identifie le cercle $\mathbb{S}_1$ (défini à la remarque 2.1.1) à l'ensemble des complexes de module 1. Le groupe $\pi_1(\mathbb{S}_1, 1)$ est alors isomorphe à $\mathbb{Z}$, et engendré par le lacet $\gamma_0 : t \mapsto e^{2i\pi t}$.
– Le groupe fondamental de $\mathbb{C}^*$ est également isomorphe à $\mathbb{Z}$, car tout lacet de $\mathbb{C}^*$ de point base 1 est relativement homotope à un lacet de $\mathbb{S}^1$.
– De même pour $\mathbb{D}^*$, en identifiant cette fois $\mathbb{S}_1$ à l'ensemble des complexes de module $\frac{1}{2}$, par exemple.

La propriété suivante du groupe fondamental est essentielle, et découle de la préservation de l'homotopie par les applications continues :

Proposition 2.1.3. Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $x \in X$. Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ donné par $f_* : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$. De plus, si Z est un espace topologique et $g : Y \rightarrow Z$ est une application continue, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

En particulier, le groupe fondamental est invariant par homéomorphisme.

Exemples 2.1.4. – Le groupe fondamental de tout disque épointé de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, par homéomorphisme avec $\mathbb{D}^*$.
– De même, le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a, b\}$, où a, b sont deux points distincts quelconques de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Il est possible de calculer le groupe fondamental d'un espace topologique X grâce au *théorème de van Kampen*, même dans des cas complexes, à condition

de pouvoir écrire $X = U_1 \cup U_2$, où U_1 , U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont des ouverts *connexes par arcs* de X dont on connaît le groupe fondamental ; pour plus de précisions, se reporter à [Paub, pp. 74–76].

Exemple 2.1.5. On peut appliquer ce théorème pour calculer le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a, b\}, x) = \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty, a, b\}, x)$, où a et b sont deux complexes distincts et $x = \frac{a+b}{2}$: il s'agit du groupe libre à deux générateurs, engendré par exemple par les lacets $\gamma_a : t \mapsto a + (x - a)e^{2i\pi t}$ et $\gamma_b : t \mapsto b + (x - b)e^{2i\pi t}$. Nous ne démontrerons pas ce résultat, mais ne l'utiliserons pas crucialement : il nous suffira de savoir que les lacets γ_a^n et γ_b^m ne peuvent être homotopes que si $m = n = 0$, ce qui découle de l'exemple 2.1.2 (deux lacets non librement homotopes ne sont *a fortiori* pas relativement homotopes).

2.2 Revêtements

Nous développons ici les bases les plus élémentaires de la théorie des revêtements. Pour une présentation plus complète dans un cadre général, nous renvoyons à [Paub] ou à [Spa66]. Le lecteur intéressé trouvera également une présentation concise, mettant l'accent sur les points importants dans la perspective d'une application aux surfaces de Riemann, dans [For81].

Dans les paragraphes qui suivent, les espaces topologiques que nous considérerons seront en général connexes par arcs ; c'est le cas des surfaces de Riemann connexes, puisque celles-ci sont localement connexes par arcs en vertu de leur structure de variété.

2.2.1 Définition

Soient X et B des espaces topologiques connexes par arcs.

Définition 2.2.1. On dit qu'une application continue $p : X \rightarrow B$ est un *revêtement* si tout $y \in B$ admet un voisinage V tel que :

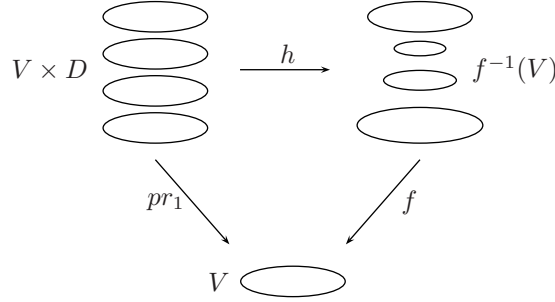
$$p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

où les U_i sont des ouverts deux à deux disjoints, et où pour tout $i \in I$, $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ est un homéomorphisme. On appelle B la *base* et X l'*espace total* de p ; on dit que V est un *voisinage distingué* de y pour p . On dit parfois que p est un *revêtement de B par X* .

- Remarques 2.2.1.**
1. Pour $y \in B$, on appelle *fibres de p au-dessus de y* l'ensemble $F_y = p^{-1}(y)$; il est en bijection avec l'ensemble I de la définition, puisque y admet exactement un antécédent dans chaque U_i .
 2. Un revêtement est en particulier un homéomorphisme local dont les fibres sont discrètes, c'est-à-dire n'admettent pas de point d'accumulation.

Si p est un revêtement, tout $y \in B$ admet donc un voisinage V (un voisinage distingué, dans la terminologie ci-dessus) tel que $f^{-1}(V)$ soit homéomorphe à « un certain nombre de copies de V ». Plus précisément, on a la caractérisation suivante. On rappelle que la *topologie discrète* est la topologie pour laquelle toute partie est ouverte.

Proposition 2.2.1. *L'application continue $p : X \rightarrow B$ est un revêtement si et seulement si, pour tout $y \in B$, il existe un voisinage V de y , un ensemble D muni de la topologie discrète et un homéomorphisme $h : V \times D \rightarrow f^{-1}(V)$ tels que $f \circ h = pr_1$ où $pr_1 : V \times D \rightarrow V$ est la projection canonique, c'est-à-dire tels que le diagramme suivant commute :*



Preuve. Supposons que p est un revêtement. Soit $y \in B$, et soit V un voisinage distingué de y pour p ; écrivons alors :

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

et munissons I de la topologie discrète. L'application $g : p^{-1}(V) \rightarrow V \times I$ définie sur chaque U_i par $g|_{U_i}(x) = (f|_{U_i}(x), i)$ est un homéomorphisme, et $h = g^{-1}$ convient.

Soient réciproquement $y \in B$, V un voisinage de y , D un ensemble muni de la topologie discrète, et $h : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ un homéomorphisme vérifiant $f \circ h = pr_1$. Posons, pour $d \in D$, $U_d = h(V \times \{d\})$. Les $(U_d)_{d \in D}$ sont des ouverts de X puisque h est un homéomorphisme et que $\{d\}$ est un ouvert de D ; ils sont deux à deux disjoints puisque h est injective, et recouvrent $p^{-1}(V) = \text{Im } h$. Pour finir, $f|_{U_d} = pr_1 \circ h|_{U_d}^{-1}$ est un homéomorphisme de U_d sur V , et p est un revêtement. ■

Les fibres d'un revêtement $p : X \rightarrow B$ ont toutes même cardinal (le cardinal des fibres est en effet localement constant, et on a supposé B connexe). Lorsque les fibres sont finies et de cardinal $n \in \mathbb{N}$, on dit que p est un revêtement à n feuillets.

- Exemples 2.2.1.**
1. L'identité $\text{Id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est un revêtement ; plus généralement, la première projection $pr_1 : \mathbb{C} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$ est un revêtement à n feuillets.
 2. L'élévation au carré $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^2$ est un revêtement à 2 feuillets ; plus généralement, l'élévation à la puissance n donnée par $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$ est un revêtement à n feuillets.
 3. L'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un revêtement à fibres infinies.

Pour finir, il nous faut dire quelques mots d'une classe importante de revêtements, ceux que l'on obtient comme projections canoniques sur des quotients d'espaces topologiques. Nous donnons auparavant un peu de terminologie.

Définition 2.2.2. Soit G un groupe agissant sur un espace topologique X . On dit que G agit sur X par homéomorphismes (resp. par automorphismes conformes) si pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme (resp. un automorphisme conforme).

On dit que l'action de G sur X est *libre* si le seul élément de G à agir avec des points fixes est l'identité.

Si G agit sur X par homéomorphismes et que X est localement compact, on dit que l'action de G sur X est *proprement discontinue* si pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\}$ est fini.

Proposition 2.2.2. Soit G un groupe agissant par homéomorphismes sur un espace topologique localement compact (donc séparé) X . Si l'action de G est libre et proprement discontinue, alors la projection canonique $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ est un revêtement.

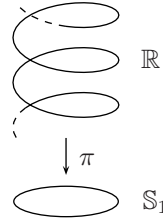
Preuve. Soient $b \in G \backslash X$ et $x \in \pi^{-1}(b)$. Soit U_0 un voisinage de x dans X . Comme l'action de G sur X est proprement discontinue, il n'existe qu'un nombre fini de $g \in G$ tels que $gU \cap U \neq \emptyset$; comme l'action est libre, pour chaque tel $g \neq e$ on a $gx \neq x$. Par séparation de X et continuité des applications $x \mapsto gx$, on peut alors se restreindre à un voisinage U de x tel que pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, $gU \cap U = \emptyset$. Notons $V = \pi(U)$. Alors

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} gU$$

où l'union est disjointe.

Pour tout $g \in G$, $\pi|_{gU}$ est d'image V , injective puisque U rencontre chaque orbite sous l'action de G en au plus un point, et ouverte car π l'est : si O est un ouvert de X , $\pi^{-1}(\pi(O)) = \bigcup_{g \in G} gO$ est ouvert car G agit par homéomorphismes, donc $\pi(O)$ est ouvert par définition de la topologie quotient. On en déduit que pour tout $g \in G$, $\pi|_{gU} : gU \rightarrow V$ est un homéomorphisme. ■

Exemples 2.2.2. – La projection $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}_1$ est un revêtement à fibres infinies, que l'on peut imaginer d'après la figure ci-dessous.



– La projection $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})$ ($\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$) est un revêtement.

2.2.2 Relèvements par des revêtements : définition et premières propriétés

L'importance et l'intérêt de la notion de revêtement réside dans la possibilité de *relever* de manière unique, sous certaines hypothèses, des applications à valeurs dans la base en applications à valeurs dans l'espace total.

Définition 2.2.3. Soient X, Y, B des espaces topologiques connexes par arcs. Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et $f : Y \rightarrow B$ une application continue. On dit que $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ est un *relèvement* de f par X si $\tilde{f}$ est continue et si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Exemple 2.2.3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Un relèvement de $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ par le revêtement $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une détermination du logarithme de f . Les développements qui suivent nous donneront en particulier une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle détermination soit possible.

Puisqu'un revêtement est un homéomorphisme local, le relèvement d'une application continue par un revêtement est toujours *localement* possible; les propriétés spécifiques des revêtements permettent de préciser ce fait sous la forme suivante.

Lemme 2.2.3 (Forme locale des relèvements). *Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et $f : Y \rightarrow B$ une application continue, et soit $y \in Y$. Il existe un voisinage V de y tel que, pour tout choix de $x \in p^{-1}(f(y))$, $f|_V$ admette un et un seul relèvement g_x par p vérifiant $g_x(y) = x$, et tel que de plus ces relèvements g_x soient à images disjointes.*

Preuve. Soit $V_{f(y)}$ un voisinage distingué de $f(y)$ pour p , et soit V_y un voisinage connexe de y tel que $f(V_y) \subset V_{f(y)}$. Écrivons, comme dans la définition 2.2.1,

$$p^{-1}(V_{f(y)}) = \bigcup_{j \in I} U_j$$

où $p|_{U_j} : U_j \rightarrow V_{f(y)}$ est un homéomorphisme, et notons x_j , pour tout $j \in I$, l'unique antécédent de $f(y)$ dans U_j .

Fixons $i \in I$. Un relèvement g_i de $f|_{V_y}$ vérifiant $g_i(y) = x_i$ doit être continu, donc à image dans U_i par connexité de V_y . La condition $p \circ g_i = f|_{V_y}$ s'écrit alors $p|_{U_i} \circ g_i = f|_{V_y}$; comme $p|_{U_i}$ est un homéomorphisme, $g_i = p|_{U_i}^{-1} \circ f|_{V_y}$ convient et c'est la seule possibilité. Remarquons qu'alors $\text{Im } g_i \subset U_i$: comme les $(U_i)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints, si $i, j \in I$, $i \neq j$, les relèvements g_i et g_j sont à images disjointes. ■

Localement, un relèvement par un revêtement est donc entièrement déterminé par sa valeur en un point. Il en est de même globalement si l'espace de départ est connexe.

Proposition 2.2.4. *Soit Y un espace connexe, et soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et $f : Y \rightarrow B$ une application continue. Deux revêtements g et g' de f par p qui coïncident en un point sont égaux.*

Preuve. Notons $D = \{y \in Y : g(y) \neq g'(y)\}$ et $E = \{y \in Y : g(y) = g'(y)\}$. Soit y un élément de D (resp. de E). D'après le lemme 2.2.3, il existe un voisinage V de y sur lequel les relèvements g et g' sont à images disjointes, donc différents (resp. sont égaux). Les ensembles D et E sont donc ouverts ; comme $D \cup E = Y$ et que Y est connexe, $E = X$. ■

La question que nous cherchons à résoudre est à présent la suivante : à quelles conditions est-il possible de « recoller » les relèvements locaux obtenus au lemme 2.2.3 en un relèvement global ?

2.2.3 Relèvement des homotopies et des chemins

Nous avons vu que les relèvements locaux par des revêtements sont toujours possibles, et qu'il est possible d'en donner une description simple. Si nous disposons du relèvement d'une certaine application, nous montrons à partir de là que nous pouvons en déduire un relèvement de toute application qui est obtenue par déformation continue (homotopie) de la première. Nous en déduisons immédiatement que tout chemin, vu comme déformation continue d'un point, peut être relevé, et surtout que deux chemins homotopes se relèvent en chemins homotopes.

Proposition 2.2.5 (Relèvement des homotopies). *Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement et soit $f : Y \rightarrow B$ une application continue admettant un relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ par p . Toute homotopie $h : Y \times [0, 1] \rightarrow B$ entre $f = h(\cdot, 0)$ et une application $g = h(\cdot, 1)$ admet un relèvement $\tilde{h} : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ vérifiant $\tilde{h}(\cdot, 0) = \tilde{f}$. En particulier, $g = h(\cdot, 1)$ admet un relèvement $\tilde{g} = \tilde{h}(\cdot, 1)$, et les applications $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont homotopes.*

Preuve. Soit $y \in Y$. Par compacité de $[0, 1]$ et continuité de h , il est possible de trouver un recouvrement fini de $h(\{y\} \times [0, 1])$ par des ouverts distingués pour p . On peut alors trouver $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tels que

$$\forall k \in [0, n-1], h(\{y\} \times [t_k, t_{k+1}]) \subset V_k$$

où V_k est un ouvert distingué pour p . Par continuité de h , on trouve alors un voisinage ouvert U_y de y tel que :

$$\forall k \in [0, n-1], h(U_y \times [t_k, t_{k+1}]) \subset V_k.$$

Notons $h_y = h|_{U_y \times [0, 1]}$ et pour $k \in [0, n-1]$, $h_{y,k} = h|_{U_y \times [t_k, t_{k+1}]}$. On obtient, comme dans le lemme 2.2.3, un relèvement $H_{y,0}$ de $h_{y,0}$ vérifiant $H_{y,0}(y, t_0) = \tilde{f}(y)$. Notons qu'alors, par unicité (proposition 2.2.4) :

$$\forall y' \in U_y, H_{y,0}(y', t_0) = \tilde{f}(y').$$

On obtient ensuite, de proche en proche, pour $k \in [1, n-1]$, un relèvement $H_{y,k}$ de $h_{y,k}$ vérifiant $H_{y,k}(y, t_k) = H_{y,k-1}(y, t_k)$. Toujours par unicité, on a alors :

$$\forall y' \in U_y, H_{y,k}(y', t_k) = H_{y,k-1}(y', t_{k-1}).$$

Cette dernière condition nous garantit que l'application $H_y : U_y \times [0, 1] \rightarrow X$ obtenue par recollement des $H_{y,k} : U_y \times [t_k, t_{k+1}] \rightarrow X$ est bien continue et donc qu'il s'agit d'un relèvement de h_y .

Pour tout $y \in Y$, on dispose ainsi d'un relèvement H_y de $h_y = h|_{U_y \times [0,1]}$, où U_y est un voisinage ouvert de y . Soient alors $y, y' \in Y$. Pour tout $z \in U_y \cap U_{y'}$, $H_y(z, 0) = \tilde{f}(z) = H_{y'}(z, 0)$ et donc par unicité, H_y et $H_{y'}$ coïncident sur l'ensemble connexe $\{z\} \times [0, 1]$, et donc sur tout $(U_y \cap U_{y'}) \times [0, 1]$. On obtient finalement par recollement un relèvement global de h . ■

Corollaire 2.2.6. *Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, et soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un chemin dans B . Pour tout choix de $x \in p^{-1}(\gamma(0))$, γ admet un unique relèvement $\tilde{\gamma}_x : [0, 1] \rightarrow X$ par p vérifiant $\tilde{\gamma}_x(0) = x$.*

Preuve. On peut voir γ comme une homotopie entre les applications $\{0\} \rightarrow X$ données par $0 \mapsto \gamma(0)$ et par $0 \mapsto \gamma(1)$ (cf. remarque 2.1.2, p. 9). Il existe donc un relèvement de γ pour tout choix d'un élément de la fibre de p au-dessus de γ_0 . L'unicité découle de la proposition 2.2.4. ■

Corollaire 2.2.7. *Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow B$ des chemins homotopes (donc ayant même origine et même extrémité). Deux relèvements $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ de γ_1 et γ_2 respectivement ayant même origine ont même extrémité et sont homotopes.*

Preuve. Soit $x \in p^{-1}(\gamma_1(0))$ un antécédent de l'origine commune de γ_1 et γ_2 . L'homotopie h entre γ_1 et γ_2 se relève en une application continue $\tilde{h}$, et $\tilde{h}(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{h}(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}_2$ sont les uniques relèvements d'origine x de γ_1 et γ_2 respectivement. Or l'application $t \mapsto \tilde{h}(1, t)$ est alors un relèvement de l'application constante $t \mapsto h(1, t)$, donc est constante, puisque les fibres d'un revêtement sont discrètes. Par conséquent $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$, puis $\tilde{h}$ est une homotopie entre $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$. ■

2.2.4 Théorème d'existence de relèvements

Il nous est maintenant possible de donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un relèvement, dans le cas où l'espace de départ est connexe et localement connexe par arcs (donc également globalement connexe par arcs).

Théorème 2.2.8 (Théorème du relèvement). *Soit Y un espace connexe et localement connexe par arcs. Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et $f : Y \rightarrow B$ une application continue. Soient $y \in Y$ et $x \in p^{-1}(f(y))$. L'application f admet un relèvement $\tilde{f}$ vérifiant $\tilde{f}(y) = x$ si et seulement si*

$$f_*(\pi_1(Y, y)) \subset p_*(\pi_1(X, x)).$$

Nous établissons tout d'abord deux résultats intermédiaires, en conservant les notations du théorème. Nous avons vu que $\tilde{f}$, s'il existe, est entièrement déterminé par la condition $\tilde{f}(y) = x$, puisque Y est connexe (proposition 2.2.4). Nous précisons de la manière suivante.

Lemme 2.2.9. *Supposons qu'il existe un relèvement $\tilde{f}$ de f par p vérifiant $\tilde{f}(y) = x$. Alors pour tout $y' \in Y$, si l'on note $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin dans Y d'origine y et d'extrémité y' , on a que $\tilde{f}(y')$ est l'extrémité de l'unique relèvement d'origine x de $f \circ \gamma$.*

Preuve. Le chemin $\tilde{f} \circ \gamma$ dans X est un relèvement de $f \circ \gamma$: il s'agit donc de l'unique relèvement de $f \circ \gamma$ d'origine $\tilde{f}(y)$. ■

On voit ainsi que lorsque $\tilde{f}$ existe, l'extrémité du relèvement d'origine x de $f \circ \gamma$ ne dépend pas du choix de γ . Réciproquement, si cette condition est réalisée, nous pouvons utiliser la caractérisation ci-dessus comme construction de $\tilde{f}$.

Lemme 2.2.10. *Supposons que pour tout $y' \in Y$, l'extrémité de l'unique relèvement $\tilde{\gamma}_{y'}$ d'origine x de $f \circ \gamma_{y'}$ par p ne dépende pas du chemin $\gamma_{y'}$ choisi entre y et y' . Alors l'application $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(y') = \tilde{\gamma}_{y'}(1)$ est continue.*

Preuve. Soit $y' \in Y$. Le lemme 2.2.3 nous donne un voisinage V de y' (que l'on peut choisir connexe par arcs, Y étant localement connexe par arcs) et un relèvement g de $f|_V$ vérifiant $g(y') = \tilde{f}(y')$. Montrons que ce relèvement coïncide avec $\tilde{f}$ sur V et donc que $\tilde{f}$ est continue en y' . Soit $y'' \in V$, soient γ un chemin dans Y entre y et y' et γ' un chemin dans V entre y' et y'' . Alors $\tilde{f}(y'')$ est l'extrémité du relèvement de $f \circ (\gamma \cdot \gamma')$ d'origine x , c'est-à-dire l'extrémité du relèvement de $f \circ \gamma'$ d'origine $\tilde{f}(y')$, c'est-à-dire encore $g(y'')$ en appliquant le lemme 2.2.9 à g . ■

Preuve (théorème du relèvement). Il existe donc un relèvement $\tilde{f}$ de f si et seulement si, pour tous $y' \in Y$, pour tous chemins γ et γ' dans Y entre y et y' , les relèvements de $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma'$ d'origine x ont même extrémité. On montre maintenant l'équivalence de cette condition avec celle du théorème.

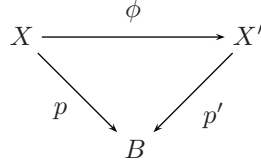
Soit $y' \in Y$, soient γ et γ' deux chemins dans Y entre y et y' . Notons Γ et Γ' les relèvements d'origine x de $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma'$ respectivement. Le chemin $\gamma \cdot \overline{\gamma'}$ est un lacet en y et $\alpha = f \circ (\gamma \cdot \overline{\gamma'})$ est un lacet en $f(y)$. On a $[\alpha] \in f_*(\pi_1(Y, y))$, donc si $f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*\pi_1(X, x)$, α est homotope à un lacet en $f(y)$ dont le relèvement d'origine x est un lacet en x . Dans ce cas, d'après le corollaire 2.2.7, le relèvement $\tilde{\alpha}$ de α d'origine x est un chemin d'extrémité x , c'est-à-dire un lacet en x . Or $\alpha = f \circ (\gamma \cdot \overline{\gamma'}) = (f \circ \gamma) \cdot \overline{(f \circ \gamma')}$ donc par unicité $\tilde{\alpha} = \Gamma \cdot \overline{\Gamma'}$ et Γ et Γ' ont même extrémité.

Réciproquement, soit β un lacet en y . On peut écrire $\beta = \gamma \cdot \overline{\gamma'}$, où γ et γ' sont deux chemins d'origine y et d'extrémité un certain $y' \in Y$. Si les relèvements d'origine x de $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma'$ ont même extrémité, le relèvement d'origine x du lacet $f \circ \beta = (f \circ \gamma) \cdot \overline{(f \circ \gamma')}$ est encore un lacet et on a $f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*(\pi_1(X, x))$. ■

Exemple 2.2.4. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ une application continue. On obtient, en appliquant le théorème qui précède au relèvement de f par le revêtement $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, qu'une détermination continue du logarithme de f sur U est possible si et seulement si l'image de tout lacet de U par f est homotope à un point dans $\mathbb{C}^*$. Nous verrons plus loin que si f est holomorphe, une telle détermination, si elle existe, est également holomorphe.

2.2.5 Morphismes de revêtements et revêtements simplement connexes

Définition 2.2.4. Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements de même base. On dit qu'une application continue $\phi : X \rightarrow X'$ est un *morphisme de revêtements* de p sur p' si le diagramme suivant commute :



On dit qu'une bijection continue $\phi : X \rightarrow X'$ est un *isomorphisme de revêtements* entre p et p' si son inverse est également un morphisme de revêtements. Si $X = X'$, $p = p'$, on appelle *automorphismes de revêtement de p* les isomorphismes de revêtements, et on note $\text{Aut}(p)$ l'ensemble qu'ils forment.

- Remarques 2.2.2.**
1. Un morphisme de revêtements de p sur p' n'est rien d'autre qu'un relèvement de p par p' .
 2. Un isomorphisme de revêtements est en particulier un homéomorphisme.
 3. Un automorphisme de revêtement de $p : X \rightarrow B$ est simplement un homéomorphisme de X qui préserve les fibres de p . Les automorphismes de revêtement de p forment donc un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de X .

Notre travail sur les relèvements nous permet immédiatement d'établir le résultat suivant.

Proposition 2.2.11. *Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements de même base. On suppose X connexe et localement connexe par arcs. Soit $x \in X$ et $x' \in p'^{-1}(p(x))$. Il existe un morphisme de revêtements $\phi : X \rightarrow X'$ de p sur p' vérifiant $\phi(x) = x'$ si et seulement si*

$$p_*(\pi_1(X, x)) \subset p'_*(\pi_1(X', x'))$$

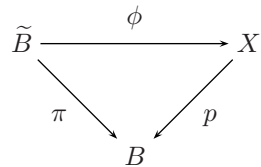
et il existe un isomorphisme de revêtements ϕ entre p et p' vérifiant $\phi(x) = x'$ si et seulement si

$$p_*(\pi_1(X, x)) = p'_*(\pi_1(X', x')).$$

Preuve. Découle immédiatement de la remarque ci-dessus et du théorème du relèvement. ■

La situation est particulièrement simple lorsque l'espace total X de p est simplement connexe (et toujours localement connexe par arcs) : dans ce cas, en tout $x \in X$, on a $\pi_1(X, x) = 0$, donc pour tout autre revêtement $p' : X' \rightarrow B$, et pour tout choix de $\phi(x)$ dans $p'^{-1}(p(x))$, il existe un morphisme de revêtements ϕ de p dans p' . La terminologie suivante étant fréquemment employée, on donne la définition :

Définition 2.2.5. On dit qu'un revêtement $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ de base B et d'espace total $\tilde{B}$ connexes est un *revêtement universel* si pour tout revêtement $p : X \rightarrow B$ de même base et d'espace total connexe, pour tous $b \in \tilde{B}$ et $x \in p^{-1}(\pi(b))$, il existe un morphisme de revêtements ϕ de π sur p vérifiant $\phi(b) = x$.



Nous venons donc de dire qu'un revêtement d'espace total simplement connexe et localement connexe par arcs est universel.

Remarque 2.2.3. S'il existe un revêtement universel, il est unique à isomorphisme de revêtements près ; en particulier, les espaces totaux de deux revêtements universels d'une même base sont nécessairement homéomorphes. De ce fait, on parle parfois *du* revêtement universel d'un espace connexe ; par un abus supplémentaire, on emploie occasionnellement le terme de *revêtement universel* pour désigner l'espace total du revêtement universel.

Exemples 2.2.5. – La projection canonique $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le revêtement universel du cercle $\mathbb{S}_1$.
– L'exponentielle $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$.

2.2.6 La base d'un revêtement universel comme quotient

Dans le cas d'un revêtement universel (donc en particulier d'un revêtement d'espace total simplement connexe et localement connexe par arcs), les automorphismes de revêtement peuvent être décrits de manière simple. Le résultat suivant est essentiellement une récapitulation de la partie précédente.

Proposition 2.2.12. *Soit $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ un revêtement universel d'un espace B connexe. Pour tout $b \in B$, $\text{Aut}(\pi)$ est en bijection avec $\pi^{-1}(b)$: si l'on fixe $\tilde{b} \in \pi^{-1}(b)$, il existe, pour tout $x \in \pi^{-1}(b)$, un et un seul automorphisme de revêtements ϕ vérifiant $\phi(\tilde{b}) = x$.*

Exemple 2.2.6. Les automorphismes du revêtement universel $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ sont exactement les translations $z \mapsto z + 2i\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

On peut alors faire apparaître B comme quotient de $\tilde{B}$ sous l'action de $\text{Aut}(\pi)$. Nous dirons que l'action d'un groupe G sur un espace topologique X est *discrète* lorsque toutes les orbites le sont.

Proposition 2.2.13. *Le groupe $\text{Aut}(\pi)$ des automorphismes d'un revêtement universel $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$, où B est connexe, forment un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de $\tilde{B}$ qui agit discrètement et librement sur $\tilde{B}$. La base B de π est le quotient de $\tilde{B}$ sous l'action de ce groupe.*

Preuve. L'action est discrète car les fibres d'un revêtement le sont. L'action est libre d'après la proposition 2.2.12 ci-dessus. ■

Remarques 2.2.4. 1. Dans le cas où X est localement compact, l'action du groupe $\text{Aut}(\pi)$ est même proprement discontinue ; avec une définition plus générale que la nôtre d'une action propre, on peut d'ailleurs se passer de cette hypothèse sur X (cf. par exemple [Paub]).

2. Réciproquement, si G est un sous-groupe d'homéomorphismes d'un espace simplement connexe, localement connexe par arcs et localement compact X agissant de manière libre et *proprement discontinue*, la projection canonique $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ est en vertu de la proposition 2.2.2 un revêtement de $G \backslash X$ qui est de surcroît universel ; on a alors $G = \text{Aut}(\pi)$.

2.2.7 Existence d'un revêtement simplement connexe

Nous donnons sans démonstration le théorème suivant, qui éclaire la situation mais que nous n'utiliserons pas crucialement. Les hypothèses que nous formulons ne sont pas optimales ; pour l'énoncé le plus général et la preuve, voir [Paub, pp. 50–54].

Théorème 2.2.14. *Soit B un espace topologique séparé, connexe, localement connexe par arcs, et tel que tout $b \in B$ admette un voisinage simplement connexe. Alors B admet un revêtement d'espace total simplement connexe.*

Remarque 2.2.5. Du fait de ce théorème, les revêtements universels que l'on manipule d'ordinaire sont toujours simplement connexes. Il s'agit cependant de notions différentes : il existe des espaces connexes et localement connexes par arcs qui admettent un revêtement universel non simplement connexe. Le lecteur intéressé en trouvera un exemple dans [Spa66, p. 84].

2.3 Revêtements et surfaces de Riemann

Nous appliquons maintenant la théorie des revêtements développée dans la partie précédente au cas particulier des surfaces de Riemann.

2.3.1 Structure conforme sur l'espace total d'un revêtement

Les revêtements sont en particulier des homéomorphismes locaux ; si la base est munie d'une structure complexe, il est donc possible de remonter celle-ci en une structure complexe sur l'espace total.

Proposition 2.3.1. *Soient S une surface de Riemann connexe, X un espace séparé et connexe et $p : X \rightarrow S$ un homéomorphisme local. Il existe une unique structure complexe sur X qui fait de p une application holomorphe.*

Preuve. Soient $x, x' \in X$. Il existe des voisinages U et U' de x et x' respectivement, des ouverts V et V' de S et des ouverts W et W' de $\mathbb{C}$ tels que $p|_U$ et $p|_{U'}$ soient des homéomorphismes, tels que $p(U) \subset V$ et $p(U') \subset V'$ et tels que $\phi : V \rightarrow W$ et $\phi' : V' \rightarrow W'$ soient des cartes de S . Notons $\psi = \phi \circ p|_U : U \rightarrow Z$ et $\psi' = \phi' \circ p|_{U'} : U' \rightarrow Z'$, où $Z = \phi(p(U))$ et $Z' = \phi'(p(U'))$ sont des ouverts de $\mathbb{C}$. Ces applications ψ et ψ' sont des homéomorphismes, donc des cartes sur X en x et x' ; elles sont compatibles, car l'application

$$\psi \circ \psi'^{-1} : \psi'(U \cap U') \rightarrow \psi(U \cap U')$$

vérifie, pour $z \in \psi'(U \cap U')$,

$$\psi \circ \psi'^{-1}(z) = (\phi \circ p) \circ (p^{-1} \circ \phi'^{-1})(z) = \phi \circ \phi'^{-1}(z) = z$$

et est donc holomorphe, puisque les cartes ϕ et ϕ' sont compatibles.

Par ailleurs, l'application $\phi \circ p \circ \psi^{-1} : Z \rightarrow Z$ vérifie, pour $z \in Z$,

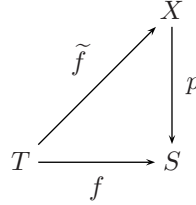
$$\phi \circ p \circ \psi^{-1}(z) = \phi \circ p \circ p^{-1} \circ \phi^{-1}(z) = z$$

donc p est holomorphe en x pour la carte ϕ . Pour finir, notons qu'une carte ξ en x (dont on peut restreindre l'ouvert de définition pour qu'il soit inclus

dans U) rend p holomorphe en x si et seulement si l'application $\phi \circ p \circ \xi^{-1}$ est holomorphe, c'est-à-dire si et seulement si ξ est compatible avec la carte ψ définie plus haut. Nous avons finalement montré qu'en définissant, en tout $x \in X$, une carte ϕ sur X comme ci-dessus, on obtient une structure complexe sur X (espace topologique séparé) rendant p holomorphe, et que cette structure est la seule vérifiant cette propriété. ■

Remarque 2.3.1. Pour cette structure complexe sur X , p est localement une équivalence conforme.

Proposition 2.3.2. Soient S, T des surfaces de Riemann, $f : T \rightarrow S$ une application holomorphe et $p : X \rightarrow S$ un revêtement d'espace total séparé et connexe. Pour la structure complexe sur X rendant p holomorphe, tout relèvement $\tilde{f} : T \rightarrow X$ de f par p est holomorphe.



Preuve. Soit $t \in T$. Il existe un voisinage V de t et un voisinage U de $\tilde{f}(t)$ tels que $\tilde{f}(V) \subset U$ et $p|_U$ est une équivalence conforme pour la structure complexe de la proposition 2.3.1. Alors $\tilde{f}|_V = (p|_U)^{-1} \circ f$ et $\tilde{f}$ est localement holomorphe. ■

Exemple 2.3.1. On peut alors conclure sur l'exemple 2.2.4 : soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ une application holomorphe. Alors il existe une détermination holomorphe du logarithme de f si et seulement si l'image par f de tout lacet de U est un lacet homotope à un point dans $\mathbb{C}^*$.

Corollaire 2.3.3. Les automorphismes de revêtement sont des automorphismes conformes.

Preuve. Les morphismes de revêtement sont des relèvements ; les automorphismes de revêtement sont de surcroît des homéomorphismes (remarque 2.2.2). ■

Nous avons vu (proposition 2.2.2) que si G est un groupe agissant par homéomorphismes, de manière libre et proprement discontinue, sur un espace localement compact X , alors la projection canonique $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ est un revêtement. Ce résultat s'applique aux surfaces de Riemann, qui sont toujours localement compactes ; si G agit par automorphismes conformes, on a de plus le résultat suivant.

Proposition 2.3.4. Soit G un groupe agissant par automorphismes conformes, de manière libre et proprement discontinue, sur une surface de Riemann S . Alors $G \backslash S$ est naturellement muni d'une structure de surface de Riemann qui rend la projection canonique $\pi : S \rightarrow G \backslash S$ holomorphe.

Pour une preuve de ce résultat, vrai en général dans le cas des variétés $\mathcal{C}^k$ (si G agit par $\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes), nous renvoyons à n'importe quel cours de géométrie différentielle, par exemple [Paua, pp. 29–30].

2.3.2 Théorème d'uniformisation et classification des surfaces de Riemann connexes

Le corollaire suivant est une application directe au cas des surfaces de Riemann du théorème d'existence de revêtements simplement connexes (p. 21).

Corollaire 2.3.5. *Toute surface de Riemann connexe admet un revêtement d'espace total simplement connexe.*

L'intérêt de ce résultat tient au difficile théorème d'uniformisation ci-dessous. Le lecteur intéressé pourra en trouver des preuves dans [For81] et dans [Rey89].

Théorème 2.3.6 (Théorème d'uniformisation). *Une surface de Riemann simplement connexe est conformétement équivalente à $\mathbb{D}$, à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou à $\mathbb{C}$.*

Remarque 2.3.2. Pour des raisons de commodité, nous travaillerons souvent avec le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ plutôt qu'avec $\mathbb{D}$, en sachant que ces deux surfaces sont conformétement équivalentes (exemple 1.2.1).

Corollaire 2.3.7. *Toute surface de Riemann connexe est quotient de l'une des surfaces de Riemann simplement connexes $\mathbb{D}$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{C}$ par un sous-groupe agissant librement et discrètement d'automorphismes conformes de celle-ci.*

Preuve. La base B d'un revêtement universel $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ est quotient de $\tilde{B}$ par le groupe des automorphismes de revêtement de π (qui agit librement et discrètement sur $\tilde{B}$) d'après le corollaire 2.2.13. Ces automorphismes de revêtement sont des automorphismes conformes de $\tilde{B}$ d'après le corollaire 2.3.3. ■

Remarque 2.3.3. Nous n'avons pas imposé, dans la première partie, que la topologie de l'espace sous-jacent à une surface de Riemann soit à base dénombrable, contrairement à ce que l'on fait d'ordinaire pour les variétés réelles. Le théorème d'uniformisation montre que cette condition est assez largement superflue : toute surface de Riemann au sens de notre définition (espace topologique séparé muni d'une structure complexe) qui est *connexe* est à base dénombrable, car quotient de l'un des espaces à base dénombrable $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Les seules surfaces de Riemann qui ne sont pas à base dénombrable sont donc celles qui ont une infinité non dénombrable de composantes connexes.

Il est ainsi possible de classer les surfaces de Riemann connexes. On utilise parfois le vocabulaire suivant.

Définition 2.3.1. On dit qu'une surface de Riemann est :

- *parabolique* si son revêtement universel est conformétement équivalent à $\mathbb{C}$;
- *elliptique* s'il est conformétement équivalent à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$;
- *hyperbolique* s'il est conformétement équivalent à $\mathbb{D}$.

2.3.3 Le cas de la sphère privée de trois points

La surface de Riemann qui nous intéresse pour la démonstration des théorèmes de Picard, à savoir $\mathbb{C} \setminus \{a, b\} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty, a, b\}$ ($a, b \in \mathbb{C}$ distincts), est hyperbolique. Il est en fait possible de construire un revêtement explicite de cette surface par $\mathbb{D}$ (ou plus précisément par le demi-plan supérieur $\mathbb{H} \simeq \mathbb{D}$). Nous

ne le ferons pas ici, mais montrons brièvement qu'il est possible de retrouver ce fait à partir du théorème d'uniformisation.

Pour cela, il nous faut dire deux mots des sous-groupes d'automorphismes conformes de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui agissent librement et discrètement.

Proposition 2.3.8. *Les automorphismes conformes de $\mathbb{C}$ sont les applications affines $z \mapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.*

Preuve. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière bijective. La fonction f ne peut avoir une singularité essentielle en l'infini, sinon d'après le théorème de Casorati-Weierstrass elle serait d'image dense sur tout voisinage de l'infini. Son développement en série entière n'a donc qu'un nombre fini de termes non nuls. Il ne peut s'agir d'un polynôme de degré supérieur à 2 par bijectivité; finalement, f est de degré 1. ■

Corollaire 2.3.9. *Les seules surfaces de Riemann paraboliques sont $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ et les courbes elliptiques $\mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})$, où ω_1 et ω_2 sont deux complexes non nuls de rapport non réel.*

Preuve. Une application $z \mapsto az + b$ n'agit sans point fixe que si $a = 0$. Un sous-groupe de translations de $\mathbb{C}$ peut être assimilé au sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ qu'est l'orbite de 0 sous son action; or les seuls sous-groupes discrets de $(\mathbb{C}, +)$ sont les suivants. Notons que les groupes de translations associés agissent tous par automorphismes conformes, de manière libre et proprement discontinue sur $\mathbb{C}$ — ils donnent donc effectivement lieu à des surfaces de Riemann quotient telles que la projection canonique soit un revêtement universel dont ils forment les automorphismes.

- $\{0\}$, qui correspond à la surface de Riemann quotient $\mathbb{C}$;
- $\omega\mathbb{Z}$, où $\omega \in \mathbb{C}^*$, qui donne comme quotient le cylindre $\mathbb{C}/\omega\mathbb{Z}$, conformément équivalent à $\mathbb{C}^*$ par $z \mapsto e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}$;
- $\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, où $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ et $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, qui donne un quotient homéomorphe à un tore, que l'on appelle une *courbe elliptique*. Nous compléterons la classification de ces surfaces dans la quatrième partie.

Toute surface de Riemann parabolique est donc de l'un de ces types. ■

On peut procéder de même pour $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Proposition 2.3.10. *Les automorphismes conformes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont les homographies données par*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Preuve. Soit ϕ un automorphisme conforme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On se ramène au cas $\phi(\infty) = \infty$ en composant si nécessaire par une homographie bien choisie; alors ϕ induit un automorphisme de $\mathbb{C}$, qui ne peut être d'après la proposition 2.3.8 qu'une application affine. ■

Corollaire 2.3.11. *La seule surface de Riemann elliptique est $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Preuve. Toute homographie admet un point fixe dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. ■

Nous renvoyons à la troisième partie, qui traite plus spécifiquement de géométrie hyperbolique, la discussion des automorphismes conformes de $\mathbb{H}$; nous nous contentons ici de donner un exemple simple.

Exemple 2.3.2. Comme nous le montre la preuve du corollaire 2.3.9, le quotient de $\mathbb{C}$ par le groupe de translations $z \mapsto z + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) est conformément équivalent à $\mathbb{C}^*$: l'application $z \mapsto e^{iz}$ est en effet un revêtement universel de $\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{C}$ dont ces translations sont les automorphismes. Ces translations sont encore des automorphismes conformes de $\mathbb{H}$, et par restriction, l'application $z \mapsto e^{iz}$ est un revêtement de $\mathbb{D}^*$ par $\mathbb{H}$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème annoncé.

Théorème 2.3.12. *La surface de Riemann $\mathbb{P}^1 \setminus \{a, b, c\}$ (a, b, c deux à deux distincts) est hyperbolique : son revêtement universel est conformément équivalent au disque $\mathbb{D}$.*

Preuve. La sphère de Riemann privée de trois points n'est pas compacte : elle ne peut donc être conformément équivalente ni à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ni à une courbe elliptique. Nous avons par ailleurs vu (exemples 2.1.2 et 2.1.5) que son groupe fondamental contient deux lacets tels qu'aucune puissance non nulle de l'un n'est homotope à une puissance non nulle de l'autre. Il ne peut donc s'agir ni de $\mathbb{C}$, qui est simplement connexe, ni de $\mathbb{C}^*$, dont le groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Par élimination, cette surface doit donc être quotient de $\mathbb{D}$. ■

Comme mentionné ci-dessus, il existe une preuve plus directe de ce résultat : il est possible de construire, par des méthodes essentiellement issues de l'analyse complexe, un revêtement explicite de la sphère de Riemann privée de trois points par le demi-plan supérieur (voir [Ahl66, chap. 7, en particulier pp. 269-273]). C'est sur cette fonction, classiquement connue sous le nom de *fonction modulaire* et notée λ , que repose la preuve originale de Picard.

2.4 Le petit théorème de Picard

Nous avons maintenant tous les éléments pour démontrer le petit théorème de Picard.

Théorème 2.4.1 (Petit théorème de Picard). *Une fonction entière f non constante omet au plus un point de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Supposons au contraire que f soit à valeurs dans la surface de Riemann $S = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty, a, b\}$, où a et b sont deux complexes distincts. D'après le théorème 2.3.12, il existe un revêtement $p : \mathbb{D} \rightarrow S$ de S par le disque. Fixons $z \in \mathbb{C}$ et $d \in p^{-1}(f(z))$. Puisque $\mathbb{C}$ est simplement connexe,

$$0 = f_*(\pi_1(\mathbb{C}, z)) \subset p_*(\pi_1(\mathbb{D}, d))$$

et d'après le théorème 2.2.8, f se relève en une application $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$. D'après le théorème de Liouville, $\tilde{f}$ est constante, et donc $f = p \circ \tilde{f}$ également. ■

Dans le cas du grand théorème de Picard, on cherche à montrer qu'une fonction $f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty, a, b\}$ ne peut présenter de singularité essentielle en 0. Peut-on procéder de manière similaire, en relevant f en une application à valeurs dans $\mathbb{D}$? À première vue, non, car le groupe fondamental de $\mathbb{D}^*$ n'est pas trivial, et que la condition du théorème du relèvement n'est donc pas automatiquement remplie. On peut cependant traiter de la sorte un cas particulier, qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2.4.2. *Soit $f : \mathbb{D}^* \rightarrow S = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty, a, b\}$ une fonction holomorphe. Si l'image par f de tout lacet de $\mathbb{D}^*$ est homotope à un lacet trivial dans S , alors la singularité de f en 0 est inessentielle.*

Preuve. Notons $p : \mathbb{D} \rightarrow S$ un revêtement de S par le disque. Si l'image par f de tout lacet de $\mathbb{D}^*$ est homotope à un lacet trivial dans S , on a en particulier, pour tout $x \in \mathbb{D}^*$, $f_*(\pi_1(\mathbb{D}^*, x)) = 0$. Le théorème du relèvement (théorème 2.2.8) nous permet alors de relever f en une application $\tilde{f} : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}$ vérifiant $p \circ \tilde{f} = f$. L'application holomorphe $\tilde{f}$ étant bornée, elle se prolonge en 0 par une valeur $\tilde{f}(0)$ qui ne peut qu'être dans $\mathbb{D}$ d'après la propriété de l'image ouverte; puis $f = p \circ \tilde{f}$ se prolonge en 0 par $p(\tilde{f}(0)) \in S$ et la singularité est inessentielle. ■

Section 3

Variétés riemanniennes, géométrie hyperbolique et grand théorème de Picard

Nous nous intéressons maintenant à des variétés munies d'un produit scalaire variable, les variétés riemanniennes. La donnée d'un produit scalaire permet de faire de la géométrie ; nous nous pencherons notamment sur la géométrie hyperbolique, un des premiers exemples de géométrie non euclidienne, dégagé au XIX^e siècle. Nous verrons ensuite comment la géométrie hyperbolique s'applique aux surfaces de Riemann revêtues par le disque, notamment à la sphère de Riemann privée de trois points, ce qui justifiera l'épithète d'hyperbolique attribué à ces surfaces de Riemann. Ces considérations géométriques déboucheront sur une preuve du grand théorème de Picard.

Un lecteur curieux pourra dévorer avec profit [TSE09] pour la géométrie hyperbolique notamment, et [GHL87] pour approfondir.

3.1 Généralités

Nous présentons ici les variétés riemanniennes.

Définition 3.1.1. Une métrique sur une variété $\mathcal{C}^\infty$ M est la donnée, en tout point p de la variété, d'un produit scalaire sur l'espace tangent $(u, v) \mapsto g_p(u, v)$. On exige en outre une certaine régularité. Soit un point p de la variété, une carte (U, f) au voisinage de p . Pour tout $x \in U$, on a une base $(e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x))$ de l'espace tangent $T_x U$ formée des images réciproques de la base canonique de $T_{f(x)} f(U)$ par $T_x f$. On pose $g_{ij}(x) = g_x(e_i(x), e_j(x))$. La régularité consiste alors en la lissité des fonctions g_{ij} .

Définition 3.1.2. Une variété riemannienne (M, g) est une variété $\mathcal{C}^\infty$ M munie d'une métrique g .

Exemple 3.1.1. L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est une variété riemannienne, où la fonction g_{ij} vaut constamment δ_{ij} .

Définition 3.1.3. On appelle isométrie $(M, g) \rightarrow (N, h)$ un difféomorphisme ϕ tel que

$$\forall z \in M, \forall u, v \in T_z M, g_z(u, v) = h_{\phi(z)}(T_z \phi(u), T_z \phi(v)).$$

3.2 Une variété riemannienne connexe est un espace métrique

Soit M une variété connexe (elle est alors connexe par arcs). Soit x, y deux points de M , et $c : [0, 1] \rightarrow M$ un chemin qui les relie. Posons

$$d(x, y) = \inf \int_0^1 \sqrt{g_{c(s)}(c'(s), c'(s))} ds$$

la borne inf portant sur l'ensemble des chemins qui relient x à y . Alors nous avons le

Théorème 3.2.1. *La fonction d est une distance qui induit sur M sa topologie de variété.*

Preuve. L'annulation sur la diagonale est évidente (prendre un chemin constant). La symétrie aussi (un chemin c peut se paramétrer à l'envers par $t \mapsto c(1 - t)$).

L'inégalité triangulaire est à peine plus difficile. Soit x, y, z trois points, et c_1 qui relie x à y , c_2 qui relie y à z . En concaténant les deux chemins, on obtient un chemin c de x à z de longueur $L(c) = L(c_1) + L(c_2)$. En prenant c_1, c_2 tel que $L(c_1) < d(x, y) + \frac{\epsilon}{2}$, $L(c_2) < d(y, z) + \frac{\epsilon}{2}$, on trouve $L(c) < d(x, y) + d(y, z) + \epsilon$ ce qui implique

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

La principale difficulté réside dans l'implication $x \neq y \Rightarrow d(x, y) \neq 0$. Soit $x \neq y$ deux éléments de M . Puisque c'est une variété, elle est séparée et l'on peut trouver un ouvert de cartes U qui contient x et pas y , et un homéomorphisme $f : U \rightarrow V$ tel que $f(x) = 0$. Quitte à restreindre à $B(0, \epsilon)$ et à dilater, on peut supposer $V = B(0, 1)$.

La boule $B(0, 1)$ peut être considérée comme une variété riemannienne, avec la métrique $h_p(u, v) = g_{f^{-1}(p)}(T_p f^{-1}(u), T_p f^{-1}(v))$. Par compacité de $\overline{B}(0, 1/2) \times \mathbb{S}^{n-1}$, il existe λ et μ deux réels strictement positifs tels que pour tout $p \in \overline{B}(0, 1/2)$, $u \in T_p B(0, 1) = \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| = 1$,

$$\lambda \leq h_p(u, u) \leq \mu$$

(la fonction $p, u \mapsto h_p(u, u)$ atteint son maximum et son minimum, qui est strictement positif par définition d'un produit scalaire). Par suite,

$$\forall p \in \overline{B}(0, 1/2), \forall u \in T_p B(0, 1), \lambda \|u\|^2 \leq h_p(u, u) \leq \mu \|u\|^2$$

(regarder $\frac{u}{\|u\|}$).

Soit c un chemin de x à y . Par séparation de M et continuité de c , c sort de $f^{-1}(B(0, 1/2))$ à un instant $t \in]0, 1[: c_{]0, t[} \subset f^{-1}(B(0, 1/2))$, $\|f(c(t))\| = 1/2$.

On note $\gamma = f \circ c|_{[0,t]}$. On a

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_0^1 \sqrt{g_{c(s)}(c'(s), c'(s))} ds \geq \int_0^t \sqrt{g_{c(s)}(c(s), c'(s))} ds \\ &= \int_0^t \sqrt{h_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s))} ds \\ &\geq \sqrt{\lambda} \int_0^t \|\gamma'(s)\| ds \\ &\geq \sqrt{\lambda} \left\| \int_0^t \gamma'(s) ds \right\| = \sqrt{\lambda}/2 \end{aligned}$$

On en déduit $d(x, y) > 0$.

Montrons ensuite que la topologie induite est la bonne. Pour ce faire nous allons fixer $x \in M$ et nous assurer que

- toute boule riemannienne centrée en x contient un voisinage de x (par exemple un $f^{-1}(B(0, \epsilon))$ avec f une carte envoyant x sur 0) ;
- tout ouvert de carte de la forme $f^{-1}(B(0, \epsilon))$ contient une boule riemannienne.

Ceci suffira, puisque la distance induit la topologie dont une base de voisinages de x est la famille des boules riemanniennes centrées en x .

Soit U un ouvert de carte contenant x et f une carte envoyant x sur 0 et U sur $B(0, 1)$. Nous allons montrer que

$$\forall y \in f^{-1}(B(0, 1/2)), \sqrt{\lambda} \|f(y)\| \leq d(x, y) \leq \sqrt{\mu} \|f(y)\|$$

ce qui donne clairement le résultat.

La première inégalité. Il suffit de tracer le segment $[f(x) = 0, f(y)]$, paramétré par $\gamma(s) = sf(y)$: alors la courbe c obtenue dans U entre x et y est de longueur

$$L(c) = \int_0^1 \sqrt{h_{sf(y)}(f(y), f(y))} ds \leq \sqrt{\mu} \int_0^1 \|f(y)\| ds = \sqrt{\mu} \|f(y)\|$$

La deuxième. Soit un chemin c de x à y . Si $\gamma = f \circ c$ reste constamment dans $B(0, 1/2)$, alors

$$L(c) = \int_0^1 \sqrt{h_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s))} ds \geq \sqrt{\lambda} \int_0^1 \|\gamma'(s)\| ds \geq \sqrt{\lambda} \|f(y)\|.$$

Sinon, il en sort à l'instant t , et alors (cf plus haut)

$$L(c) \geq \sqrt{\lambda}/2 \geq \sqrt{\lambda} \|f(y)\|.$$

Nous avons donc terminé. ■

Remarque 3.2.1. Une isométrie de variétés riemanniennes $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ conserve les longueurs des chemins. Si $\gamma = f(c)$,

$$L(\gamma) = \int h_{f(c(t))} (T_{c(t)} f(c'(t)), T_{c(t)} f(c'(t))) = \int g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = L(c).$$

Elle est donc aussi une isométrie au sens des espaces métriques.

3.3 Géométrie hyperbolique : le demi-plan $\mathbb{H}$, le disque unité ouvert $\mathbb{D}$

Nous allons présenter ici un exemple particulièrement intéressant de variété riemannienne. Il s'agit du demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ muni de la métrique $g_{x+iy}(u, v) = \frac{u \cdot v}{y^2}$ où "." désigne le produit scalaire euclidien.

La longueur des courbes qui en découle est bien sûr $L(c) = \int_0^1 \frac{\|c'(t)\|}{\text{Im } c(t)} dt$. Par exemple, un segment horizontal d'ordonnée y de longueur euclidienne l a pour longueur $\frac{l}{y}$ ce qui justifie le nom d'hyperbolique. Et l'on pose toujours $d(x, y) = \inf L(c)$ pour c reliant x et y .

On a déjà vu que

$$\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

est une équivalence conforme. En définissant une bonne métrique sur le disque, nous pouvons en faire une isométrie.

Proposition 3.3.1. *Il existe une unique métrique sur $\mathbb{D}$ qui fasse de ϕ une isométrie : la métrique h définie par $h_w(u, v) = \frac{4u \cdot v}{(1 - |w|^2)^2}$ où "." est le produit scalaire usuel.*

Preuve. L'application ϕ est une isométrie entre $(\mathbb{H}, g)$ et $(\mathbb{D}, h)$ si, et seulement si, pour tout $w \in \mathbb{D}, u, v \in T_w \mathbb{D}$, on a

$$h_w(u, v) = g_{\phi^{-1}(w)}(T_w \phi^{-1}(u), T_w \phi^{-1}(v)) = \frac{|(\phi^{-1})'(w)|^2}{(\text{Im } \phi^{-1}(w))^2}.$$

Or, $\phi^{-1}(w) = i \frac{1+w}{1-w}$, donc $(\phi^{-1})'(w) = \frac{2i}{(1-w)^2}$ et $\text{Im } \phi^{-1}(w) = \frac{1-|w|^2}{(1-w)(1-\bar{w})}$. Nous obtenons donc que la seule métrique sur $\mathbb{D}$ qui fasse de ϕ une isométrie est

$$h_w(u, v) = \frac{4u \cdot v}{(1 - |w|^2)^2}.$$

Nous avons donc deux façons équivalentes de faire de la géométrie hyperbolique : sur le disque ou sur le demi-plan.

3.4 Automorphismes conformes et isométries

On connaît les automorphismes conformes du disque unité, appelées transformations de Möbius : c'est

$$\left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \mid \theta \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{D} \right\}$$

ou encore

$$\left\{ z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \mid a, c \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{D} \right\}.$$

Pour déterminer les automorphismes conformes de $\mathbb{H}$, nous nous servons de l'équivalence conforme ϕ entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$.

Théorème 3.4.1. *Le groupe des automorphismes conformes de $\mathbb{H}$ est*

$$\left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Remarque 3.4.1. Quitte à diviser par $\sqrt{ad-bc}$ les 4 coefficients, ce qui ne change pas la transformation, on peut seulement supposer $ad-bc > 0$.

Preuve. Une application $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ est un automorphisme conforme de $\mathbb{H}$, si et seulement si $F = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est un automorphisme conforme de $\mathbb{D}$ soit

$$F(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, |a|^2 - |c|^2 = 1$$

ou encore

$$f(z) = \frac{(\operatorname{Re} a + \operatorname{Re} c)z + \operatorname{Im} a + \operatorname{Im} c}{(\operatorname{Im} c - \operatorname{Im} a)z + \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} c}.$$

Mais alors $(\operatorname{Re} a + \operatorname{Re} c)(\operatorname{Re} a - \operatorname{Re} c) - (\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} c)(\operatorname{Im} c - \operatorname{Im} a) = |a|^2 - |c|^2 = 1$. Et si a', b', c', d' sont quatre réels tels que $a'd' - b'c' = 1$, on peut trouver $a, c \in \mathbb{C}$ tels que $a' = \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} c, b' = \operatorname{Im} a + \operatorname{Im} c, c' = \operatorname{Im} c - \operatorname{Im} a, d' = \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} c$. D'où le résultat. ■

Théorème 3.4.2. *Les transformations de Möbius (du disque ou du plan) sont des isométries.*

Preuve. Une transformation de Möbius ϕ étant holomorphe, $T_z\phi = |\phi'(z)|R$ où R est une rotation de $\mathbb{R}^2$. D'où :

$$g_{\phi(z)}(T_z\phi(u), T_z\phi(v)) = g_{\phi(z)}(|\phi'(z)|R(u), |\phi'(z)|R(v)) \frac{|\phi'(z)|^2}{(\operatorname{Im} \phi(z))^2} R(u) \cdot R(v)$$

Mais on constate que pour une transformation de Möbius, $\frac{|\phi'(z)|}{\operatorname{Im} \phi(z)} = \frac{1}{\operatorname{Im} z}$. De plus, $R(u) \cdot R(v) = u \cdot v$. Ceci donne donc le bon résultat. ■

Les autres applications holomorphes réduisent les distances.

Proposition 3.4.3. *Les applications holomorphes $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ (resp. qui ne sont pas des automorphismes conformes) réduisent (resp. strictement) les normes hyperboliques des vecteurs tangents.*

Preuve. Soit f une telle application holomorphe. Soit $x \in \mathbb{D}, u \in T_x\mathbb{D}$. On veut montrer que $g_x(u, u) \geq g_{f(x)}(T_x f(u), T_x f(u))$. Il existe une isométrie holomorphe qui envoie x sur 0 et une autre qui envoie $f(x)$ sur 0 (une transformation de Möbius) donc il suffit de considérer $x = 0, f(x) = 0$. Mais $T_0 f = |f'(0)|R$ où R est une rotation de $\mathbb{R}^2$ et $f'(0)$ est de module plus petit que 1 d'après le lemme de Schwarz. Comme R ne modifie pas le produit scalaire euclidien, on a $g_0(R(u), R(u)) = 4R(u) \cdot R(u) = g_0(u, u)$. D'où

$$\begin{aligned} g_{f(x)}(T_x f(u), T_x f(u)) &= g_0(|f'(0)|R(u), |f'(0)|R(u)) \\ &= |f'(0)|^2 g_0(R(u), R(u)) \\ &\leq g_0(u, u). \end{aligned}$$

Donc f réduit les normes hyperboliques. ■

Corollaire 3.4.4. *L'image d'une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{D}$ par une application holomorphe $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de moindre longueur.*

Preuve. Le caractère $\mathcal{C}^1$ par morceaux ne pose pas de difficulté. Tous les vecteurs tangents voient leurs normes diminuer sous l'action de f , donc la longueur diminue. ■

3.5 Géodésiques hyperboliques

Pour faire plus ample connaissance avec le plan hyperbolique, on peut se demander quelles sont les courbes qui minimisent la longueur. Cette partie est optionnelle (elle constitue une digression culturelle).

Définition 3.5.1 (géodésiques). Une courbe C^1 par morceaux $c :]a, b[\rightarrow \mathbb{H}$ est appelée géodésique si elle vérifie la propriété suivante

$$\forall t_1, t_2 \in]a, b[, \int_{t_1}^{t_2} \frac{\|c'(t)\|}{\operatorname{Im} c(t)} dt = d(c(t_1), c(t_2)).$$

Ce sont donc les courbes qui, non seulement réalisent la longueur minimale entre leurs extrémités, mais aussi entre n'importe quel paire de points intermédiaires. Bien entendu, dans le plan usuel, il s'agit des droites. Mais il en va autrement dans le plan hyperbolique.

Théorème 3.5.1. *Les demi-droites verticales sont des géodésiques.*

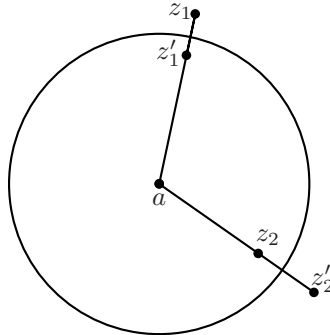
Preuve. Soit deux point $x+ia$, $x+ib$ de même abscisse, avec $b > a$. Le segment $c(t) = x + i(tb + (1-t)a)$ a une longueur

$$L(c) = \int_0^1 \frac{b-a}{tb + (1-t)a} = \ln b - \ln a.$$

Pour une autre courbe $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ telle que $y(1) = b, y(0) = a$, on a $\|\gamma'(t)\| \geq |y'(t)|$. Donc $L(\gamma) \geq \left| \int_0^1 \frac{y'}{y} \right| \geq \ln b - \ln a$, avec une inégalité stricte dès que x' n'est pas constamment nulle, c'est-à-dire dès que la courbe n'est pas une droite verticale. ■

Pour déterminer toutes les géodésiques, on aura recours à la transformation suivante.

Définition 3.5.2. Soit C le cercle de centre a , rayon R . L'inversion I_C par rapport à C est l'application qui à $z \neq a$ associe l'unique point z' de la demi-droite tel que $|z-a||z'-a| = R^2$.



On peut trouver une formule pour I_C . En effet, la condition d'alignement impose l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' - a = \lambda(z - a)$. La condition de distance donne $\lambda = \frac{R^2}{|z-a|^2}$. Et donc

$$I_C(z) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$$

On peut définir I_C sur tout $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en posant $I_C(\infty) = a, I_C(a) = \infty$.

Proposition 3.5.2. 1. Les points d'un cercle C sont tous fixes par I_C .

2. Une inversion est une transformation anti-conforme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (elle change le signe des angles orientés); c'est même une involution.
3. Les cercles et les droites sont transformés en cercles ou droites par une inversion par rapport à un cercle.
4. Une inversion est une isométrie hyperbolique.

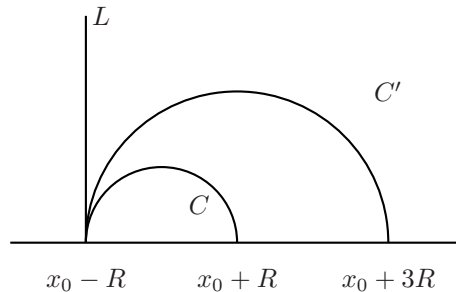
Preuve. 1. Évident.

2. Une inversion est la composée de la conjugaison, qui renverse les angles, et d'une transformation de Möbius, qui conserve les angles orientés. Le caractère involutif est évident.
3. L'application $z \mapsto 1/z$, ainsi que la conjugaison, les homothéties et les translations, laisse stable l'ensemble des cercles et droites. I_C étant une composée de telles applications, nous obtenons le résultat.
4. Une inversion est la composée de la conjugaison et d'une transformation de Möbius, deux applications isométriques. ■

Nous revenons maintenant à la géométrie hyperbolique.

Proposition 3.5.3. Les demi-cercles orthogonaux à l'axe réel (c'est-à-dire centrés en un point de l'axe réel) sont des géodésiques de $\mathbb{H}$.

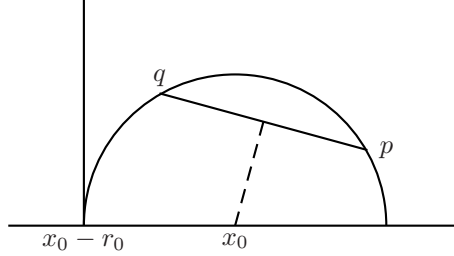
Preuve. Soit $x_0 \in \mathbb{R}, C = C(x_0, R)$ un tel demi-cercle. Soit L la demi-droite verticale passant par $x_0 - R$ (elle passe aussi par ∞), C' le demi-cercle centré au point $x_0 + R$, de rayon $2R$. L'image de L par $I_{C'}$ comporte $I_{C'}(\infty) = x_0 + R, I_{C'}(x_0 - R) = x_0 + 3R$; elle est orthogonale à l'axe réel et incluse dans le demi-plan supérieur, et c'est un arc de cercle ou une droite. C'est donc le demi-cercle C . L'inversion I'_C étant une isométrie hyperbolique et L une géodésique, C est une géodésique. ■



Théorème 3.5.4. *Par deux points de $\mathbb{H}$ passe une unique géodésique : soit un demi-cercle orthogonal à l'axe réel, soit une demi-droite verticale.*

Preuve. Soit $p \neq q \in \mathbb{H}$.

- Soit ils sont sur une même demi-droite verticale : celle-ci est alors une géodésique, et on a vu que toute autre courbe les joignant serait strictement plus longue.
- Sinon, la médiatrice de $[p, q]$ coupe l'axe réel en un point x_0 . Il y a alors un unique demi-cercle passant par p, q orthogonal à l'axe réel : il est centré en x_0 et c'est une géodésique γ d'après la proposition 3.5.3 page précédente. Soit r_0 son rayon. Soit γ' une géodésique joignant p et q . Nous pouvons comme dans la proposition 3.5.3 utiliser l'inversion I par rapport à γ : $I(\gamma)$ est alors la demi-droite verticale passant par $x_0 - r_0$. De plus, $I(\gamma')$ est une géodésique passant par $I(p)$ et $I(q)$, deux points situés sur une même droite verticale $I(\gamma)$. Il s'ensuit $I(\gamma') \subset I(\gamma)$, puis $\gamma' \subset \gamma$, d'où l'unicité. ■



3.6 Surfaces de Riemann revêtues par le disque

Soit M une surface de Riemann revêtue par $\mathbb{D}$, p la projection de revêtement et g la métrique hyperbolique sur $\mathbb{D}$. Soit $x \in M$ et U un voisinage distingué de x pour p . Alors $p^{-1}(U)$ est réunion disjointe d'ouverts U_i ($i \in I$) homéomorphes à U . Notons $p_i = p|_{U_i}$: c'est un homéomorphisme $U_i \rightarrow U$.

Choisissons $i \in I$. Définissons

$$\forall x \in U, h_x(u, v) = g_{p_i^{-1}(x)}(T_x p_i^{-1}(u), T_x p_i^{-1}(v)).$$

Le résultat est indépendant du choix de i fait. En effet, si $j \neq i$, il existe un automorphisme de revêtement ϕ tel que $\phi(U_j) = U_i$. On a alors $p_i \circ \phi = p_j$. D'après le corollaire 2.3.3 page 22, ϕ est un automorphisme conforme. C'est donc une isométrie (cf. proposition 3.4.2 page 31). On a donc

$$\begin{aligned} g_{p_j^{-1}(x)}(T_x p_j^{-1}(u), T_x p_j^{-1}(v)) &= g_{\phi^{-1}(p_i^{-1}(x))}(T_x \phi^{-1}(p_i^{-1}(u)), T_x \phi^{-1}(p_i^{-1}(v))) \\ &= g_{p_i^{-1}(x)}(T_x p_i^{-1}(u), T_x p_i^{-1}(v)). \end{aligned}$$

L'application h ainsi définie est bien une métrique : h_x est un produit scalaire et la régularité provient de la régularité de g .

Au vu de la partie précédente, toutes les surfaces de Riemann héritent ainsi de la métrique hyperbolique, sauf $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*, \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et les courbes elliptiques.

Proposition 3.6.1. *Les applications holomorphes entre de telles surfaces de Riemann M et N réduisent les normes des vecteurs.*

Preuve. Nous notons p et q les projections de revêtements. Soit $x \in \mathbb{D}$ et U un voisinage de x tel que $p : U \rightarrow p(U)$ soit une bijection holomorphe. Quitte à restreindre U , on peut supposer que $f(p(U))$ soit un voisinage distingué de $f(p(x))$. En choisissant un antécédent de $f(p(x))$ par q , en définissant $f_1 = q^{-1} \circ f \circ p$, nous obtenons une application holomorphe sur U . Puisque l'on peut faire cette opération en tout point, nous avons défini une application f_1 holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ (l'holomorphie est une propriété locale).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{D} \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

On sait qu'alors f_1 rétrécit les vecteurs tangents d'après la proposition 3.4.3 page 31. Les revêtements p et q étant, par définition, des isométries, on en déduit que f rétrécit les vecteurs tangents. ■

Comme la proposition 3.4.3, celle-ci a un corollaire sympathique.

Corollaire 3.6.2. *Soit encore M, N deux surfaces de Riemann hyperboliques. L'image d'une courbe C^1 par morceaux de M par une application holomorphe $M \rightarrow N$ est une courbe de classe C^1 par morceaux de moindre longueur. En particulier, f diminue les distances.*

Preuve. Le caractère C^1 par morceaux ne pose pas de difficulté. Tous les vecteurs tangents à la courbe voient leurs normes diminuer sous l'action de f , donc la longueur de la courbe diminue. ■

3.7 Le grand théorème de Picard

Lemme 3.7.1. *Dans le disque unité épointé, variété revêtue par le disque hyperbolique, la longueur hyperbolique du cercle euclidien de rayon r tend vers 0 quand r tend vers 0.*

Remarque 3.7.1. Attention, la métrique considérée ici sur $\mathbb{D}^*$ n'est pas la métrique induite par restriction de la métrique hyperbolique de $\mathbb{D}$, mais la métrique issue du revêtement de $\mathbb{D}^*$ par $\mathbb{D}$ muni de sa distance hyperbolique.

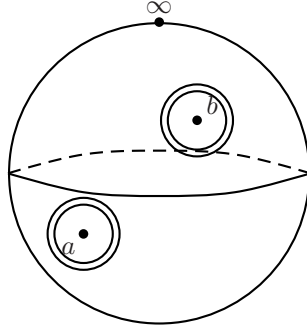
Preuve. Le cercle de rayon r est l'image par le revêtement vu en exemple 2.3.2 page 25 du segment horizontal d'ordonnée $-\log r$ compris entre $x = 0$ et $x = 1$, qui est de longueur $-1/\log r$. Or, le revêtement est une isométrie par définition de la métrique de $\mathbb{D}^*$ et $-1/\log r$ tend vers 0. ■

Armé de ce résultat préliminaire, nous attaquons le but ultime de l'exposé.

Théorème 3.7.2 (de Picard). *Soit $a \neq b$ deux nombres complexes. Une application holomorphe $\mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a, b, \infty\}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.*

Preuve. On note $\eta = |a - b|$. On note $U_a = B(a, \eta/6) = \{z \mid |z - a| < \eta/6\}$, $U'_a = B(a, \eta/3)$. Ce sont des ouverts. On note de même $U_b = B(b, \eta/6)$, $U'_b = B(b, \eta/3)$. On a $U'_a \cap U'_b = \emptyset$; par ailleurs, ∂U_a et $\partial U'_a$ sont des compacts disjoints. Comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty, a, b\}$ est une surface hyperbolique, c'est une variété riemannienne; soit d la distance fournie par la métrique riemannienne : elle induit la topologie de variété (cf. 3.2 page 28). Donc $d(\partial U'_a, \partial U_a) > 0$. De même, $d(\partial U'_b, \partial U_b) > 0$. On note ϵ la plus petite de ces deux distances.

On note $C_a = U'_a \setminus U_a$, $C_b = U'_b \setminus U_b$ les deux couronnes.



Intéressons nous à la famille de lacets $\gamma_r = \partial B(0, r)^+$, $0 < r < R$ avec R tel que γ_R soit de longueur moindre que ϵ (possible grâce au lemme 3.7.1 page précédente). Ils sont tous homotopes entre eux (exemple 2.1.1 page 10). Par conséquent, leurs images sont homotopes (proposition 2.1.1 page 10). Et puisque f est une application holomorphe entre surfaces hyperboliques, elle réduit les longueurs des courbes (corollaire 3.6.2 page précédente), donc $f(\gamma_r)$ est de longueur $< \epsilon$. Il est alors impossible que le lacet $f(\gamma_r)$ traverse une des couronnes tracées. Un lacet image est donc soit entièrement dans U'_a , soit entièrement à l'extérieur de U_a (les deux étant réalisées en même temps quand le lacet est dans la couronne). De deux choses l'une :

- soit tous les lacets images $f(\gamma_r)$ sont à l'extérieur de U_a . Or les lacets γ_r recouvrent $V = B(0, R) \setminus \{0\}$. Donc $f(V)$ est inclus dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus U_a$. D'après le théorème 1.3.2 (page 7), la singularité de f en 0 n'est pas essentielle.
- soit il y a un r_0 tel que $f(\gamma_{r_0})$ ait un point dans U_a . Alors $f(\gamma_{r_0})$ est entièrement dans $U'_a \setminus \{a\}$. Le lacet γ_{r_0} passe par r_0 , $f(\gamma_{r_0})$ par $x = f(r_0)$. Or, le groupe fondamental $\pi_1(U'_a \setminus \{a\}, x)$, est isomorphe à $\mathbb{Z}$: c'est $\{c_a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ où c_a est un cercle autour de a passant par x . Donc il existe n tel que $f(\gamma_{r_0})$ soit homotope à c_a^n . Deux cas se présentent :
 - le lacet $f(\gamma_{r_0})$ est homotope au lacet trivial ($n = 0$). Tout lacet de V étant homotope à une puissance de γ_{r_0} , on a $f_*(\pi_1(V, r_0)) = \{0\}$. Le lemme 2.4.2 page 26, conséquence démontrée à la fin de la seconde partie du théorème du relèvement, permet alors de conclure que la singularité de f en 0 est inessentielle.
 - sinon, on a vu (exemple 2.1.2 page 10) que c_a^n n'était homotope à aucun c_b^m où c_b est un générateur de $\pi_1(U'_b \setminus \{b\}, y)$, et $y \in U'_b \setminus \{b\}$. Donc $f(\gamma_{r_0})$ n'est pas homotope à un lacet de $\pi_1(U'_b \setminus \{b\}, y)$; mais alors, puisque tous les $f(\gamma_r)$ sont homotopes, pour tout r , $f(\gamma_r)$ n'est homotope à aucun lacet de $U'_b \setminus \{b\}$, et $f(\gamma_r)$ n'est donc pas entièrement dans U'_b . Ainsi,

pour tout r , $f(\gamma_r)$ est entièrement hors de U_b . De nouveau, les lacets γ_r recouvrant V , $f(V)$ est inclus dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus U_b$ et le théorème 1.3.2 permet de conclure que la singularité de f en 0 n'est pas essentielle. ■

Bibliographie

- [Ahl66] Lars V. AHLFORS : *Complex Analysis*. McGraw-Hill, deuxième édition, 1966.
- [For81] Otto FORSTER : *Lectures on Riemann Surfaces*, volume 81 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1981.
- [GHL87] Sylvestre GALLOT, Dominique HULIN et Jacques LAFONTAINE : *Riemannian Geometry*. Springer Verlag, 1987.
- [Lan77] Serge LANG : *Complex Analysis*. Addison-Wesley, 1977.
- [Paua] Frédéric PAULIN : *Géométrie différentielle élémentaire*. Notes de Cours, École Normale Supérieure. URL : <http://www.fimfa.ens.fr/fimfa/IMG/File/cours/poly2p.pdf>.
- [Paub] Frédéric PAULIN : *Topologie algébrique élémentaire*. Notes de Cours, École Normale Supérieure. URL : <http://www.fimfa.ens.fr/fimfa/IMG/File/cours/topo%20algebrique01-10Paulin.pdf>.
- [Pic79] Émile PICARD : Sur une propriété des fonctions entières. *Comptes-rendus de l'Académie des sciences de Paris, tome LXXXVIII*, 50:1024–1029, 1879.
- [Pic80] Émile PICARD : Mémoire sur les fonctions entières. *Annales scientifiques de l'ÉNS, 2^e série*, 9:145–166, 1880.
- [Rey89] Eric REYSSAT : *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, volume 77 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1989.
- [Spa66] Edwin H. SPANIER : *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966.
- [TSE09] Éric TOUBIANA et Ricardo SA EARP : *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Cassini, 2009.