MAT 1013 : Feuille d'Exercices 2 : Rationnels, Majorants, Bornes supérieures

Exercice 2 :

ⓐ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b$, $c \geq d$.
Montrer que $a+c \geq b+d$
Si $a \geq b$ alors $(a-b) \geq 0$. Si $c \geq d$ alors $(c-d) \geq 0$.
Ainsi $(a-b)+(c-d) \geq 0$ et $a+c \geq b+d$

ⓑ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b \geq 0$, $c \geq d \geq 0$
Montrer que $ac \geq bd$
Si $a \geq b$ alors $(a-b) \geq 0$. Or $c \geq 0$ donc $(a-b)c \geq 0$
et $ac \geq bc$
De même $c \geq d$ donc $(c-d) \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $b(c-d) \geq 0$ et
$bc \geq bd$
Par transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ on obtient alors $ac \geq bd$

ⓒ Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b \geq 0$
Montrer que $a^2 \geq b^2$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n \geq b^n$
$a \geq b$ et $a \geq 0$ donc $a^2 \geq ba$. De même $a \geq b$ et $b \geq 0$
donc $ba \geq b^2$ donc par transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$
on a bien $a^2 \geq b^2$. On vient donc de vérifier les cas $n = 0, 1, 2$
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $a^n \geq b^n$.
Alors $a^{n+1} = a^n \cdot a \geq a^n \cdot b \geq b^n \cdot b = b^{n+1}$ donc par principe de récurrence $a^n \geq b^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

ⓐ Est-ce que la somme de deux irrationnels est toujours un irrationnel ?
La réponse est évidemment non. Un contre exemple simple est $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$
Et le produit ?
La réponse est la même car $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

ⓑ Montrer que : $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y \notin \mathbb{Q}$
Supposons que $x+y \in \mathbb{Q}$ alors il existe $z \in \mathbb{Q}$ tels que $x+y = z$
et $x = z - y$ donc $x \in \mathbb{Q}$ (car la somme de deux rationnels est un rationnel) contradiction

ⓒ Montrer que : $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow xy \notin \mathbb{Q}$
Supposons $xy \in \mathbb{Q}$ alors il existe $z \in \mathbb{Q}$ tels que $xy = z$ donc
$x = z/y$ et $x \in \mathbb{Q}$ contradiction

Exercice 4:

a) Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.
Supposons que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ il existe donc p et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $\sqrt[3]{2} = p/q$ avec p/q irréductible. et $q \neq \pm 1$
Donc $2 = p^3/q^3$ et $2q^3 = p^3$. Sachant que q ne divise pas p 2 divise donc p^3 et divise donc p car 2 est premier. Ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$.
Ainsi $2q^3 = 8k^3$ et $q^3 = 4k^3$. Or k ne divisant pas q on a que 2 divise q ce qui n'est pas possible non plus donc $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$

b) Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
Procédons comme précédemment on a alors $\sqrt{3} = p/q$ et $3 = p^2/q^2$
Ainsi $3q^2 = p^2$ donc 3 divise p et $p = 3k$ donc $3q^2 = 9k^2$ et $q^2 = 3k^2$.
k ne divisant pas q on en déduit que 3 divise q ce qui n'est pas possible car contredisant notre hypothèse donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 8

a) $A := \{ 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \}$
$\sup A = 2 \quad \inf A = 1$
A n'a pas de maximum et A possède un minimum ie $\min A = \inf A$.

b) $B := \{ 2 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \} = \{ 2 + \frac{1}{n} \mid n \in 2\mathbb{N} \} \cup \{ 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N} \}$
$\sup B = 5/2 \quad \inf B = 1$
Or $5/2 \in B$ et $1 \in B$ donc $\max B = \sup B$ et $\min B = \inf B$

c) $C := \{ (-1)^n + 1/n \mid n \in \mathbb{N}^* \} = \{ 1 + 1/n \mid n \in 2\mathbb{N} \} \cup \{ -1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N} \}$
$\sup C = 3/2$ et $\inf C = -1$
Or $3/2 \in C$ et $-1 \notin C$ donc le $\sup C = \max C$ et C ne possède pas de minimum

d) $D := \{ 3n/3n+2 \mid n \in \mathbb{N} \}$
$\inf D = 0$ et $\sup D = 1$ avec $0 \in D$ et $1 \notin D$ donc l'infimum est un minimum et D ne possède pas de maximum.

e) $E := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0 \}$
Soit $P(x) = x^2 + x + 1$ alors le discriminant de P, $\Delta = -3$ donc P ne possède pas de racines réelles et le coefficient directeur de P est positif donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(x) \geq 0$. Ainsi E n'est pas borné donc ne possède ni supremum, ni infimum

f) $F := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 \leq 0 \}$
Soit $Q(x) = x^2 + x - 1$ alors $\Delta = 5$ donc Q possède deux racines réelles $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, le coefficient directeur de P est positif

donc $F := [a_1, a_2]$ ainsi $\sup F = a_2$ et $\inf F = a_1$ qui appartiennent à F donc sont des maximum et infimum.

(g) $G := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 9\} = (]-\infty, -3[\cup]3, \infty[) \cap \mathbb{Q}$

Cet ensemble n'est pas borné donc ne possède ni infimum, ni supremum

Exercice 9 : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ ensemble borné

Montrer que $M = \sup A \iff$ ① M est majorant de A

② $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A \mid x > M - \varepsilon$

($\Rightarrow$) Si $M = \sup A$ alors par définition M est un majorant de A donc ① est vérifié

Soit $\varepsilon > 0$ supposons $\nexists y \in A$ tel que $y > M - \varepsilon$. Soit z tel que $M > z > M - \varepsilon$ alors $\forall x \in A$, $z > x$ donc z est majorant de A et $M > z$ ce qui est une contradiction donc ② est vérifié

($\Leftarrow$) Soit M tel que M soit majorant de A alors $\sup A \leq M$

Or $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A \mid x > M - \varepsilon$. Supposons alors que $\sup A < M$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\sup A \leq M - \varepsilon < M$ et il existe $x \in A$ tel que $\sup A \leq M - \varepsilon < x < M$ ce qui est une contradiction donc $M = \sup A$

Exercice 10 : Soit E et $F \subseteq \mathbb{R}$ et bornées telles que $E \subseteq F$. Montrer que

$\inf F \leq \inf E \leq \sup E \leq \sup F$

Par définition on sait déjà que $\inf E \leq \sup E$.

Soit $M = \sup F$ alors $\forall f \in F$, $f \leq M$ donc en particulier $\forall e \in E$ $e \leq M$. Donc M est majorant de E, $\sup E = N$ est le plus petit de ces majorants par définition donc $N \leq M$.

Soit $m = \inf F$ alors $\forall f \in F$, $m \leq f$ donc en particulier $\forall e \in E$ $m \leq e$. Donc m est minorant de E et par définition $\inf E = n$ est le plus grand de ceux-ci donc $m \leq n$.

Ainsi $\inf F \leq \inf E \leq \sup E \leq \sup F$

Exercice 16 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le sup de $A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < \alpha\}$

α est majorant de A par définition. Soit $\varepsilon > 0$ alors $\alpha - \varepsilon < \alpha$ et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha - \varepsilon < a < \alpha$

Donc α vérifie les propriétés du supremum i.e. $\sup A = \alpha$

De par la définition de A, α n'est pas maximum de A car n'appartient pas à A.

Maintenant, soit $B := \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq \alpha\}$. La démonstration du supremum est la même mais maintenant $\alpha \in B$. Donc si $\alpha \in \mathbb{Q}$ alors $\max B = \sup B$ et si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ alors B ne possède pas de maximum.

Exercice 12 : A, B deux parties majorées de $\mathbb{R}$

① $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

Soit $M = \max(\sup A, \sup B)$ alors M est majorant de $A \cup B$ et $\forall \varepsilon > 0$
$\exists a \in A \cup B$ tel que $a > M - \varepsilon$ par définition du supremum de A ou de B donc M vérifie les propriétés du supremum donc $M = \sup(A \cup B)$

② $\sup(A \cap B) \neq \min(\sup A, \sup B)$
Prenons $A = [2, 3]$ et $B = [4, 5]$ alors $A \cap B = \emptyset$ donc
$\sup(A \cap B) \neq \min(\sup A, \sup B)$
Un autre exemple intéressant est $A = [2,3] \cup \{10\}$ et $B = [1,5] \cup \{15\}$
Alors $A \cap B = [2,3]$ donc $\sup(A \cap B) = 3$ et $\min(\sup A, \sup B) = 10$
A-t-on $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$
Soit $a \in A \cap B$ alors $a \leq \sup A$ et $a \leq \sup B$ donc $a \leq \min(\sup A, \sup B)$
Donc $\min(\sup A, \sup B)$ est majorant de $A \cap B$ donc $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$

③ $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$

Exercice 17 : Montrer qu'entre deux réels distincts il existe une infinité de rationnels.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ alors on peut supposer $a < b$.
Supposons qu'il existe un nombre fini de rationnels entre a et b on les note alors $p_1, \dots p_n$.
En toute généralité on suit alors que $a < p_1 < \dots < p_n < b$. Mais par propriété sur $\mathbb{Q}$ on suit aussi que $\frac{p_1 + p_2}{2} \in \mathbb{Q}$ et $p_1 < \frac{p_1+p_2}{2} < p_2$. On déduit ainsi qu'il existe une infinité de rationnels entre a et b.

Exercice 18 : L'ensemble des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$ alors on peut supposer que $a < b$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans, on suit qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b$.
Considérons $a + \sqrt{2}$ et $b + \sqrt{2}$ alors par propriété axiomatique de $\mathbb{R}$ on a $a + \sqrt{2} < q + \sqrt{2} < b + \sqrt{2}$
Or $q + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vérifie la propriété de densité dans $\mathbb{R}$.