MAT 1013 : Feuille d'exercice 8

Convergence et convergence absolue des séries

Exercice 1 :

ⓐ $a_n = \dfrac{2(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ alors $|a_n| = \dfrac{2}{n\sqrt{n}} = \dfrac{2}{n^{3/2}}$ et $3/2 > 1$ donc la série est du type Riemann convergente donc absolument convergente donc convergente

ⓑ $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/10}}$ alors $|b_n| = \dfrac{1}{n^{1/10}}$ et $1/10 < 1$ donc la série est du type Riemann divergente donc la série n'est pas absolument convergente

Mais on remarque que $b_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \dfrac{1}{n^{1/10}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et décroissante donc en utilisant le critère de Leibniz on conclut à la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

ⓒ $c_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $x \in \mathbb{R}$ fixé ; $|c_n| = \dfrac{x^{2n}}{n!}$

Donc $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \dfrac{|x|^{2n+2}\, n!}{|x|^{2n}(n+1)!} = \dfrac{|x|^2}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc en utilisant le critère de D'alembert, on conclut à la convergence absolue de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ et donc à sa convergence

ⓓ $d_n = \dfrac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$ $x \in \mathbb{R}$ fixé $|d_n| = \dfrac{|\cos(nx)|}{n\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$ et par le même principe qu'en ⓐ la série est absolument convergente.

ⓔ $e_n = (-1)^n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ $|e_n| = 1 + \dfrac{1}{n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} |e_n| = 1$ donc la série ne converge pas absolument

De plus la suite e_n ne converge pas vers 0 puisque elle possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 lorsque n tend vers $+\infty$ donc la série sera divergente.

ⓕ $f_n = \dfrac{\sin(n\pi/2)}{1+\sqrt{n}}$ alors $|f_n| = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ si n est impair ; $|f_n| = 0$ si n est pair

Or on sait que $\lim_n \frac{1/\sqrt{n}}{1/(\sqrt{2n+1}+1)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2}$ donc ces séries sont de même nature ici divergente donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ne converge pas absolument.

Mais par contre $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+\sqrt{2k+1}}$ dont on voit que c'est une série alternée avec $\lim_n \frac{1}{1+\sqrt{2n+1}} = 0$ donc par le critère de Leibniz convergente.

Exercice 2 :

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $x \in \mathbb{R}$ fixé

Alors $\frac{|x^{n+1}/n+1|}{|x^n/n|} = |x| \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} |x|$

Donc si $|x| \geq 1$ la série ne sera pas absolument convergente mais si $|x| < 1$, la série sera absolument convergente

Pour $x > 1$ et $x < -1$ on a $\lim_n \left| \frac{x^{n+1}/n+1}{x^n/n} \right| > 1$ donc $\lim_n \frac{|x|^n}{n} = +\infty$ et la série est divergente.

Pour $x = 1$ la série sera evidement divergente mais pour $x = -1$ en appliquant le théorème de Leibniz on conclut à la convergence de la série.

Exercice 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}$$

Or $|-1/4| < 1$ donc la série est une série géométrique de raison $(-1/4)$ on a donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} = \frac{1-(-1/4)^{n+1}}{1-(-1/4)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{4}{5}$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n} = \frac{4}{5}$

Exercice 4

ⓐ La suite S_{2k} est croissante car $S_{2k+2} - S_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} > 0$ car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante

La suite S_{2k+1} est décroissante car $S_{2k+3} - S_{2k+1} = -a_{2k+3} + a_{2k+2} < 0$ toujours par décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais aussi grâce à l'alternance des signes.

On a alors $S_{2k+1} < S_{2n+1} \leq S_{2n} < S_{2k}$ pour k fixé et $\forall n > k$.

Ici $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} < 0$.

Donc en passant à la limite sur n comme l'on sait que S_n est convergente on obtient $S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$ et ceci $\forall k \in \mathbb{N}$

ⓑ $|R_n| = |S - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\right| = \left|(-1)^{n+1} a_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\right|$

$= \left|(-1)^{n+1} a_{n+1} + R_{n+1}\right| = \left|a_{n+1} + (-1)^{n+1} R_{n+1}\right|$

$\leq |a_{n+1}|$

Car si n est pair alors $R_{n+1} > 0$ et $(-1)^{n+1} R_{n+1} < 0$

si n est impair alors $R_{n+1} < 0$ et $(-1)^{n+1} R_{n+1} < 0$

ⓒ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

Une valeur approchée à 10^{-1} près de $\ln(2)$ correspond alors au fait que $|R_n| \leq 10^{-1}$ on peut alors considérer $|R_n| \leq a_{n+1} < 10^{-1}$ donc $\dfrac{1}{n+1} < 10^{-1} \Rightarrow n+1 > 10$ ou $n > 9$ donc pour $n = 10$

on aura une bonne valeur approchée.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{k+1} =$

Exercice 5 :

$\lambda = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \lambda = \dfrac{\pi^2}{6}$

ⓐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ est une série absolument convergente donc convergente.

ⓑ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Donc comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergence vers λ on a alors $\displaystyle\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\lambda}{4}$

ⓒ En toute généralité considérons $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2}$

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}$ du fait que ces deux séries soient convergentes.

Donc la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge vers $\displaystyle\lim_{n} \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}\right) = \frac{3}{4}\lambda$

ⓓ Ainsi on obtient que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}$ car ces séries sont convergentes.

Donc $\lim_{n} \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right) = \lim_{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \right) - \lim_{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \lambda$

ⓓ De manière similaire, on a :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^d} = \frac{1}{2^d} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^d}$

et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^d} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^d} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^d}$

Et ainsi $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^d} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^d} - \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^d}$

En passant à la limite on obtient alors : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^d} = \left(1 - \frac{1}{2^{d-1}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^d}$

Exercice 6

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ ici $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ terme général d'une série de Riemann convergente donc la série est absolument convergente donc convergente.

Posons $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

On a donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) - 1$

Or $\frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^k}{k+1}$ termes généraux de séries convergentes

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et en passant à la limite

on obtient $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = 2\ln 2 - 1$

Exercice 7 :

ⓐ Considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au rang N alors elle possède N' termes positifs, N'' termes négatifs et $N-(N'+N'')$ termes nuls.

Avec $N' < N$ et $N'' < N$.

Ainsi $\sum_{n=0}^{N} |a_n|$ sommes toutes les valeurs absolues de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au

rang N on a donc $\sum_{n=0}^{N} |a_n| = \sum_{n=0}^{N'} p_n + \sum_{n=0}^{N''} |q_n| = \sum_{n=0}^{N'} p_n - \sum_{n=0}^{N''} q_n$
les termes q_n étant tous négatifs.
On a alors $\sum_{n=0}^{N} |a_n| = S_{N'} - T_{N''}$

En faisant tendre N' et N'' vers l'infini on fait tendre N vers l'infini
donc si $S_{N'}$ et $T_{N''}$ sont convergentes alors $\sum_{n=0}^{N} |a_n|$ sera convergente.
Donc la série sera absolument convergente.

b) Ici $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N'} |a_n| + a_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{N} 2p_n + \sum_{n=0}^{N''} |q_n| + q_n \right)$ avec N et $N'' < N'$

$= \sum_{n=0}^{N} p_n = S_N$

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists N' \in \mathbb{N}$ avec $N' \geq N$ tel que $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N'} |a_n| + a_n = S_N$

On déduit du même raisonnement que $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists N'' \in \mathbb{N}$ tel que $N'' \geq N$
et $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N''} a_n - |a_n| = T_N$

Donc si $(\sum a_n)$ converge absolument les suites S_N et T_N seront convergentes.

c) On déduit facilement l'équivalence de a) et b) entre la convergence absolue de $(\sum a_n)$ et la convergence de S_N et T_N.

d) Si on suppose $(\sum p_n)$ convergente alors $S_N - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N'} a_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N'} |a_n|$

En faisant tendre N à l'infini on conclurait à la convergence absolue de $(\sum a_n)$ ce qui est contradictoire.
De la même façon on démontre que $(\sum q_n)$ est divergente.