MA1013 : Feuille d'exercices 1
Ensembles, Récurrence

Exercice 1 : A, B deux ensembles. Montrer les équivalences suivantes :

ⓐ $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

① Montrons que $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

Soit $a \in A$ alors $a \in A \cup B$ donc $a \in B$ car $A \cup B = B$

Ainsi si $a \in A$ alors $a \in B$ donc $A \subseteq B$

② Montrons que $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

Soit $a \in A$ alors $a \in B$ car $A \subseteq B$ donc $A \cup B \subseteq B \cup B = B$

Or $B \subseteq A \cup B$ donc $A \cup B = B$

ⓑ $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$

① Montrons que $A \cap B = B \Rightarrow B \subseteq A$

Soit $b \in B$ alors $b \in A$ car $B = A \cap B$

Donc $b \in B$, $b \in A$ ce qui signifie que $B \subseteq A$

② Montrons que $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$

Soit $b \in B$ alors $b \in A$ car $B \subseteq A$ donc $b \in B$ et $b \in A$

$B \subseteq A \cap B$

Or $A \cap B \subseteq B$ donc $A \cap B = B$

Exercice 4 : Pour les applications suivantes dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

① $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longmapsto 3n+2$ — cette application est injective mais non surjective donc non bijective

② $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3+1$ — cette application est bijective donc injective et surjective.

③ $h :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$ — cette application est injective mais non surjective sur $\mathbb{R}$ donc non bijective ~~de~~ $]0,\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

④ w : {étudiants de la classe} $\longrightarrow$ {lettres de l'alphabet}

$x \longmapsto$ initiale du prénom de l'étudiant x

Ici tout dépend bien sur de la classe. Si il y a moins de 26 étudiants cette application ne peut pas être surjective, si il y a plus de 26 étudiants et que pour chaque lettre de l'alphabet un étudiant de la classe possède un prénom dont l'initiale est cette lettre alors l'application est surjective.

Si chaque étudiant possède une initiale de son prénom différente des autres alors cette application est injective.
Si il y a 26 étudiant dans la classe et que cette application est injective alors elle est bijective.

ⓔ v : {étudiants de l'UQAM} $\longrightarrow$ {code 4 lettres + 8 chiffres}
$x \longmapsto$ code permanent de l'étudiant x
Cette application est certainement injective et pour un moment encore n'est pas surjective.

Exercice 7 : Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ deux applications.
Considérons la composée $g \circ f : A \to C$ et montrons les énoncés suivants :

ⓑ g et f sont surjectives $\Rightarrow$ $g \circ f$ est surjective
Soit $c \in C$ alors g étant surjective, $\exists\, b \in B$ tel que $g(b) = c$
Considérons alors ce $b \in B$ tel que $g(b) = c$, alors f étant surjective $\exists\, a \in A$ tel que $f(a) = b$.
Donc $\forall c \in C$ $\exists\, a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$ donc $g \circ f$ est surjective.

ⓒ $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f est injective
Soit a_1 et $a_2 \in A$ tel que $a_1 \neq a_2$ alors $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$ car $g \circ f$ est injective.
Supposons f non injective alors sans perte de généralité on peut considérer que $f(a_1) = f(a_2)$ mais alors comme g est une application bien définie $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$ ce qui est une contradiction.
Donc f est injective

ⓓ $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g est surjective
$g \circ f$ est surjective donc $\forall c \in C$ $\exists\, a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$
donc $\forall c \in C$ $\exists\, b \in B$ tel que $b = f(a)$ et $g(b) = c$ donc g est surjective

Exercice 11 : Démontrer par récurrence sur n :

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$
On vérifie que si $n = 0$ $2^0 = 1 > 0$
si $n = 1$ $2^1 = 2 > 1$
On suppose maintenant pour n fixé la proposition $P(n) ::= \{2^n > n\}$ vraie
on suppose aussi que $n \geq 1$
On va montrer alors que la proposition $P(n+1) ::= \{2^{n+1} > n+1\}$ est alors vraie et établir alors par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ est vraie.

$2^{n+1} = 2^n \times 2 > n \times 2$ par hypothèse de récurrence

On $n \times 2 = n + n \geq n+1$ par hypothèse sur n $(n \geq 1)$

Donc par transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ on a : $2^{n+1} > n+1$

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie et la relation $2^n > n$ est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Il est intéressant de remarquer que le pas de récurrence n'est pas vrai lorsque $n = 0$ mais la proposition $\mathcal{P}(n)$ se prolonge naturellement aux cas $n = 0$.

Exercice 12 : Montrer par récurrence sur n l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pour $n = 0$ on a bien $0 = \frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6}$

Pour $n = 1$ on a bien $1 + 0 = 0 + \frac{1 \times (2) \times (3)}{6}$

Supposons donc vraie pour n fixé la proposition $\mathcal{P}(n) := \left\{ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$

Montrons alors que la proposition $\mathcal{P}(n+1) := \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \right\}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{(n+1)}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1) \right] = \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Donc le principe de récurrence pour la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifié, elle est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 : Soit $a > -1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$

Pour montrer que $(1+a)^n \geq 1+na$ $\forall n \in \mathbb{N}$, utilisons un principe de récurrence.

Pour $n = 0$, on a bien $(1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times a = 1$

$n = 1$, on a bien $(1+a) \geq 1 + 1 \times a = 1 + a$

Supposons alors que la proposition $\mathcal{P}(n) := \{(1+a)^n \geq 1 + na\}$ est vraie pour un n fixé appartenant à $\mathbb{N}$.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors toujours vraie.

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a)$ par hypothèse de récurrence

$(1+na)(1+a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + a(n+1) + na^2 \geq 1 + a(n+1)$

car $na^2 \geq 0$.

Donc $(1+a)^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$; $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie et avec elle notre principe de récurrence est vérifié.

Exercice 15 : Déterminer et prouver pour quels entiers naturel $2^n \leq n!$

Pour $n=0$ $\quad 2^0 = 1 \leq 0! = 1$ Vrai
Pour $n=1$ $\quad 2^1 = 2 > 1! = 1$ FAUX
Pour $n=2$ $\quad 2^2 = 2\times 2 = 4 > 2! = 2$ FAUX
Pour $n=3$ $\quad 2^3 = 2\times2\times2 = 8 > 3! = 3\times2\times1 = 6$ FAUX
Pour $n=4$ $\quad 2^4 = 2\times2\times2\times2 = 16 \leq 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$ Vrai

A partir de $n=4$ on va multiplier le côté gauche de l'inégalité par 2 et le côté droit par un nombre strictement supérieur, il y a de grande chance pour que l'inégalité soit alors conservée. Etablissons ce résultat par récurrence.

Supposons donc $P(n) := \{2^n \leq n!\}$ vraie pour $n \geq 4$ fixé et appartenant à $\mathbb{N}$.

Montrons alors que $P(n+1) := \{2^{n+1} \leq (n+1)!\}$ est vraie.

$2^{n+1} = 2\times 2^n \leq 2\times n!$ par hypothèse de récurrence

Or $2\times n! \leq (n+1)(n!) = (n+1)!$ puisque $(n+1) > 2$

Ainsi par transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ on a bien l'inégalité $2^{n+1} \leq (n+1)!$ et $P(n+1)$ est vraie.

Le principe de récurrence est vérifié $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2,3\}$

Exercice 17 : Expliquer pourquoi le raisonnement de l'étudiant est faux.

Tout d'abord remarquons que si l'on suppose $n \geq 3$ fixé alors le pas de récurrence est vrai. Autrement dit si l'on suppose n points toujours alignés que l'on choisit un point de plus qui vérifie l'hypothèse de récurrence alors les $(n+1)$ points seront alignés. Le problème se situe dans le pas de l'étape $n=2$ à l'étape $n=3$. En effet, deux points seront toujours alignés car forment une droite mais à ces deux points on peut en ajouter un troisième de telle façon que deux points seront toujours alignés mais pas les trois (on forme alors un triangle)

Exercice 10 :

ⓐ $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$
$\quad n \longmapsto 2n$

f est injective : Soient $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}$ supposons que $f(n_1) = f(n_2)$ alors $2n_1 = 2n_2$ et $n_1 = n_2$ ce qui est une contradiction.
f est donc injective.

f est surjective : Soit $m \in 2\mathbb{N}$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k$ alors $\frac{m}{2} = k$ et $f(k) = 2\times\frac{m}{2} = m$ donc f est surjective.

(b) Montrons que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$.
Pour cela construisons une application bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Je vous laisse le soin de montrer la bijection.

Exercice 16

Tout d'abord calculons quelques premiers termes : Pour $n=1$ on a 1, pour $n=2$ on a $1+3=4$, pour $n=3$ on a $1+3+5=9$, pour $n=4$ on a $1+3+5+7=16$. Là on remarque que la somme de ces n entiers semble être égale à n^2. On veut montrer cette égalité en utilisant le principe de récurrence, on a vérifié les première étapes on va donc émettre l'hypothèse que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé on a $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Montrons alors que $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

Ainsi par principe de récurrence, on a trouvé et démontrer la formule.

Exercice 21 : Démontrer la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

Soit $n=0$ alors $(x+y)^0 = 1$ et $\binom{0}{0}x^0y^0 = 1$ donc la formule est vraie

Soit $n=1$ alors $(x+y)^1 = x+y$ et $\binom{1}{0}x^0 y + \binom{1}{1}x^1y^0 = x+y$ donc vrai aussi

Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ fixé que la formule est vraie.

Montrons alors que pour $(n+1)$ elle l'est toujours.

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right)(x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} + y^{n+1}$$

Or $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \dfrac{n!}{(k!)(n-k)!} = \dfrac{n!\,k + n!\,(n-k+1)}{(k)!\,(n-k+1)!}$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Donc $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{(n+1)-k} + x^{n+1} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{(n+1)-k}$

On vient ainsi de vérifier la formule du binôme de Newton.