

Percevoir les frontières de la métastabilité

sur la base des résultats de convergence quasi-stationnaire

Aurélien Velleret

Séminaire de probabilité du LaMME

aurelien.velleret@nsup.org

13 Juin 2024



Dynamiques aléatoires

Modèles de populations issus de la biologie:

- Processus d'adaptation en écologie théorique (thèse)

'17-20 Thèse de mathématiques, I2M, Aix-Marseille Univ.

Adaptation, métastabilité, quasi-stationnarité



'15-16 M2: Maths pour les Sciences du Vivant (Orsay)

'13-17 Ecole Normale Supérieure (Paris)



Dynamiques aléatoires

Modèles de populations issus de la biologie:

- ▶ Propagation d'épidémies (3 postdoctorats)
- ▶ Processus d'adaptation en écologie théorique (thèse)

 **MaiAGE** '23-24 **MaIAGE**, Inrae, Jouy-en-Josas



'22-23 **LAMA**, Université Gustave Eiffel, Marne-la-Vallée



'20-21 Institut für Mathematik, **Goethe Universität**, Francfort

'17-20 Thèse de mathématiques, **I2M**, Aix-Marseille Univ.

Adaptation, métastabilité, quasi-stationnarité



'15-16 **M2:Maths pour les Sciences du Vivant** (Orsay)

'13-17 **Ecole Normale Supérieure** (Paris)



Persistence et stabilité de processus d'interaction

Au sein d'une grande population de particules:

Ecologie théorique: Compétition entre lignages de cellules

Epidémiologie: Propagation d'épidémies entre individus (notamment)

Systèmes cognitifs: Propagation de signaux entre neurones

Modélisation typique du système de neurones

Un **grand nombre** fixé N de neurones

connectés les uns aux autres

Interactions: événements aléatoires de **décharges** (potentiel d'action)

Rôle du **potentiel électrique** de chaque neurone

comme médiateur des interactions

via son effet sur le taux de décharge.

Sommaire

Modèles et objectifs

- Métastabilité, quasi-stationnarité et adaptation

- Métastabilité de réseaux de neurones

- Noyaux d'interaction pour des systèmes neuronaux

- Noyaux d'interaction en épidémiologie

Justification de la quasi-stationnarité

- Notions préalables d'ergodicité

- Critères de convergence

Que veut dire l'**adaptation** d'une population?

Motivation d'écologie théorique reliée à celle physique de **métastabilité**

Quasi-stationnarité: propriété probabiliste d'équilibre
avec restriction sur les trajectoires convenables (ici sans extinction),
associée mais non équivalente!

3 modes d'adaptation considérés,

dynamiques démographiques associées à des processus sélectifs:

- ▷ Résilience au changement environnemental

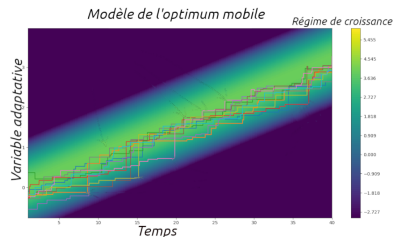
Velleret 2024 [Adv. Appl. Probab.](#)

- ▷ Pérennité de la collaboration dans le groupe

Velleret 2024 [Disc. Cont. Dyn. Sys.-B](#)

- ▷ Contre-sélection des mutations délétères

Mariani, Pardoux, Velleret, en révision à [PTRF](#)



Simulations de trajectoires de population associées à l'article à [Adv. Appl. Probab](#)

Convergence quasi-stationnaire, exponentielle et uniforme

Il existe des caractéristiques (λ, h, α) et $C, \gamma > 0$ tels que:

$$\left\| \exp(\lambda t) \cdot \int_{\mathbb{X}} \mathbb{P}_y \left(X(t) \in dx; t < \tau_{\partial} \right) \mu(dy) - \left(\int_{\mathbb{X}} h(y) \mu(dy) \right) \cdot \alpha(dx) \right\|_{TV} \leq C \cdot \exp(-\gamma t),$$

pour toute **mesure μ de probabilité** sur \mathbb{X} comme **condition initiale**
et tout temps $t > 0$, où τ_{∂} est le **temps d'extinction**.

Propriété générique à la base des publications précédentes,

Etablissement de critères nouveaux spécifiquement ajustés

notamment aux trois problématiques précédentes d'adaptation

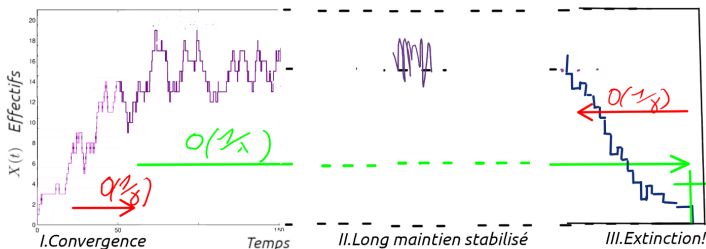
Velleret 2022 [Stoch. Proc. Appl.](#)

Velleret 2023 [ESAIM Probab. Stats.](#)

Caractéristiques du régime quasi-stationnaire

- ▷ $\lambda > 0$: le **taux d'extinction**
- ▷ $\gamma > 0$: **quantification** délicate, en partie éclaircie par les preuves théoriques à comparer à λ : critère d'**adaptation**, de **métastabilité**
- ▷ $h(x)$
- ▷ $\alpha(dx)$

$$\left\| e^{\lambda t} \cdot \int_{\mathbb{X}} \mathbb{P}_y(X(t) \in dx; t < \tau_\partial) \mu(dy) - \left(\int_{\mathbb{X}} h(y) \mu(dy) \right) \cdot \alpha(dx) \right\|_{TV} \leq C \cdot e^{-\gamma \cdot t},$$

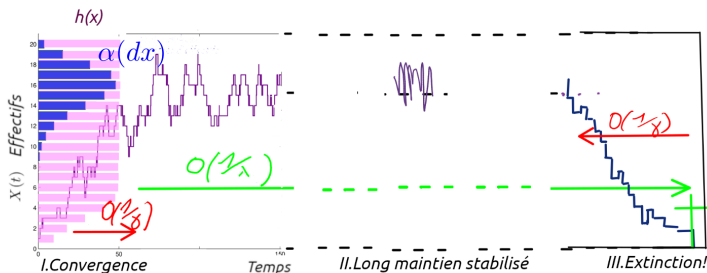


Caractéristiques du régime quasi-stationnaire

- ▷ $\lambda > 0$: le **taux d'extinction**
- ▷ $\gamma > 0$: **quantification** délicate, en partie éclaircie par les preuves théoriques à comparer à λ : critère d'**adaptation**, de **métastabilité**
- ▷ $h(x)$: résume la dépendance en la **condition initiale** vis-à-vis de la survie du processus (*comme fonction*)
- ▷ $\alpha(dx)$: résume la dépendance en l'**état final** du processus

Etat typique sous conditionnement à la survie (*comme mesure de probabilité*)

$$\left\| e^{\lambda t} \cdot \int_{\mathbb{X}} \mathbb{P}_y(X(t) \in dx; t < \tau_{\partial}) \mu(dy) - \left(\int_{\mathbb{X}} h(y) \mu(dy) \right) \cdot \alpha(dx) \right\|_{TV} \leq C \cdot e^{-\gamma \cdot t},$$



Métastabilité et régimes d'excitation entre neurones?

- ▶ Etape 1: N neurones identiques bien connectés
 - ▶ Caractérisation plus fine du **régime métastable**?
 - ▶ Quantification de la métastabilité à N fixé?
 - ▶ Caractérisation de la **sortie** vers l'état de repos?
- ▷ Singularité de la zone de repos du système

Point de départ:

travail d'Eva Löcherbach (SAMM, Paris) et Pierre Monmarché (LJLL, Paris) ^a

Analyse basée sur le temps de dernière décharge (globale)

chaque neurone représenté par son potentiel électrique,
en limite de grande nombre de neurones.

^aLöcherbach et Monmarché. "Metastability for systems of interacting neurons."
Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 58:1 (2022) 343 - 378.

Dynamique du **potentiel** $(X_i^{(N)}(t))_{t \geq 0}$ d'un **neurone** i spécifique:

$$\begin{aligned} X_i^{(N)}(t) = & X_i^{(N)}(0) - \int_0^t \alpha \cdot X_i^{(N)}(s) ds \\ & + \iint_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} [-X_i^{(N)}(s-)] \cdot 1_{\{v \leq \lambda(X_i^{(N)}(s-))\}} \pi_i(ds, dv) \\ & + \sum_{j \neq i} \iint_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} \omega_{ij}^{(N)} \cdot 1_{\{v \leq \lambda(X_j^{(N)}(s-))\}} \pi_j(ds, dv). \end{aligned}$$

- ▶ Événements de **décharge** décrits par les mesures de Poisson (π_i) spécifiques de chaque neurone (i.i.d.)
- ▶ $(\lambda(x))_{x \in \mathbb{R}_+}$: **taux de décharge**, selon le potentiel x
- ▶ α : **taux de décroissance**
- ▶ graphe aléatoire d'**interaction**: $(\omega_{ij}^{(N)})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$
composante additive sur le potentiel

Etape 1: Associer les estimées de **grandes déviations**
aux critères de convergence quasi-stationnaire

Propagation du chaos

Equation de McKean-Vlasov pour un neurone typique:

$$\begin{aligned}\bar{X}(t) = & \bar{X}(0) - \int_0^t \alpha \cdot \bar{X}(s) ds \\ & + \iint_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} [-\bar{X}(s-)] \cdot 1_{\{v \leq \lambda(\bar{X}(s-))\}} \pi(ds, dv) \\ & + \int_0^t \omega \cdot \mathbb{E}[\lambda(\bar{X}(s))] ds,\end{aligned}$$

Étape 2:

- ▶ Rôle de l'**hétérogénéité** des connexions neuronales
- ▶ Ouverture: excitation/inhibition, plasticité, signaux multiples

Equation de McKean-Vlasov pour un neurone typique spécifié par son type y

Nouvel objet d'étude:

$$\begin{aligned}\bar{X}_y(t) = & \bar{X}_y(0) - \int_0^t \alpha \cdot \bar{X}_y(s) ds \\ & + \iint_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} [-\bar{X}_y(s-)] \cdot 1_{\{v \leq \lambda(\bar{X}_y(s-))\}} \pi(ds, dv) \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{Y}} \omega(y, z) \cdot \mathbb{E}[\lambda(\bar{X}_z(s))] \nu(dz) ds,\end{aligned}$$

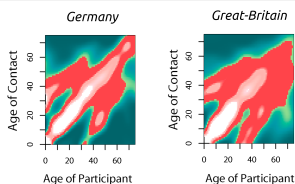
Noyau d'interaction entre types: $(\omega(y, z))_{y, z \in \mathbb{Y}^2}$

Parallèle avec l'épidémiologie

Noyau d'interaction: structure de contacts?

$\omega(y, z)$: fréquence de contacts infectieux

entre les deux types y et z d'individus en contact



Noyau d'interaction selon l'âge,
pour l'Allemagne et l'Angleterre:

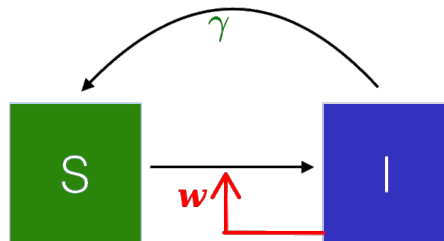
issu de données de sondages

Mossong et al, 2008, PLoS Medicine

$$X_i^{(N)}(t) = (Y_i^{(N)}, E_i^{(N)}(t)),$$

$Y_i^{(N)} \in \mathbb{Y}$: covariable de type

$E_i^{(N)}(t) \in \{S, I\}$: statut infectieux



*hétérogénéité individuelle?
variables structurantes?*

Convergence du processus stochastique individu-centré

- ▶ Graphe aléatoire au départ (contacts entre individus)
- ▶ Limite de grande population:

$$\sum_{i \leq N} 1_{\{E_i^{(N)}(t)=l\}} \delta_{Y_i^{(N)}}(dy) \rightarrow u(t, y) \nu(dy)$$

Structuration par **types** d'individus (âge...) de la propagation épidémique:

$$\partial_t u(t, y) = (1 - u(t, y)) \cdot \int_{\mathbb{Y}} \nu(dz) u(t, z) \omega(y, z) - \gamma(y) u(t, y).$$

- ▷ $u(t, y)$: **probabilité** pour un individu de type y d'être dans l'**état** l au temps t
- ▷ $(\omega(y, z))_{y, z \in \mathbb{Y}^2}$: noyau d'interaction entre types

Validité très générale: *[Valleret, Delmas et al, ALEA, in press](#)*

- ▶ classes du noyau d'interaction
- ▶ niveau de densité du graphe aléatoire

Infectivité variable?

Variables structurantes: durée depuis l'infection, hétérogénéité individuelle
avec Etienne Pardoux et Guodong Pang (projet en cours)

Description de l'état de l'individu i au temps t :

$$X_i^{(N)}(t) = (Y_i^{(N)}, E_i^{(N)}(t), A_i^{(N)}(t)), \quad Y_i^{(N)} \in \mathbb{Y}, E_i^{(N)}(t) \in \{S, I\}, A_i^{(N)}(t) \in \mathbb{R}_+$$

- ▶ $Y_i^{(N)}$: type de l'individu i (âge, profession...)
- ▶ $A_i^{(N)}(t)$: durée depuis le dernier événement d'infection,
 $A_i^{(N)}(t) = 0$ si $E_i^{(N)}(t) = S$

Dynamique d'état

- ▶ Vieillissement sur l'âge d'infection
- ▶ Deux transitions possibles:
 - ▶ de $(S, 0)$ vers $(I, 0)$ au taux $\mathfrak{F}_i^{(N)}(t)$:
contact avec un autre individu infecté
 - ▶ de (I, a) vers $(S, 0)$ au taux $\theta_i(a)$: rémission spontanée

$$\sum_{i \leq N} 1_{\{E_i^{(N)}(t)=I\}} \delta_{Y_i^{(N)}}(dy) \delta_{A_i^{(N)}(t)}(da) \rightarrow u(t, y, a) \nu(dy) da ?$$

Description du système limite avec infectivité variable

$$\begin{cases} \partial_t u(t, y, a) + \partial_a u(t, y, a) = -\theta(y, a) \cdot u(t, y, a), \\ u(t, y, 0) = \left(1 - \int_0^\infty u(t, y, a) da\right) \cdot \mathfrak{F}(t, y) \\ \mathfrak{F}(t, y) = \int_{\mathbb{Y}} \int_0^\infty \omega(y, y') \cdot \bar{\lambda}(y', a') \cdot u(t, y', a') da' \nu(dy'), \end{cases}$$

- ▶ $\nu(dy)$: Distribution des types dans la population,
- ▶ $\theta(y, a)$: Taux de rémission, à l'âge a pour un type y (\sim hazard rate),
- ▶ $\bar{\lambda}(y, a)$: Infectivité moyenne,
- ▶ $\mathfrak{F}(t, y)$: Force d'infection, agissant au temps t sur un individu de type y ,
- ▶ $\omega(y, y')$: Noyau d'interaction, d'un individu de type y' sur un de type y .

Sommaire

Modèles et objectifs

Métastabilité, quasi-stationnarité et adaptation

Métastabilité de réseaux de neurones

Noyaux d'interaction pour des systèmes neuronaux

Noyaux d'interaction en épidémiologie

Justification de la quasi-stationnarité

Notions préalables d'ergodicité

Critères de convergence

Critères à vérifier pour la quasi-stationnarité?

- ▶ (A1) **Mélange**, par minoration locale du semi-groupe via une mesure de référence ζ (à la Doeblin)
- ▶ (A2) **Échappée des transitoires** (\sim Lyapunov), éloignement du bord (par répulsion ou contre-absorption), à comparer à une estimée de survie
- ▶ (A3) **Comparaison asymptotique de survie**,
 estimée en temps long $\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{X}} \frac{\mathbb{P}_x(t < \tau_{\partial})}{\mathbb{P}_{\zeta}(t < \tau_{\partial})} < \infty$.
- ▶ (A3_H) **Moisson presque parfaite**,
 pour se ramener à un contrôle d'événements sur une période de temps finie.

- Velleret, *Unique Quasi-Stationary Distribution, with a possibly stabilizing extinction*, Stoch. Proc. Appl. 2022
- Velleret, *Exponential quasi-ergodicity for processes with discontinuous trajectories*, ESAIM: PS 2023

La propriété de mélange est typique de convergence en variation totale:

Distance de variation totale

3 définitions équivalentes

entre μ et ν distributions de probabilité sur \mathbb{X}

- ▶ Via les **sous-ensembles** mesurables de \mathbb{X} :

$$\|\mu - \nu\|_{TV} := \sup_{A \subset \mathbb{X}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

- ▶ Via les **fonctions bornées** sur \mathbb{X} :

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = (1/2) \cdot \sup\{\langle \mu - \nu \mid f \rangle; \|f\|_{\infty} \leq 1\}.$$

avec $\langle \mu \mid f \rangle = \int_{\mathbb{X}} f(x) \mu(dx)$

- ▶ Via un **couplage** $\gamma(dx, dy)$ entre $\mu(dx)$ et $\nu(dy)$:

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = (1/2) \cdot \inf\{\mathbb{P}_{(X,Y) \sim \gamma}(X \neq Y)\}.$$

L'approche en variation totale compare les *densités*,
par rapport à une mesure de référence commune.
Pas forcément le plus naturel vis-à-vis du système de neurones...

Alternative: calculer un **coût de transport**
d'une distribution à l'autre :

Distance de Wasserstein

Généralement définie avec des couplages γ entre μ et ν :

$$W_p(\mu, \nu) := \inf\{\mathbb{E}_{(X,Y) \sim \gamma}[d(X, Y)^p]\}.$$

Approche inhabituelle pour la quasi-stationnarité,
en raison de nombreuses complications...

Pour autant, objet de travaux récents,
notamment preprint par Villemonais, Champagnat, Strickler

Distance exploitée dans l'étude de Löcherbach et Monmarché!

Cadre conservatif: Irréductibilité, atomes

- Le processus est ψ -**irréductible** si la propriété suivante est vérifiée pour tout sous-ensemble mesurable A de \mathbb{X} tel que $\psi(A) > 0$:

$$\mathbb{P}_x(\tau_A < \infty) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

où τ_A est le temps d'atteinte de A .

ψ peut alors être choisie avec une condition de maximalité.

- Un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{X}$ est appelé un **atome** s'il existe une mesure ζ sur \mathbb{X} telle que:

$$P^1(x, dy) = \zeta(dy), \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Si le processus est ψ irréductible et $\psi(\mathcal{A}) > 0$, alors \mathcal{A} est appelé un **atome accessible**.

- **Apériodicité**: pas de décomposition selon une temporalité cyclique des états accédés depuis l'atome accessible.

Ensembles "small" et petits¹

- Un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{X}$ est appelé **small** s'il existe $c \in (0, 1]$, $m \geq 1$ et ζ une mesure de probabilité sur \mathbb{X} tels que

$$P^m(x, dy) \geq c \cdot \zeta(dy), \forall x \in \mathcal{A}.$$

- Un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{X}$ est appelé **petit** s'il existe $c \in (0, 1]$, $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une densité de probabilité et ζ une mesure de probabilité sur \mathbb{X} tels que:

$$\sum_{m \geq 1} a_m P^m(x, dy) \geq c \cdot \zeta(dy), \forall x \in \mathcal{A}.$$

Propriétés des ensembles small

Si P est irréductible, il existe une famille \mathcal{D}_ℓ d'ensembles small tels que $\mathbb{X} = \bigcup_\ell \mathcal{D}_\ell$.

Si P est irréductible et apériodique, alors tout ensemble petit est small.

¹S.P. Meyn, R. L. Tweedie. Markov Chains and Stochastic Stability, 2009

Contraction de **Lyapunov**, pour une fonction V sur \mathbb{X}

plusieurs extensions de la propriété déterministe

sur la décroissance de $V(X_t)$

(notamment en termes du *semi-groupe*

ou du générateur du processus)

⇒ estimations quantitatives sur le **temps d'atteinte** τ_C
d'un **ensemble petit** C .

D'intérêt notable, les **moments exponentiels** de τ_C :

$$V : x \mapsto \mathbb{E}_x(\exp[\rho\tau_C]).$$

Un taux de décroissance exponentiel inconnu

est typique de la quasi-stationnarité!

Semi-groupe (P_t) lié au processus (X_t) :

$$\langle \mu P_t \mid f \rangle = \mathbb{E}_\mu[f(X_t); t < \tau_\partial].$$

- ▶ $(X_t)_{t \geq 0}$: Processus de Markov fort avec extinction
pas nécessairement symétrique
- ▶ $t \geq 0$: Plutôt en temps continu
(bien que l'extension au temps discret soit directe)
- ▶ ∂ : état **absorbant**
- ▶ $\tau_\partial := \inf\{t > 0, X_t = \partial\}$: temps d'extinction

(A0₅) Décomposition de l'espace d'état

$(\mathcal{D}_n)_{n \geq 1}$: séquence de fermés emboîtés dans \mathbb{X} ,
i.e. : $\forall n, \mathcal{D}_n \subset \text{int}(\mathcal{D}_{n+1})$.

\Rightarrow proximité des bords et de l'infini

(A1) Mélange

A ajuster: ζ mesure de probabilité de référence sur \mathbb{X} .

Pour tout $n \geq 1$, il existe $m > n$, et $t, c > 0$ tels que:

$$\mathbb{P}_x(X_t \in dy; t < \tau_{\partial}, \forall s \leq t, X_s \in \mathcal{D}_m) \geq c \zeta(dy).$$

pour toute condition initiale $x \in \mathcal{D}_n$.

(A2) Echappée d'un domaine transitoire

A ajuster: $\rho > \rho_S[\zeta]$ et $E \subset \mathbb{X}$ (avec $E \subset \mathcal{D}_\ell$ pour $\ell \geq 1$).

$$\sup_{\{x \in \mathbb{X}\}} \mathbb{E}_x(\exp[\rho(\tau_E \wedge \tau_{\partial})]) < \infty,$$

avec $\tau_E := \inf\{t \geq 0; X_t \in E\}$, le temps d'atteinte de E , et

$$\rho_S[\zeta] := \sup \left\{ \rho \geq 0; \sup_{L \geq 1} \liminf_{t > 0} e^{\rho t} \mathbb{P}_{\zeta}(t < \tau_{\partial} \wedge T_{\mathcal{D}_L}) = 0 \right\} \vee 0.$$

$\rho_S[\zeta]$ correspond à une estimation du taux de survie

Nous visons l'implication suivante pour tout $t > 0$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{X})$:

$$\frac{\mu P_t(dx)}{\mathbb{P}_\mu(t < \tau_\partial)} \geq c \cdot \zeta(dx)$$

$$\Rightarrow \forall s > 0, \frac{\mu P_{t+s}(dx)}{\mathbb{P}_\mu(t+s < \tau_\partial)} \geq c \cdot c_* \cdot \frac{\zeta P_s(dx)}{\mathbb{P}_\zeta(s < \tau_\partial)}.$$

Non-dégénérescence à justifier :

la contribution de l'étape de couplage

doit être non négligeable à long terme.

A3: Comparaison asymptotique de survie

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{X}} \frac{\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_\zeta(t < \tau_\partial)} < \infty.$$

$(A3_H)$: Moisson presque parfaite

A ajuster: ζ , E , et $\rho > \rho_S[\zeta]$.

Pour tout $\epsilon \in (0, 1)$, il existe $t, c > 0$

avec la propriété suivante pour tout $x \in E$.

Il existe deux temps d'arrêt U_H et V tels que:

$$\mathbb{P}_x(X(U_H) \in dx'; U_H < \tau_\partial) \leq c \mathbb{P}_\zeta(X(V) \in dx'; V < \tau_\partial),$$

$$\{U_H > \tau_\partial \wedge t_F\} = \{U_H = \infty\},$$

$$\mathbb{P}_x(U_H = \infty, t_F < \tau_\partial) \leq \epsilon \exp(-\rho t_F).$$

+ des conditions de régularité (sur U_H)

automatiques si Ω est trajectectoriel (propriété de Markov)

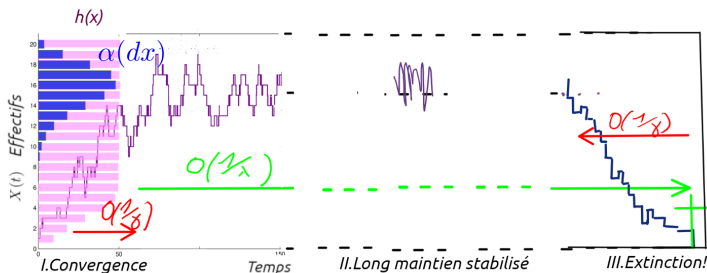
Moisson: la première estimée entre densités

Caractéristiques du régime quasi-stationnaire

- ▷ $\lambda > 0$: le **taux d'extinction**
- ▷ $\gamma > 0$: **quantification** délicate, en partie éclaircie par les preuves théoriques à comparer à λ : critère d'**adaptation**, de **métastabilité**
- ▷ $h(x)$: résume la dépendance en la **condition initiale** vis-à-vis de la survie du processus (*comme fonction*)
- ▷ $\alpha(dx)$: résume la dépendance en l'**état final** du processus

Etat typique sous conditionnement à la survie (*comme mesure de probabilité*)

$$\left\| e^{\lambda t} \cdot \int_{\mathbb{X}} \mathbb{P}_y(X(t) \in dx; t < \tau_{\partial}) \mu(dy) - \left(\int_{\mathbb{X}} h(y) \mu(dy) \right) \cdot \alpha(dx) \right\|_{TV} \leq C \cdot e^{-\gamma \cdot t},$$



Métastabilité et régimes d'excitation entre neurones?

- ▶ Etape 1: N neurones identiques bien connectés
 - ▶ Caractérisation plus fine du **régime métastable**?
 - ▶ Quantification de la métastabilité à N fixé?
 - ▶ Caractérisation de la **sortie** vers l'état de repos?
 - ▷ Singularité de la zone de repos du système
- ▶ Etape 2: Vers un noyau d'interaction entre les neurones
 - ▶ Rôle de l'**hétérogénéité** des connexions neuronales
 - ▶ Ouverture: excitation/inhibition, plasticité, signaux multiples

Dynamique du **potentiel** $(X_i^{(N)}(t))_{t \geq 0}$ d'un **neurone** i spécifique:

$$\begin{aligned} X_i^{(N)}(t) = & X_i^{(N)}(0) - \int_0^t \alpha \cdot X_i^{(N)}(s) ds \\ & + \iint_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} [-X_i^{(N)}(s-)] \cdot 1_{\{v \leq \lambda(X_i^{(N)}(s-))\}} \pi_i(ds, dv) \\ & + \sum_{j \neq i} \iint_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} \omega_{i,j}^{(N)} \cdot 1_{\{v \leq \lambda(X_j^{(N)}(s-))\}} \pi_j(ds, dv). \end{aligned}$$

- ▶ Événements de **décharge** décrits par les mesures de Poisson (π_i) spécifiques de chaque neurone (i.i.d.)
- ▶ $(\lambda(x))_{x \in \mathbb{R}_+}$: **taux de décharge**, selon le potentiel x
- ▶ α : **taux de décroissance**
- ▶ graphe aléatoire d'**interaction**: $(\omega_{i,j}^{(N)})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$
composante additive sur le potentiel