



# Dynamique d'infection de ville à ville sous l'effet de politiques de confinements locaux

Aurélien Velleret

LAMA, Université Gustave Eiffel, Champs-sur-Marne

[aurelien.velleret@nsup.org](mailto:aurelien.velleret@nsup.org)

LPSM, 29 novembre 2022



# Sommaire

## Le modèle

- Motivation

- Le type d'interaction

- Le graphe des villes

- Les taux de transmission

- La stratégie de confinement

## Analyse théorique

- Branchement à deux composantes

- Comparaison de stratégies

- Comparaison des seuils de régulation

## Résultats des simulations

- Probabilité d'infection

- Pertinence de  $R_0$  ?

- Un régime linéaire ?



# Sommaire

## Le modèle

Motivation

Le type d'interaction

Le graphe des villes

Les taux de transmission

La stratégie de confinement

## Analyse théorique

Branchement à deux composantes

Comparaison de stratégies

Comparaison des seuils de régulation

## Résultats des simulations

Probabilité d'infection

Pertinence de  $R_0$  ?

Un régime linéaire ?



## Motivations 1/3

Zone unifiée incluant de nombreuses villes, avec une stratégie de confinement commune.

Valider l'efficacité ?

- blocage précoce
- ralentissement (hôpitaux engorgés)
- éradication ?



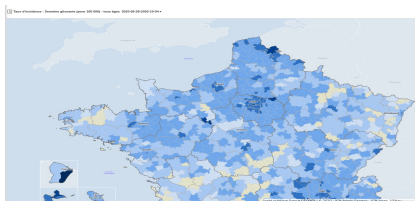
## Motivations 2/3

Observation de la dynamique de propagation spatiale :

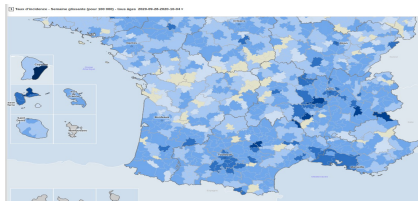
`http:`

`//barthes.enssib.fr/coronavirus/cartes/RFrance/`

Les grandes aires urbaines comme noyaux de transmission et une dispersion limitée alentour.



Septembre 2020, Nord



Septembre 2020, Sud



## Motivations 3/3

- **Villes** comme centres de transmissions -> les **noeuds** du réseau
- Distribution à queue lourde des tailles de villes  
loi de **puissance**
- Biais des transmission selon la taille des villes
- Quelle référence pour les restrictions de confinement ?  
**Uniforme** (“variante  $U$ ”) vs **Proportionnelle** (“variante  $P$ ”)

# Dynamique d'infection de ville à ville sous l'effet de politiques de confinements locaux

travail commun en cours avec :



Viktor  
Bezborodov



Tyll  
Krueger



Cornelia  
Pokalyuk



Piotr  
Szymanski



## Les types de transmission

2 types de transmission entre les villes :

- Un citoyen infecté de la ville  $X$  génère une nouvelle infection alors qu'il/elle **visite la ville  $Y$** .  
On dit que  $Y$  est infectée **de l'intérieur**.
- Un citoyen de la ville  $Y$  est infecté alors qu'il/elle **visite la ville infectée  $X$**  et revient en propageant la maladie dans la ville  $Y$ .  
On dit que  $Y$  est infectée **de l'extérieur**.





## Les taux d'interactions

Noyau d'interactions simplifié, non spatialement explicite.  
Fonction des tailles de ville  $x$  et  $y$   
(de resp.  $X$  et  $Y$ ) comme suit :

$$k(x, y) := k_0 x^{1+b} y^a + k_0 x^a y^{1+b},$$

- $a$  biais vers la visite de grandes villes  
(neutre est  $a = 1$  mais  $a > 1$  attendu)
- $b$  biais vers plus de voyages  
depuis les grandes villes  
(neutre  $b = 0$ , incertain si  $b > 0$  ou  $b < 0$  est plus valide)



## Le graphe des villes

Distribution de la taille des villes :  $\beta$ .

- avec les 35 000 communes françaises, regroupées en Aires d'Attraction (INSEE)
- avec les 350 Powiats polonais
- avec les données japonaises (travail en cours à confirmer)
- avec des lois de Pareto :

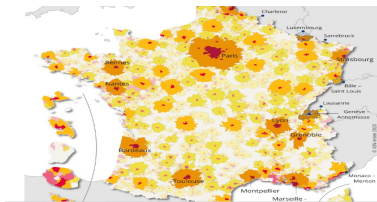
$$\beta(dx) := \frac{1_{\{x > x_L\}}}{Z} x^{-\phi} dx, \text{ avec } x_L > 0 \text{ et } \phi > 1.$$

$\phi > 2$  signifie premier moment fini,  $\phi > 3$  signifie variance finie.

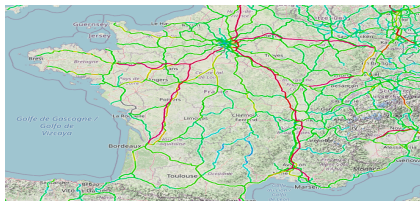


## Le graphe des villes

Aires d'Attraction des villes françaises :



Cartographie

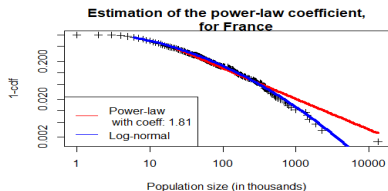


Réseaux de transports inclus  
implicitement

Distribution de taille avec  $\phi \sim 1.8$   
sachant que l'aire parisienne se distingue

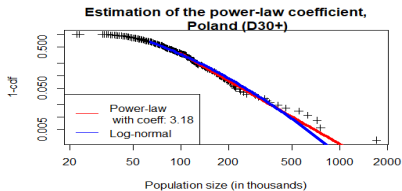


## Le graphe des villes



Distribution de taille des Aires  
d'Attractions de France,

$$\hat{\phi} \sim 1.8$$



et des Powiats polonais,

$$\hat{\phi} \sim 3.18$$

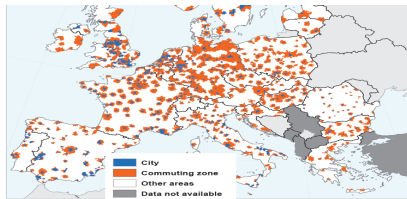


## Functional Urban Area

Construction analogue définie pour les différents pays de l'OCDE, en distinguant moins de zones néanmoins.



FUA en France



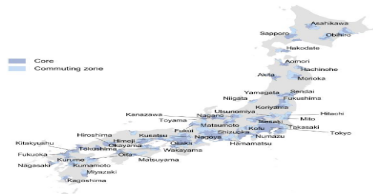
échelle européenne



# Functional Urban Area



Pologne

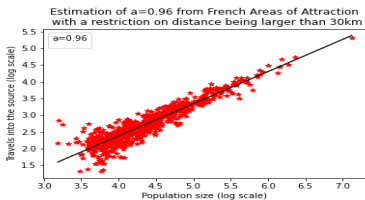


Japon

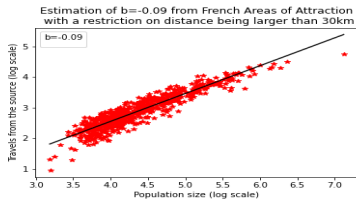


## Estimation du noyau via les marginales

Les **aires d'attraction** de villes **françaises** corroborent le modèle (mieux que les Communes) :



Estimation de  $a$



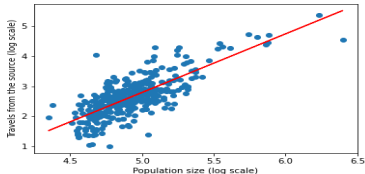
Estimation de  $b$

En plus, meilleure pertinence pour la **cohésion** et l'**applicabilité** des mesures de restriction.



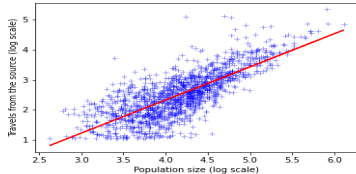
## Estimation via les marginales

Estimation of  $a=1.95$  from commuting between Polish powiets with a restriction on 30km distance



Pour la Pologne

Estimation of  $a=1.11$  from commuting between Japanese units with a restriction on 31km distance,  $R^2 = 0.77$



Pour le Japon

Pas aussi bon pour les Powiets polonais ou les unités japonaises, sans que cela soit choquant.





## Les taux de transmission

Réglementation efficace : juste quelques infections vers l'extérieur

Au moment d'infection : simple élimination des connexions vers la ville infectée

Supposons :  $I_X$  personnes infectées

(dans la ville  $X$  au moment de son confinement)

- Probabilité que la ville  $Y$  soit infectée de l'intérieur par un citoyen de  $X$  :  
-> Proportionnelle à  $I_X \cdot x^b \cdot y^a$ .
- Probabilité que la ville  $Y$  soit infectée de l'extérieur par un citoyen de  $X$  :  
-> proportionnelle à  $(I_X/x) \cdot x^a \cdot y^{1+b}$ .



## La stratégie de confinement

Pour simplifier, confinement complet supposé.

→ Plus aucune transmission par la suite (état  $R$ ).

A l'échelle de la ville infectée :

- Variante " $P$ " pour **Proportionnel** :  
seuil fixé en termes de **taux d'incidence**  
->  $I_X \sim p_0 \cdot x$ ,  $p_0$  à ajuster
- Variante " $U$ " pour **Uniforme** (cf. zéro-covid) :  
seuil fixé en **valeurs absolues**  
->  $I_X \sim L_0$ , indépendant de la ville infectée  $X$ .



## Comparaison des stratégies de confinement

Quelle relation entre  $p_0$  et  $L_0$  ?

- $R_0$  identique : problème de robustesse
- sinon, quel autre indicateur épidémiologique ?
- coïncident en moyenne lors du choix d'une ville au hasard ?

$$L_0 := \int_{\mathbb{R}_+} p_0 x \beta(dx).$$

- coïncident en moyenne lors du choix d'un individu au hasard ?

$$L_0 := \frac{\int_{\mathbb{R}_+} p_0 x^2 \beta(dx)}{\int_{\mathbb{R}_+} x \beta(dx)}.$$



# Sommaire

## Le modèle

Motivation

Le type d'interaction

Le graphe des villes

Les taux de transmission

La stratégie de confinement

## Analyse théorique

Branchement à deux composantes

Comparaison de stratégies

Comparaison des seuils de régulation

## Résultats des simulations

Probabilité d'infection

Pertinence de  $R_0$  ?

Un régime linéaire ?



## Approximation par un processus de branchement

Taille des villes infectées secondairement après  $X$  :

$$M_A^{(X)}(dy) + M_B^{(X)}(dy)$$

Mesures aléatoires de Poisson avec mesure d'intensité

resp.  $K_A^{(X)} \cdot \nu_A(dy)$ . et  $K_B^{(X)} \cdot \nu_B(dy)$  où

$$K_A^{(X)} := k_I I_X x^b \mathcal{Z}_a, \quad K_B^{(X)} := k_I (I_X/x) \cdot x^a \mathcal{Z}_{1+b},$$

$$\nu_A(dy) := y^a \beta(dy) / \mathcal{Z}_a, \quad \nu_B(dy) := y^{1+b} \beta(dy) / \mathcal{Z}_{1+b},$$

$$\mathcal{Z}_u := \int_{\mathbb{R}_+} y^u \beta(dy).$$



## Une réduction à deux types

Projection sur un sous-espace bidimensionnel :

- $\nu_A, \nu_B$  distributions de la taille des villes infectées respectivement de l'intérieur et de l'extérieur
- $K_A^{(X)}, K_B^{(X)}$  nombre moyen de villes infectées respectivement de l'intérieur et de l'extérieur par  $X$ .
- $2 \times 2$ -matrice  $W$  avec des entrées :

$$W_{AA} = \int \nu_A(dx) K_A^x, \quad W_{AB} = \int \nu_A(dx) K_B^x,$$

$$W_{BA} = \int \nu_B(dx) K_A^x, \quad W_{BB} = \int \nu_B(dx) K_B^x.$$



## Comparaison des stratégies

Lorsque l'épidémie ne s'éteint pas directement :

- Nombre moyen de personnes infectées à un certain temps

$$I_U = \int_{\mathbb{R}_+} L_0 \cdot \pi_U(x) \beta(dx), \quad I_P = \int_{\mathbb{R}_+} p_0 x \cdot \pi_P(x) \beta(dx).$$

- Nombre moyen d'individus mis en quarantaine :

$$Q_U = \int_{\mathbb{R}_+} x \cdot \pi_U(x) \beta(dx), \quad Q_P = \int_{\mathbb{R}_+} x \cdot \pi_P(x) \beta(dx).$$

On calibre  $L_0$  et  $p_0$  avec  $I_U = I_P = I_*$ .

Avec quelle stratégie a-t-on eu besoin du moins de personnes isolées ?



## Comparaison des stratégies

### Isolement vs infectés

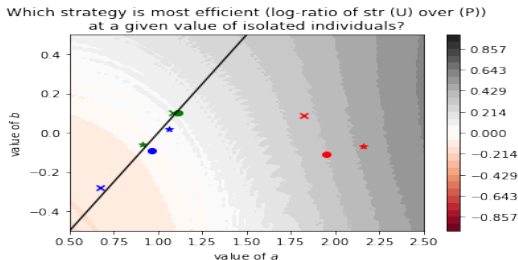
Soit  $\beta$  une mesure de probabilité (non-Dirac),  
 $a, k_I, I_\star > 0$  sont donnés et supposons que  $b = a - 1$ .

1. Si  $a < 1$ , alors  $Q_U > Q_P$ .
2. Si  $a = 1$ , alors  $Q_U = Q_P$ .
3. Si  $a > 1$ , alors  $Q_U < Q_P$ .





## Généralisation du résultat précédent



Variation de  $\log(I_U/I_P)$  selon  $a$  et  $b$



## Ajustement des deux stratégies selon le $R_0$

Pour  $u > 0$ , soit  $\mathcal{Z}_u := \int x^u \beta(dx)$ .

### Seuils vs $R_0$

Définissons  $\gamma := \max\{2a, 2 + 2b\}$  et  $\delta \leq \min\{2a - 1, 2b + 1\}$ .

Si  $\mathcal{Z}_\gamma < \infty$  :

$$(p_0/L_0) \cdot (R_0^{(U)}/R_0^{(P)}) \leq \mathcal{Z}_\delta/\mathcal{Z}_{\delta+1}.$$

Comparaison des seuils à  $R_0$  fixé :

- Si  $a \geq 1/2$ ,  $b \geq -1/2$ ,  $p_0 \leq L_0 \cdot \mathcal{Z}_1$ .
- Si  $a \geq 1$ ,  $b \geq 0$ ,  $p_0 \leq L_0 \cdot (\mathcal{Z}_2/\mathcal{Z}_1)$ .



# Sommaire

## Le modèle

Motivation

Le type d'interaction

Le graphe des villes

Les taux de transmission

La stratégie de confinement

## Analyse théorique

Branchement à deux composantes

Comparaison de stratégies

Comparaison des seuils de régulation

## Résultats des simulations

Probabilité d'infection

Pertinence de  $R_0$  ?

Un régime linéaire ?



## Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

$\rho(x)$  : probabilité qu'une ville de taille  $x$  soit infectée.

Formule du branchement :

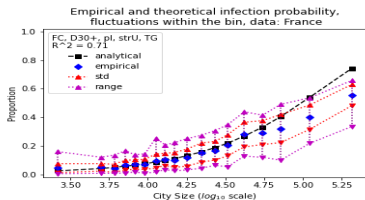
$$\rho_T = 1 - \exp(-\mathcal{T}\rho_T),$$

survie du processus en temps arrière

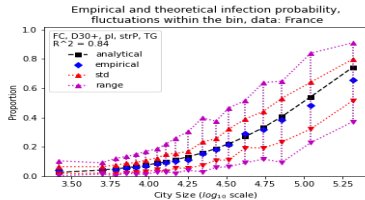


# Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

Prédictions cohérentes, même pour les données françaises très hétérogènes :



Stratégie *U*



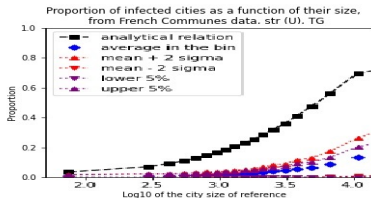
Stratégie *P*

Via les données d'aires d'attraction,  $a = 0.96$ ,  $b = -0.09$ ,  
678 villes considérées, ajustement via  $\rho_{\mathcal{T}}(x_0) = 0.5$

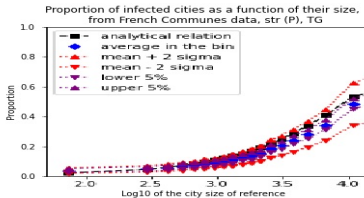


# Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

Enjeu du bon jeu de donnée



Stratégie  $U$



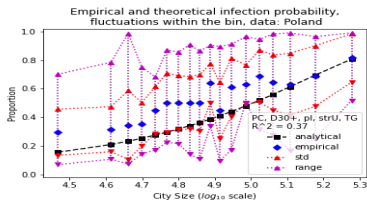
Stratégie  $P$

Via les données des Communes Françaises, restriction à 50km,  
 $a = 0.83$ ,  $b = -0.27$ ,  
 11.845 villes considérées

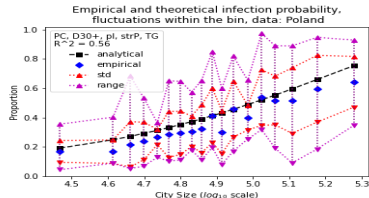


# Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

Pour les données polonaises



Stratégie  $U$



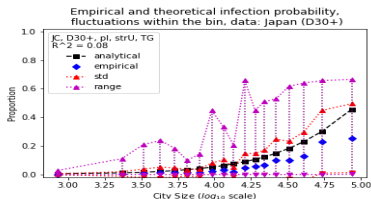
Stratégie  $P$

Par Powiat, restriction à 30km,  $a = 1.95$ ,  $b = -0.11$ ,  
341 unités, ajustement via  $\rho_{\mathcal{T}}(x_0) = 0.5$

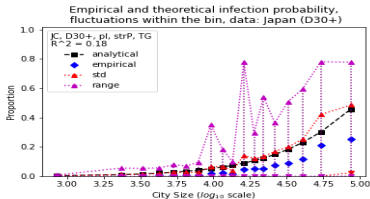


# Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

Pour les données japonaises



Stratégie  $U$



Stratégie  $P$

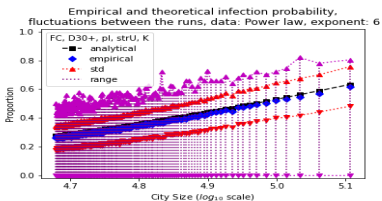
Par "municipalité", restriction à 30km,  $a = 1.11$ ,  $b = 0.10$ ,  
1600 unités



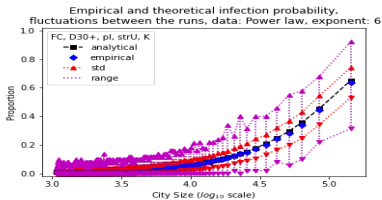


# Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

Sur des cas simulés, avec 10.000 villes.



Exposant 6



Exposant 2



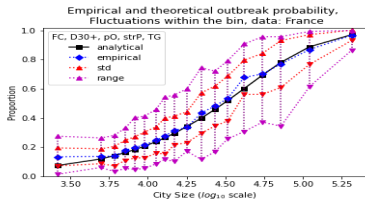
# Probabilité de générer une explosion en fonction de la taille de la ville

$\gamma(x)$  : probabilité qu'une ville de taille  $x$  soit infectée.

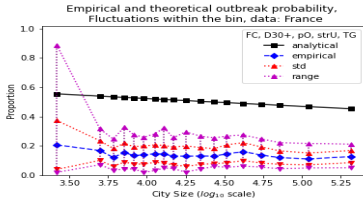
Formule du branchement :

$$\gamma_{\mathcal{T}} = 1 - \exp(-\mathcal{T}^* \gamma_{\mathcal{T}}),$$

survie du processus en temps progressif.



Stratégie  $P$



Stratégie  $U$



## Méthode de comparaison

Ici variante “ $U$ ”, plus régulière.

Modèle ajusté sur la probabilité d'une ville infectée

Ajustement de la **référence temporelle** entre les 200 exécutions :

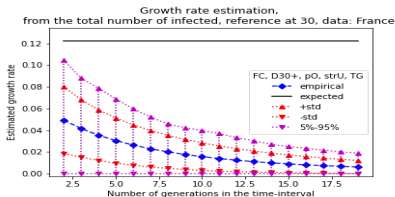
- seuil  $L$  sur le nombre d'infectés  
(début aléatoire de la nouvelle échelle de temps)
- nombre total d'infectés :  $L = 30$

Estimation du  $R_0$  avec **régression des moindres carrés**  
(en échelle log) sur intervalles de longueur variable

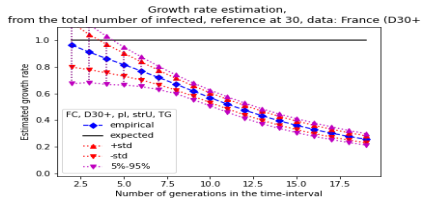


# Données réelles des Aires d'Attraction en France

$a = 0.96$ ,  $b = -0.09$ ,  $N_c \sim 650$ , exposant  $\hat{\phi} \sim 1.8$ .



via le nombre total d'infectés

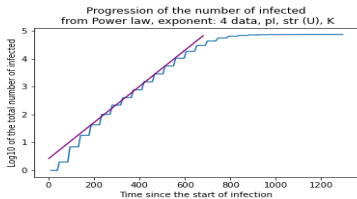


en dupliquant chaque ville dix fois

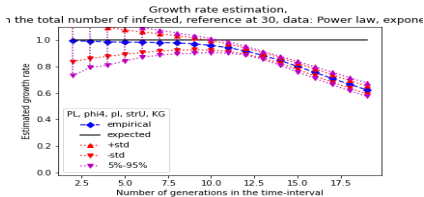


# Loi de puissance avec un exposant de 4

Présenté dans le cas  $a = 0.8$ ,  $b = 0.2$ ,  $N_c = 100,000$ .



ajustement à une croissance exponentielle



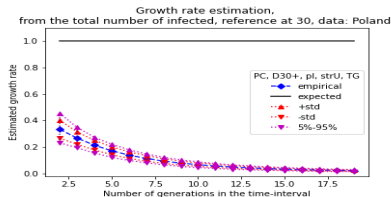
Estimation de  $R_0$

Référence pour une situation plutôt régulière.

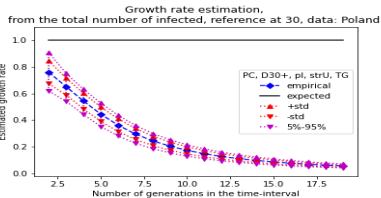


# Données réelles des Powiats polonais

$a = 1.95$ ,  $b = -0.11$ ,  $N_c \sim 350$ , exposant  $\hat{\phi} \sim 3.2$ .



via le nombre total d'infectés



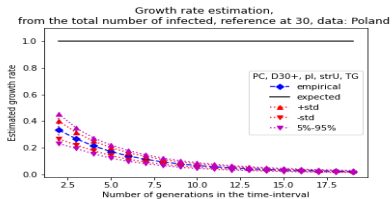
avec répliques des villes par

10

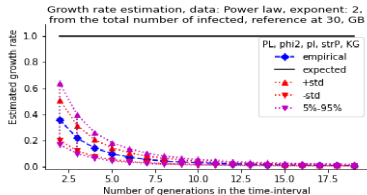


# Loi de puissance avec un exposant de 2

$$a = 1.2, b = -0.1$$



Stratégie  $U$

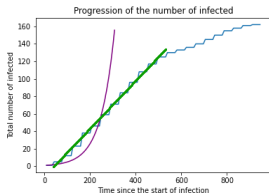


Stratégie  $P$

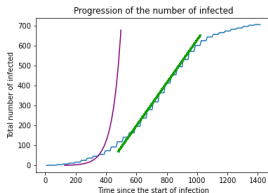


# Loi de puissance avec un exposant de 2.14

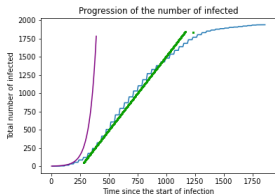
## Nombre variable $N_C$ de villes



$$N_C = 100,000$$



$$N_C = 350,000$$



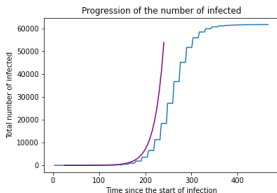
$$N_C = 1,000,000$$



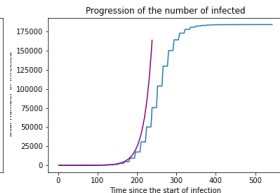


# Loi de puissance avec un exposant de 3

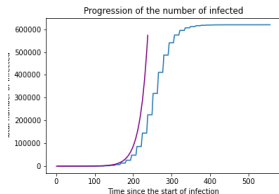
Nombre variable  $N_C$  de villes :



$$N_C = 100,000$$



$$N_C = 300,000$$



$$N_C = 1,000,000$$



# Conclusion

## Le modèle

- Motivation

- Le type d'interaction

- Le graphe des villes

- Les taux de transmission

- La stratégie de confinement

## Analyse théorique

- Branchement à deux composantes

- Comparaison de stratégies

- Comparaison des seuils de régulation

## Résultats des simulations

- Probabilité d'infection

- Pertinence de  $R_0$  ?

- Un régime linéaire ?



## Conclusion

- Très grande hétérogénéité des tailles de ville qui rend difficile le contrôle
- Des situations assez contrastées entre pays
- La stratégie uniforme n'est pas si favorable qu'initialement pensé
- Difficulté de comparaison entre stratégies adaptatives
- Enjeu de la bonne définition d'unité locale



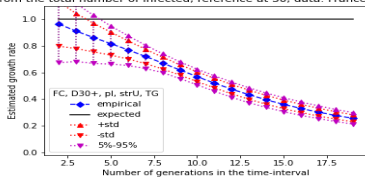
## A garder à l'esprit :

- Incertitude quant au nombre réel d'infectés au moment du confinement
- Transmissions locales d'une ville à ses voisines
- Hétérogénéité du taux de croissance entre différentes villes
- Fluctuations temporelles

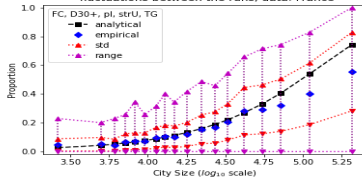


# Merci de votre attention !

Growth rate estimation.  
from the total number of infected, reference at 30, data: France (D30)






Empirical and theoretical infection probability.  
fluctuations between the runs, data: France







## References 1/2

-  Bollobas, B., Janson, S., Riordan, O. ; The phase transition in inhomogeneous random graphs ; *Random Structures & Algorithms*, V.31, N.1, pp.3–122 (2007)
-  Junyu Cao and Mariana Olvera-Cravioto ; Connectivity of a general class of inhomogeneous random digraphs. *Random Structures & Algorithms*, V.56, pp.722–774 (2020)
-  Kühn, M.J., Abele, D., Binder, S. et al. Regional opening strategies with commuter testing and containment of new SARS-CoV-2 variants in Germany. *BMC Infect Dis* 22, 333 (2022)



## References 2/2

-  Britton, T., Pardoux, E. ; Stochastic epidemic models with inference, Lectures notes in Mathematics 2555, Springer (2019)
-  Conti, B. ; Essai de caractérisation de la mobilité interurbaine en France : des pendulaires et pendularités hétérogènes, Flux, V.1, pp.14-32 (2019)