



# Dynamique d'infection de ville à ville sous l'effet de politiques de confinements locaux

Aurélien Velleret

LAMA, Université Gustave Eiffel, Champs-sur-Marne

[aurelien.velleret@nsup.org](mailto:aurelien.velleret@nsup.org)



# Sommaire

## Le modèle

- Motivation

- Le graphe des villes

- Les taux de transmission

- La stratégie de confinement

## Analyse théorique

- Réduction à une dynamique de branchement à deux composantes

- Comparaison entre taux de reproduction de base

## Premiers résultats des simulations

- Quelle est la pertinence de  $R_0$  ?

- Un régime linéaire ?

- Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

# Dynamique d'infection de ville à ville sous l'effet de politiques de confinements locaux

travail commun en cours  
avec Viktor Bezborodov, Tyll Krüger, Cornelia Pokalyuk et  
Piotr Szymanski



Viktor  
Bezborodov



Tyll  
Krueger



Cornelia  
Pokalyuk



Piotr  
Szymanski



# Outline

## Le modèle

- Motivation

- Le graphe des villes

- Les taux de transmission

- La stratégie de confinement

## Analyse théorique

- Réduction à une dynamique de branchement à deux composantes

- Comparaison entre taux de reproduction de base

## Premiers résultats des simulations

- Quelle est la pertinence de  $R_0$  ?

- Un régime linéaire ?

- Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

## Motivations 1/3

Analyse des stratégies de confinement local.

Nous avons en tête une zone unifiée avec de nombreuses villes  
et une stratégie de confinement commune.

Trois aspects principaux pour valider l'efficacité :

- phase précoce de propagation
- ralentissement pour éviter l'engorgement des hôpitaux
- éradication potentielle de la maladie ?  
en élargissant les villes pour lesquelles relâcher les restrictions



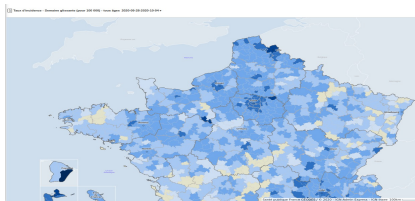
## Motivations 2/3

Observation de la dynamique de propagation spatiale :

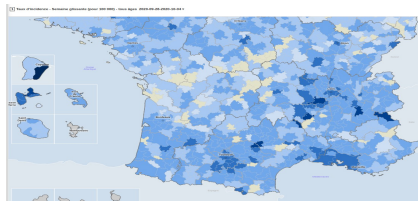
http:

[//barthes.enssib.fr/coronavirus/cartes/RFrance/](http://barthes.enssib.fr/coronavirus/cartes/RFrance/)

Les grandes aires urbaines comme noyaux de transmission et une dispersion limitée alentour.



Septembre 2020, Nord



Septembre 2020, Sud



## Motivations 3/3

- **Villes** comme centres de transmissions -> les **noeuds** du réseau
- Distribution à queue lourde des tailles de villes  
la queue suit une loi de **puissance**
- Taux de transmission biaisé dans sa relation avec la taille des villes
- Quelle référence pour les restrictions de confinement ?  
**Uniforme** ("variante  $U$ ") vs **Proportionnelle** ("variante  $P$ ")

## Le graphe des villes

Par souci de simplicité, le modèle n'est pas spatialement explicite.

Comme référence pour la distribution de la taille des villes,  $\beta$ .

- les données d'environ 35 000 communes françaises (INSEE)
- les données d'environ 4400 Gemeindeverbände allemands (GENESIS)
- des distributions de type puissance :

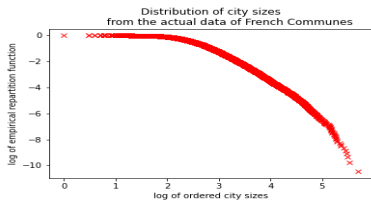
$$\beta(dx) := \frac{1_{\{x > x_L\}}}{Z} x^{-\phi} dx, \text{ pour certains } x_L > 0 \text{ et } \phi > 1.$$

$\phi > 2$  signifie premier moment fini,  $\phi > 3$  signifie variance finie.

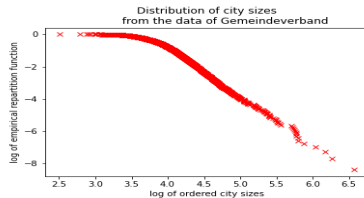




## Le graphe des villes



Distribution de taille des  
Communes de France,  
 $\hat{\phi} \sim 2.08$

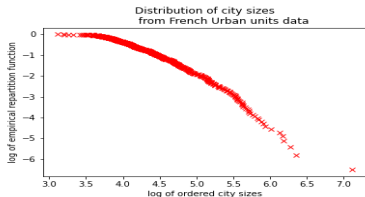


et des Gemeindeverbände  
allemands,  
 $\hat{\phi} \sim 2.14$



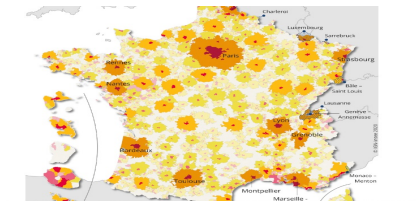
## Le graphe des villes

Aires d'Attraction des villes françaises :



Distribution de taille

$$\hat{\phi} \sim 1.59$$



Cartographie



# Functional Urban Area

Construction analogue définie pour les différents pays de l'OCDE, en distinguant moins de zones néanmoins.



FUA en France



échelle européenne



# Functional Urban Area



Allemagne



Pologne

## Les types de transmission

2 types de transmission entre les villes :

- Un citoyen infecté de la ville  $X$  génère une nouvelle infection  
alors qu'il/elle visite la ville  $Y$ .  
On dit que  $Y$  est infectée **de l'intérieur**.
- Un citoyen de la ville  $Y$  est infecté alors qu'il/elle visite la ville infectée  $X$  et revient en propageant la maladie dans la ville  $Y$ .  
On dit que  $Y$  est infectée **de l'extérieur**.

## Les taux d'interactions

Le noyau d'interactions entre villes est simplifié. Il dépend simplement de des tailles de ville  $x$  et  $y$  de respectivement  $X$  et  $Y$  comme suit :

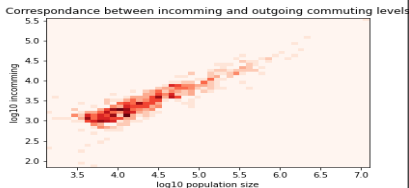
$$k(x, y) := k_0 x^{1+b} y^a + k_0 x^a y^{1+b}, \text{ pour certains } a, b \in \mathbb{R}.$$

- $a$  biais vers la visite de grandes villes  
(neutre est  $a = 1$  mais  $a > 1$  attendu)
- $b$  biais vers plus de voyages pour les citoyens des grandes villes  
(neutre  $b = 0$ , incertain si  $b > 0$  ou  $b < 0$  est plus valide)

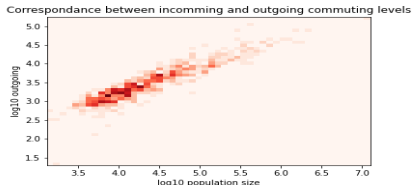


## Estimation via les marginales

En plus d'une meilleure pertinence en terme de cohésion et d'applicabilité des mesures de restriction, les aires d'attraction de villes françaises corroborent



Estimation de  $a$



Estimation de  $b$

Pas du tout aussi bon pour les Communes, les Gemeindeverbände, les Powiets polonais étant encore plus inadaptés à cette inférence !



## Les taux de transmission

Une réglementation efficace doit permettre de limiter empêcher les infections vers l'extérieur sur le principe qu'il n'y en aurait que quelques-unes.

Les liens avec une ville infectée sont simplement effacés.

Supposons qu'il y ait  $I_X$  personnes infectées dans la ville  $X$  au moment du confinement.

- Probabilité que la ville  $Y$  soit infectée **de l'intérieur** par un citoyen de  $X$  :  
 -> Proportionnelle à  $I_X \cdot x^b \cdot y^a$ .
- Probabilité que la ville  $Y$  soit infectée **de l'extérieur** par un citoyen de  $X$  :  
 -> proportionnelle à  $(I_X/x) \cdot x^a \cdot y^{1+b}$ .



## La stratégie de confinement

Pour simplifier, confinement complet supposé.

→ Plus aucune transmission par la suite (état  $R$ ).

Dans le cas d'une régulation à l'échelle d'une seule ville :

- Variante " $P$ " pour **Proportionnel**, la plus couramment exploitée :  
le seuil est fixé en termes de **incidence rate**  
→ pour un certain  $p$  à ajuster,  $I_X \sim p.x$ .
- Variante " $U$ " pour **Uniforme**, exploitée dans les stratégies zéro-covid :  
le seuil est fixé en **valeurs absolues**  
→  $I_X \sim K$  indépendant de la ville infectée  $X$ .

## Comparaison des stratégies de confinement

Quelle relation entre  $p$  et  $K$  ?

- coïncident en moyenne lors du choix aléatoire d'une ville, c'est-à-dire :

$$K := \int_{\mathbb{R}_+} p x \beta(dx).$$

- coïncident en moyenne lorsqu'on choisit un individu au hasard, c'est-à-dire :

$$K := \frac{\int_{\mathbb{R}_+} p x^2 \beta(dx)}{\int_{\mathbb{R}_+} x ; \beta(dx)}.$$

Les restrictions sont plutôt appliquées à ces échelles actuellement.

Des intervalles de durée peuvent être introduits (période d'exposition, période de confinement).



# Outline

## Le modèle

Motivation

Le graphe des villes

Les taux de transmission

La stratégie de confinement

## Analyse théorique

Réduction à une dynamique de branchement à deux composantes

Comparaison entre taux de reproduction de base

## Premiers résultats des simulations

Quelle est la pertinence de  $R_0$  ?

Un régime linéaire ?

Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville



## Approximation par un processus de branchement

Les villes infectées par le citoyen infectieux de la ville  $X$  ont une distribution de taille :  $M_A^{(X)}(dy) + M_B^{(X)}(dy)$ .

Mesures aléatoires de Poisson avec mesure d'intensité resp.  $K_A^{(X)} \cdot \nu_A(dy)$ . et  $K_B^{(X)} \cdot \nu_B(dy)$  où

$$K_A^{(X)} := k_I I_X x^b \int_{\mathbb{R}_+} y^a \beta(dy), \quad K_B^{(X)} := k_I (I_X/x) \cdot x^a \int_{\mathbb{R}_+} y^{1+b} \beta(dy)$$

$$\nu_A(dy) := \frac{y^a \beta(dy)}{\int_{\mathbb{R}_+} y_2^a \beta(dy_2)}, \quad \nu_B(dy) := \frac{y^{1+b} \beta(dy)}{\int_{\mathbb{R}_+} y_2^{1+b} \beta(dy_2)}.$$

## Une réduction à deux types du modèle d'infection

Le système est projeté dans un sous-espace bidimensionnel :

- $\nu_A, \nu_B$  distributions de la taille des villes infectées respectivement de l'intérieur et de l'extérieur
- $K_A^{(X)}, K_B^{(X)}$  nombre moyen de villes infectées respectivement de l'intérieur et de l'extérieur par  $X$ .
- $2 \times 2$ -matrice  $P$  avec des entrées :

$$\begin{aligned}
 P_{AA} &= \int \nu_A(dx) K_A^x, & P_{AB} &= \int \nu_A(dx) K_B^x, \\
 P_{BA} &= \int \nu_B(dx) K_A^x, & P_{BB} &= \int \nu_B(dx) K_B^x.
 \end{aligned}$$

## Comparaison des $R_0$

Pour  $u > 0$ , soit  $\mathcal{Z}_u := \int x^u \beta(dx)$ .

On considère la relation  $K = p \cdot \mathcal{Z}_1$ .

Pour montrer que  $R_0^{(U)} \leq R_0^{(P)}$  il suffit de montrer que  $\mathcal{Z}_1 r_1^A \leq r_1^B$ , où :

$$r_1^A = \mathcal{Z}_{a+b} + \sqrt{\mathcal{Z}_{2a-1} \mathcal{Z}_{2b+1}}, \quad r_1^B = \mathcal{Z}_{a+b+1} + \sqrt{\mathcal{Z}_{2a} \mathcal{Z}_{2b+2}}.$$

Ceci est généralement déduit de l'inégalité de Hölder

à condition que  $a + b \geq 1$ ,  $a \geq 1/2$  et  $b \geq -1/2$ .

D'après les résultats de nos simulations, l'inégalité semble valide bien plus généralement. (Pour  $a = 1$ ,  $b = 0$  sur données réelles, on obtient un facteur autour de 20 entre les deux  $R_0$ , donc une marge certaine.)



# Outline

## Le modèle

- Motivation

- Le graphe des villes

- Les taux de transmission

- La stratégie de confinement

## Analyse théorique

- Réduction à une dynamique de branchement à deux composantes

- Comparaison entre taux de reproduction de base

## Premiers résultats des simulations

- Quelle est la pertinence de  $R_0$  ?

- Un régime linéaire ?

- Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville



## Méthode de comparaison

Etudié essentiellement dans la variante “ $U$ ”, plus régulière.

Modèle ajusté pour avoir théoriquement  $R_0 = 2$ .

avec la distribution empirique (la même pour 200 passages).

**Référence** le temps est ajusté par un **décalage temporel** entre les 200 exécutions

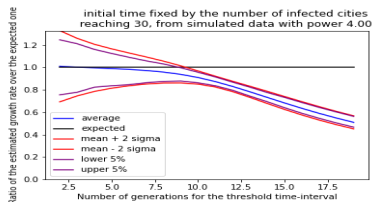
- début aléatoire de la nouvelle échelle de temps : initiée lorsque le nombre d'infectés atteint un seuil  $L$ .
- $L = 30$  pour le nombre total d'infectés
- $L = 15$  pour le nombre d'infectés dans une génération

Estimation du  $R_0$  présenté avec **régression des moindres carrés** sur des intervalles de longueur variable.

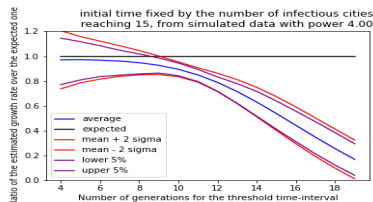


## Loi de puissance avec un exposant de 4

Présenté dans le cas  $a = 1.2$ ,  $b = 0.$ ,  $N_c = 30,000$ .



via le nombre total d'infectés



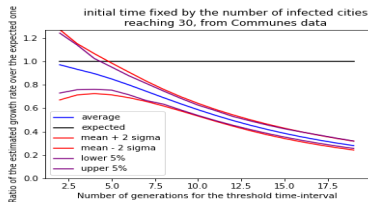
via le nombre courant  
d'individus infectieux

Comme référence pour une situation plutôt régulière.

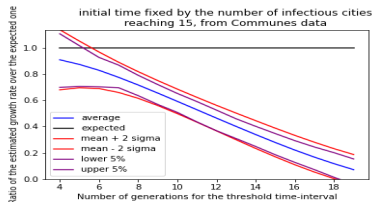


## Données réelles des Communes

$a = 1.2$ ,  $b = 0.$ ,  $N_c \sim 35,000$ , exposant  $\hat{\phi} \sim 2.08$ .



via le nombre total d'infectés

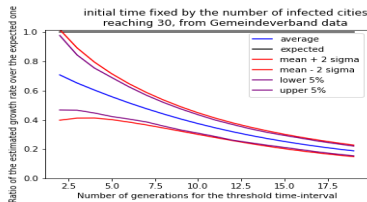


via le nombre courant  
d'individus infectieux

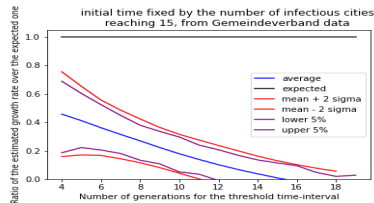


## Données réelles des Gemeindeverbände

$a = 1.2$ ,  $b = 0.$ ,  $N_c \sim 4,400$ , exposant  $\hat{\phi} \sim 2.14$ .



via le nombre total d'infectés



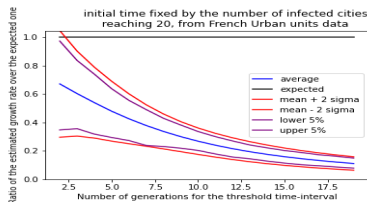
via le nombre courant  
d'individus infectieux



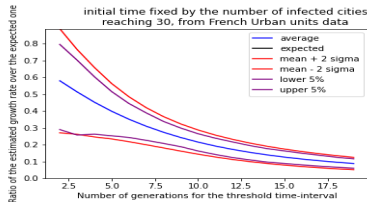
# Données réelles des Aires d'Attraction de villes

$a = 0.89$ ,  $b = -0.10$ ,  $N_c = 678$ , exposant  $\hat{\phi} \sim 1.59$ .

Stratégie de contrôle uniforme



via le nombre total d'infectés,  
seuil à 20



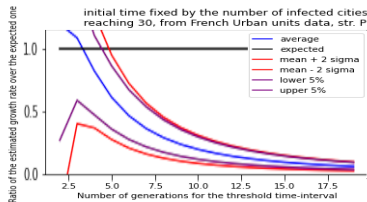
via le nombre total d'infectés,  
seuil à 30



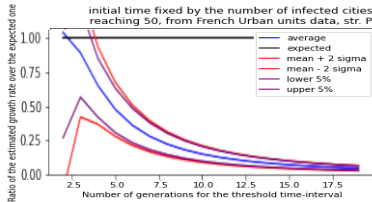
# Données réelles des Aires d'Attraction de villes

$a = 0.89$ ,  $b = -0.10$ ,  $N_c = 678$ , exposant  $\hat{\phi} \sim 1.59$ .

Stratégie de contrôle proportionnel



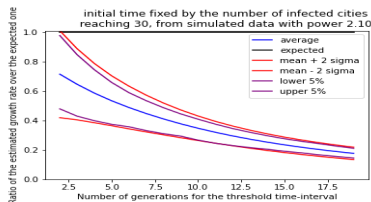
via le nombre total d'infectés,  
seuil à 30



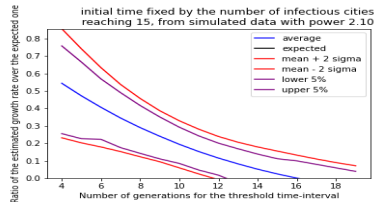
via le nombre total d'infectés,  
seuil à 50



# Loi de puissance avec un exposant de 2.1



via le nombre total d'infectés

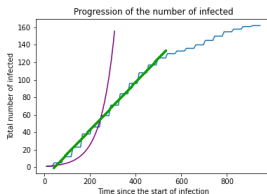


via le nombre courant  
d'individus infectieux

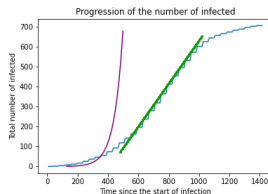


# Loi de puissance avec un exposant de 2.14

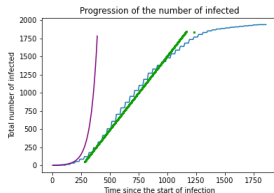
## Nombre variable $N_C$ de villes



$$N_C = 100,000$$



$$N_C = 350,000$$



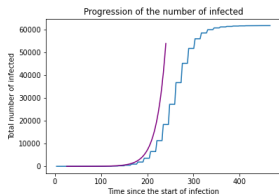
$$N_C = 1,000,000$$



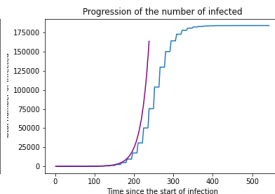


# Loi de puissance avec un exposant de 3

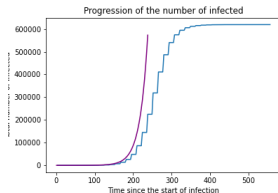
Nombre variable  $N_C$  de villes :



$$N_C = 100,000$$



$$N_C = 300,000$$



$$N_C = 1,000,000$$



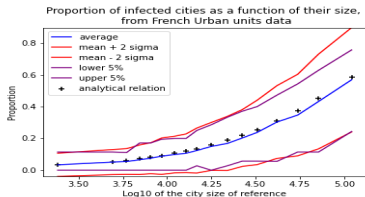
# Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

$\rho(x)$  : probabilité qu'une ville de taille  $x$  soit infectée.

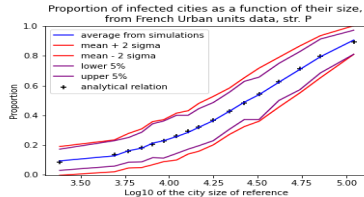
L'observation semble totalement en accord avec la prédiction de la formule :

$$\rho_T = 1 - \exp(-\mathcal{T} \rho_T),$$

qui caractérise la survie du processus en temps arrière.



Stratégie  $U$

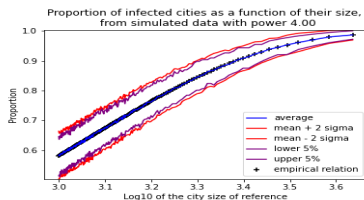


Stratégie  $P$

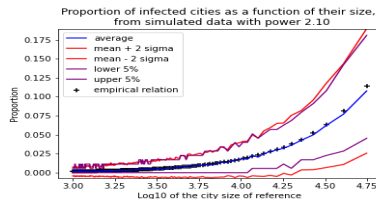


# Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville

Sur des cas simulés, avec taille de 35000 villes.



Exposant 4



Exposant 2.1



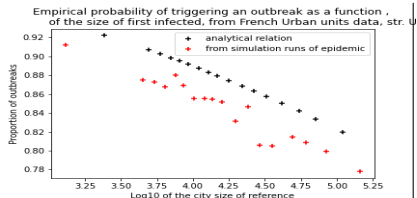
# Probabilité de générer une explosion en fonction de la taille de la ville

$\gamma(x)$  : probabilité qu'une ville de taille  $x$  soit infectée.

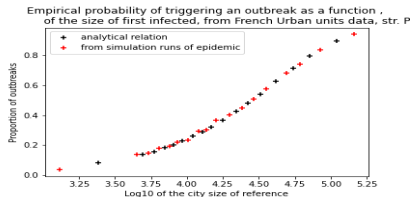
L'observation par réplication semble relativement en accord avec la prédiction de la formule :

$$\gamma = 1 - \exp(-\mathcal{T}^* \gamma),$$

qui caractérise la survie du processus en temps progressif.



Stratégie  $U$

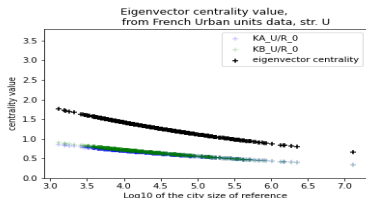


Stratégie  $P$

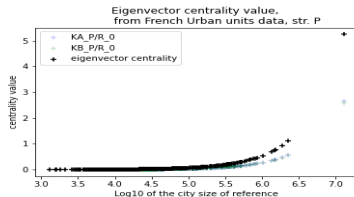


## Centralité de valeur propre (à tester)

La contribution moyenne au régime exponentiel selon la valeur de référence comme condition initiale.



Stratégie  $U$



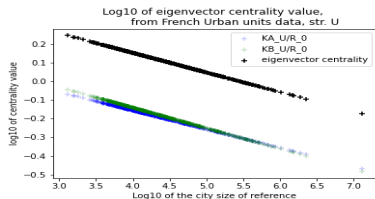
Stratégie  $P$

L'échelle log la rend plus lisible.

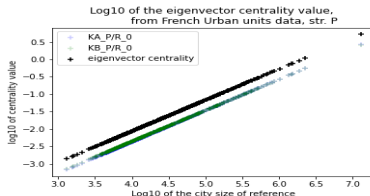


## Centralité de valeur propre (à tester)

La contribution moyenne au régime exponentiel selon la valeur de référence comme condition initiale.



Stratégie  $U$



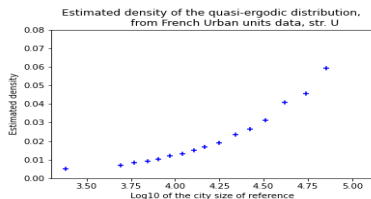
Stratégie  $P$

L'échelle log rend lisible qu'elle suit en pratique une loi de puissance ( $a$  très voisin de  $1 + b$ ).

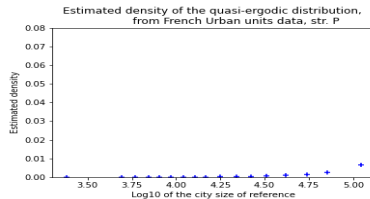


# Centralité quasi-ergodique (à tester)

La distribution du profil ancestral.



Stratégie  $U$



Stratégie  $P$



# Conclusion

## Le modèle

- Motivation

- Le graphe des villes

- Les taux de transmission

- La stratégie de confinement

## Analyse théorique

- Réduction à une dynamique de branchement à deux composantes

- Comparaison entre taux de reproduction de base

## Premiers résultats des simulations

- Quelle est la pertinence de  $R_0$  ?

- Un régime linéaire ?

- Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville





## A garder à l'esprit mais au-delà de notre analyse

- l'incertitude quant au nombre réel d'infectés au moment du confinement
- les transmissions locales d'une ville à ses voisines
- hétérogénéité du taux de croissance dans les différentes villes,  
notez que se fier à son estimation pourrait induire un retard trop important
- les fluctuations temporelles :  
dues à la vaccination, aux changements climatiques, aux vacances, aux événements spéciaux comme les Jeux Olympiques...



# Conclusion

## Le modèle

- Motivation

- Le graphe des villes

- Les taux de transmission

- La stratégie de confinement

## Analyse théorique

- Réduction à une dynamique de branchement à deux composantes

- Comparaison entre taux de reproduction de base

## Premiers résultats des simulations

- Quelle est la pertinence de  $R_0$  ?

- Un régime linéaire ?

- Probabilité d'infection en fonction de la taille de la ville



Merci de votre attention !



# Outline

Quasi-ergodicité exponentielle

Objectifs de convergences

Hypothèses



## Functions de Lyapunov

Semi-groupe sous-Markovien

⇒ Processus de Markov généralisé  $(X_t)$  avec extinction au temps  $\tau_\partial$ .

Facilement traduisible dans le cas sous-Markovien sous réserve que :

$$P_t 1 \leq e^{\rho_M t} 1.$$

Sinon, des transitions biaisées du processus aléatoire doivent être prises en considération :

$$\langle \delta_x P_t^V f \rangle = \int_{\mathcal{X}} p_t(x, dy) \frac{V(y)}{V(x)} e^{-\rho_M t}.$$

La position  $x$  est pondérée par la fonction  $V$ , qui doit satisfaire :

$$P_t V \leq e^{\rho_M t} V.$$



## Un quasi-équilibre

- une unique distribution quasi-limite

$$\frac{\mu P_t(dx)}{\langle \mu P_t 1 \rangle} = \mathbb{P}_\mu (X_t \in dx \mid t < \tau_\partial) \rightarrow \alpha(dx) \text{ avec } t \rightarrow \infty.$$

- $\alpha$  QSD  $\Rightarrow$  mesure propre "à gauche" du semi-groupe de transition :

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}_\alpha (X_t \in dx \mid t < \tau_\partial) = \alpha(dx)$$

- décroissance exponentielle au taux  $\lambda$  : le taux d'extinction

$$\forall t > 0, \langle \alpha P_t 1 \rangle = \mathbb{P}_\alpha(t < \tau_\partial) = e^{-\lambda t}$$

Extension : formule many-to-one dans les processus de croissance-fragmentation, pénalisation de la grande déviation

...



## Capacité de survie et centralité de valeur propre

- Convergence vers la capacité de survie :

$$h_t(x) := e^{\lambda t} \langle \alpha P_t 1 \rangle = e^{\lambda t} \mathbb{P}_x(t < \tau_{\partial}) \rightarrow h(x)$$

avec  $t \rightarrow \infty$ .

- $\beta(dx) := h(x) \cdot \alpha(dx)$

est la distribution quasi-ergodique :

$$\frac{1}{t} \int_0^t g(X_s) ds \rightarrow \langle \beta | g \rangle$$

en probabilité avec  $t \rightarrow \infty$  le long de  $\mathbb{P}_{\mu}(\cdot | t < \tau_{\partial})$ .



## Convergence vers une unique QSD

### Définition

Pour tout semi-groupe linéaire et borné  $(P_t)_{t \geq 0}$ , agissant sur un espace d'état  $\mathcal{X}$ , on dit que  $P$  présente une convergence quasi-stationnaire exponentielle uniforme avec des caractéristiques  $(\alpha, h, \lambda) \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times B(\mathcal{X}) \times \mathbb{R}$

- si  $\langle \alpha | h \rangle = 1$
- et s'il existe  $C, \gamma > 0$  tel que l'inégalité suivante est valide pour tout  $t > 0$  et pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$  vérifiant  $\|\mu\|_{TV} \leq 1$  :

$$\|e^{\lambda t} \mu P_t - \langle \mu | h \rangle \alpha\|_{TV} \leq C e^{-\gamma t}.$$



# Hypothèse 1

## "Mélange"

Pour une mesure de probabilité  $\zeta \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$  (comme paramètre à ajuster) :

$$\forall n \geq 1, \quad \exists m > n, \exists t, c > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_n, \\ \mathbb{P}_x(X_t \in dx ; t < \tau_{\partial}, \forall s \leq t, X_s \in \mathcal{D}_m) \geq c \zeta(dx).$$

## Hypothèse 2

### "Echappée du domaine transitoire"

Etant donné  $\rho > \rho_S$ , il existe  $\mathcal{D}_E \subset \mathcal{D}_\ell$  tel que :

$$\sup_{\{x \in \mathcal{X}\}} \mathbb{E}_x (\exp [\rho (\tau_{\mathcal{D}_E} \wedge \tau_\partial)]) < \infty,$$

avec  $\tau_{\mathcal{D}_E} := \inf \{t \geq 0 ; X_t \in \mathcal{D}_E\}$ , et où nous définissons comme taux de survie :

$$\rho_S := \sup \left\{ \rho \geq 0 \mid \sup_{L \geq 1} \liminf_{t > 0} e^{\rho t} \mathbb{P}_\zeta(t < \tau_\partial \wedge T_{\mathcal{D}_L}) = 0 \right\} \vee 0.$$

## Hypothèse 3

### "Comparaison asymptotique de survie"

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{D}_E} \frac{\mathbb{P}_x(t < \tau_{\partial})}{\mathbb{P}_{\zeta}(t < \tau_{\partial})} < \infty$$

Élémentaire dans le cas d'un espace discret

Pour la diffusion : inégalités de Harnack

Grâce à cette estimation, à condition que  $t'$  soit suffisamment grand :

$$\mu A_t(dx) \geq d \times \zeta(dx) \Rightarrow \mu A_{t+T} \geq c d \times \zeta A_T(dx),$$

where  $\mu A_t(dx) := \mathbb{P}_{\mu}(X_t \in dx \mid t < \tau_{\partial})$

## $(A3_F)$ : savoir gère les singularités

Exemples de singularités avec une rare probabilité :

- Saut dans une échelle de temps très courte (utile si diffusif entre les sauts)
- Type de saut exceptionnel
- Maintien de la position pendant un temps très long

⇒ inclure la possibilité d'échecs

Sans restriction, les échecs peuvent être déclarés à des moments d'arrêt spécifiques.

Doivent se produire rapidement dans l'échelle de temps de l'extinction.

## "Absorption avec échecs" 2

### (A3<sub>F</sub>) : "Absorption avec échecs"

Avec les choix précédents de  $\zeta$ ,  $\mathcal{D}_E$ , et  $\rho > \rho_S$  :

$$\forall \epsilon \in (0, 1), \exists t > 0, \exists c > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_E,$$

$$U = \infty, \mathbb{P}_x\text{-p.s. sur } \{t \wedge \tau_{\partial} \leq U\}$$

$$\text{avec } \mathbb{P}_x(t < \tau_{\partial} \wedge U) \leq \epsilon \exp(-\rho t)$$

et pour un autre temps d'arrêt  $V$  :

$$\mathbb{P}_x(X(U) \in dx ; U < t) \leq c \mathbb{P}_{\zeta}(X(V) \in dx ; V < \tau_{\partial}),$$

+ une condition sur la régularité d'une telle définition de  $U$  par rapport à  $x$ . de sorte que la condition de Markov puisse être appliquée.