

Unique Distribution Quasi-Stationnaire

Aurélien Velleret

Institut de Mathématiques de Marseille,
sous la direction d'Etienne Pardoux et de Michael Kopp

aurelien.velleret@univ-amu.fr

30 mars 2018, Journées ALEA



Introduction :

Contexte initial :

adpatation d'une population à un environnement qui change

Processus à 2 dimension :

- Caractère d'adaptation des individus \leftrightarrow taux de croissance
- Taille de la population :
avec variations stochastiques et extinction

Variation de l'environnement \Rightarrow Caractères plus du tout adaptés
 \Rightarrow déclin puis extinction

Mais les mutations peuvent assurer l'adaptation
 \rightarrow sauts du caractère

Seuil de perturbations au-delà duquel la population ne parvient plus
à s'adapter ?

Modèle général de processus de Markov considéré

- Processus $(X_t)_{t \geq 0}$ de Markov de filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$
- Temps continu ou discret
- Espace polonais : \mathcal{X} avec décomposition : $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{D}_n = \mathcal{X}$
où (\mathcal{D}_n) fermés et $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1}^\circ$
- Etat absorbant : ∂
- Extinction : $\tau_\partial := \inf\{t > 0, X_t = \partial\}$

$$\langle \mu | f \rangle := \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx)$$

Convergence vers une unique QSD

Convergence exponentielle
(non-uniforme en la condition initiale) :

Il existe une **unique QSD** $\alpha \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ t.q.

$$\exists \zeta > 0, \forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}), \exists C(\mu) > 0, \forall t > 0,$$

$$\|\mathbb{P}_\mu(X_t \in dx \mid t < \tau_\partial) - \alpha(dx)\|_{TV} \leq C(\mu)e^{-\zeta t}$$

Condition sur la C.I.

Attendu de la décomposition par \mathcal{D}_n :

Convergence uniforme sur les ensembles :

$$\mathcal{M}_{n,\xi} := \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) ; \mu(\mathcal{D}_n) \geq \xi\}, \quad \text{with } \xi > 0.$$

$$i.e. \sup \{C(\mu) ; \mu \in \mathcal{M}_{n,\xi}\} < \infty$$

Un quasi-équilibre ?

- α QSD \Rightarrow **mesure propre** "à gauche" du semi-groupe de transition, ie

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}_\alpha \left(X_t \in dx \mid t < \tau_\partial \right) = \alpha(dx)$$

- λ_0 : **taux d'extinction** $\rightarrow \forall t > 0, \mathbb{P}_\alpha(t < \tau_\partial) = e^{-\lambda_0 t}$
- la "**capacité de survie**" à long terme η :

$$\frac{\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_\alpha(t < \tau_\partial)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \eta(x)$$

- η **fonction propre** "à droite" du semi-groupe de transition, ie

$$\forall t > 0, \forall x, \quad \eta(x) = e^{+\lambda_0 t} \mathbb{E}_{(x)} [\eta(X_t) ; t < \tau_\partial]$$

Convergence vers la capacité de survie

Convergence exponentielle vers η :

Avec le même $\zeta > 0$:

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}), \exists C'(\mu) > 0, \forall t > 0,$$
$$|\mathbb{P}_\mu(t < \tau_\partial) e^{\lambda_0 t} - \langle \mu | \eta \rangle| \leq C'(\mu) e^{-\zeta t}$$

A fortiori valable pour les Diracs $\mu := \delta_x$

Même condition sur $\mathcal{M}_{n,\xi}$ (mais pas même constante)

Estimée en temps long

Premier ordre d'approximation :

$$\mathbb{P}_\mu(X_t \in dx ; t < \tau_\partial) \approx \langle \mu | \eta \rangle e^{-\lambda_0 t} \alpha(dx)$$

Terme d'**erreur** d'ordre au plus : $e^{-(\lambda_0 + \zeta)t}$

La contribution des composantes de la C. I. μ est caractérisée par la capacité de survie η .

Q-processus

Existence du Q-process :

Il existe une famille $(\mathbb{Q}_\mu)_{\mu \in \mathcal{M}_1(X)}$ de probabilités sur Ω définie par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\mu(\Lambda_s \mid t < \tau_\partial) = \mathbb{Q}_{\eta_*\mu}(\Lambda_s)$$

pour tout $\Lambda_s \mathcal{F}_s$ -mesurable.

$$\text{où } \eta_*\mu(dx) := \frac{\eta(x)}{\langle \mu \mid \eta \rangle} \mu(dx).$$

Caractérisation du générateur

(X_t) de Markov sous \mathbb{Q}_x . Générateur Q_t t.q.

$$\langle \delta_x Q_t \mid \varphi \rangle = \frac{e^{\lambda_0 t}}{\eta(x)} \langle \delta_x P_t \mid \eta \times \varphi \rangle$$

Convergence du le Q-processus

Unique distribution stationnaire $\beta := \eta_*\alpha$ i.e. $\beta(dx) = \eta(x)\alpha(dx)$.

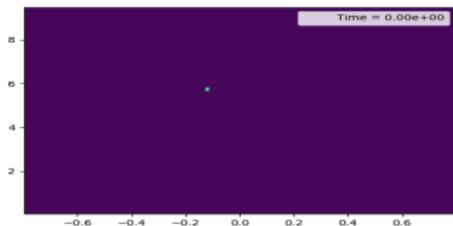
Convergence pour le Q-processus

Avec le même $\zeta > 0$:

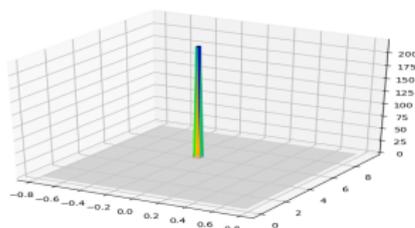
$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}), \exists C(\mu) > 0, \forall t > 0,$$
$$\|Q_{\eta_*\mu}(X_t \in dx) - \beta(dx)\|_{TV} \leq C(\mu)e^{-\zeta t}$$

A priori, convergence non exponentielle pour le Q-process

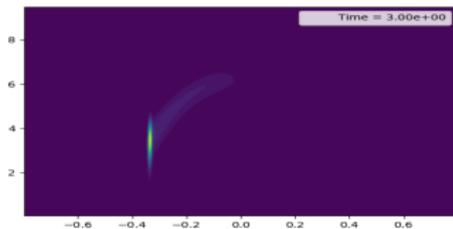
Illustration : convergence vers la QSD



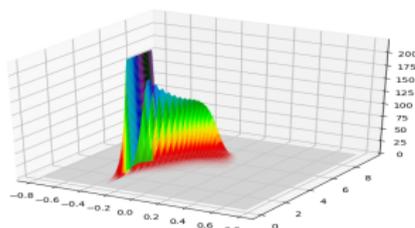
Dirac initial



Dirac initial



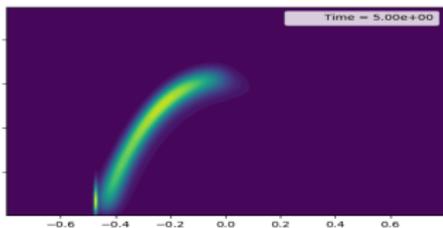
Diffusion



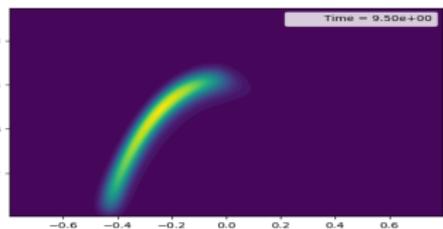
Diffusion

Abscisse : trait adaptatif
Ordonnée : Taille de la population

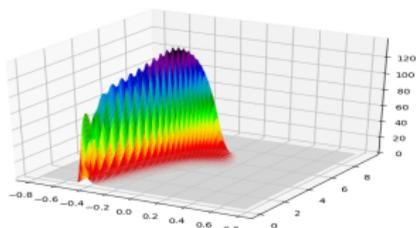
Illustration : convergence vers la QSD 2



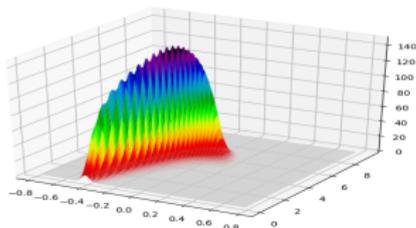
Disparition du Dirac



Stabilité de la QSD

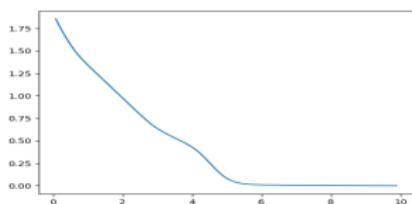


Disparition du Dirac

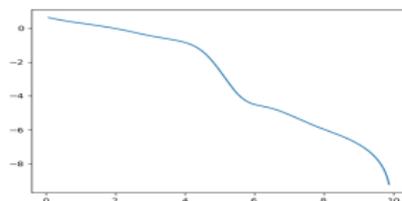


Stabilité de la QSD

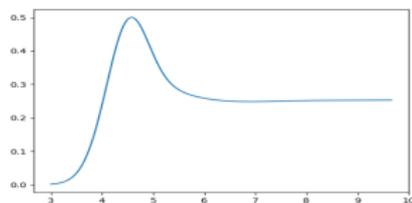
Illustration : vitesse de convergence



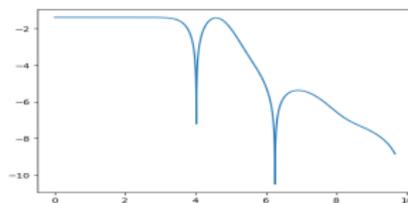
Ecart en variation totale,
en fonction du temps



log de cet écart

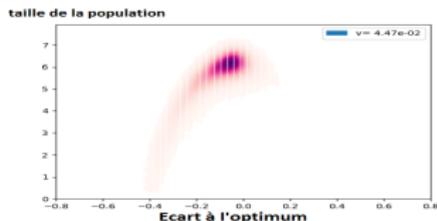


convergence du taux
d'extinction

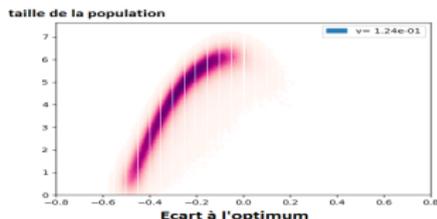


écart entre les taux
d'extinction

Profils de QSD α

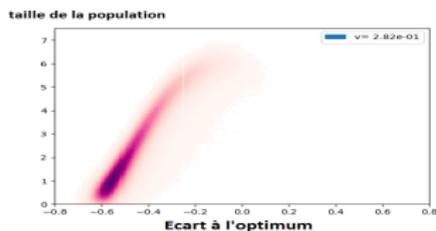


L'extinction améliore peu l'adaptation ici



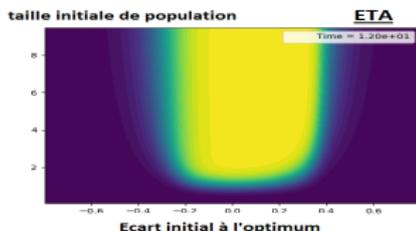
Régime intermédiaire

$$\mathbb{P}_{(x,n)} \left[(X, N)_t \in (dx, dn) \mid t < \tau_\partial \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \alpha(dx, dn)$$



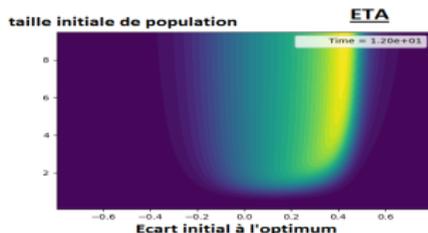
pseudo-adaptation : sélection par l'extinction

Profils de la "capacité de survie à long terme"

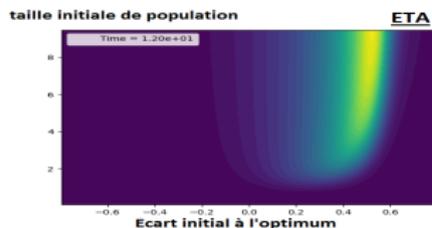


$$\eta(x, n) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_{(x, n)}(t < \tau_{\partial})}{\mathbb{P}_{\alpha}(t < \tau_{\partial})}$$

L'extinction améliore peu
l'adaptation ici



Régime intermédiaire



pseudo-adaptation : sélection
par l'extinction

Quasi-ergodicité exponentielle

Hypothèses illustrées

Éléments de preuve

Hypothèses communes

Plusieurs jeux d'hypothèses proposés
(pour divers niveaux de difficultés)

2 sont communes :

(A0) "Sauts limités"

Pour tout $n \geq 1$, avec $T_{\mathcal{D}_n} := \inf \{t \geq 0 ; X_t \notin \mathcal{D}_n\}$,
il existe $m \geq n$ t.q. pour tout $x \in \mathcal{D}_n$, \mathbb{P}_x p.s. :

soit $\tau_\partial \leq T_{\mathcal{D}_n}$ ou bien : $X(T_{\mathcal{D}_n}) \in \mathcal{D}_m$.

(A1) "Mélange"

Pour une certaine mesure $\alpha_c \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$:

$$\forall n \geq 1, \quad \exists m > n, \exists t, c > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_n,$$
$$\mathbb{P}_x(X_t \in dx ; t < \tau_\partial, \forall s \leq t, X_s \in \mathcal{D}_m) \geq c \alpha_c(dx).$$

Mélange

Condition apparentée à Doeblin

⇒ décrire les trajectoires, estimées de diffusion...

Restriction : rester sur \mathcal{D}_m

α_c : mesure de couplage

Quelles régions atteignables ? Quelle régularité ?

En général, uniforme sur un domaine \mathcal{D}

Pour le reste de la preuve, utile de choisir \mathcal{D} "grand"

Tension : énoncé 1

(A2) "Echapée hors du domaine transitoire"

Pour tout $\rho > 0$, on peut définir $\mathcal{D}_c \in \mathbf{D}_\bullet^\supset$ t.q., avec
 $\tau_{\mathcal{D}_c} := \inf \{t \geq 0 ; X_t \in \mathcal{D}_c\}$:

$$e_{\mathcal{T}} := \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_x (\exp [\rho (\tau_{\mathcal{D}_c} \wedge \tau_\partial)]) < \infty.$$

(A3) "Domaine de couplage"

Pour cet ensemble $\mathcal{D}_c \in \mathbf{D}_\bullet^\supset$ et le $\alpha_c \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ de "Mélange" :

$$\begin{aligned} \exists c > 0, \exists t_{\underline{v}} > 0, \\ \forall t \geq t_{\underline{v}}, \forall x \in \mathcal{D}_c, \quad \mathbb{P}_x(t < \tau_\partial) \leq c \mathbb{P}_{\alpha_c}(t < \tau_\partial) \end{aligned}$$

Énoncé 1

Théorème v2

Sous les hypothèses (A0-A3), tous les résultats de la section précédente s'appliquent :

QSD, capacité de survie et Q-process bien définis comme limites, convergences exponentielles associées.

Tension : énoncé 2

En réalité, condition nécessaire : $\rho_{eT} > \rho_{sv}$
 ρ_{sv} déduite de "Mélange" ou plus généralement d'une :

(A4) "Estimée de Survie"

Pour $\rho_{sv} > 0$ et un certain $\mathcal{D}_s \in \mathbf{D}_\bullet^\circ$, il existe $c > 0$, $m \geq 1$,
 $\mathcal{D}_m \supset \mathcal{D}_s$ t.q. :

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}_s,$$

$$\mathbb{P}_x(t < \tau_{\partial} ; \forall s \leq t, X_s \in \mathcal{D}_m) \geq c \exp(-\rho_{sv} t)$$

Enoncé 2

Théorème v2

Sous les hypothèses (A0-A4), avec (A2) associée à $\rho_{eT} > \rho_{sv}$ et (A4) à ρ_{sv} , tous les résultats de la section précédente s'appliquent.

(A3) : contrainte sur la forme du domaine \mathcal{D}_c

Cadre d'une diffusion simple : Harnack \Rightarrow (A5.1) \Rightarrow (A3)

pour tout $\mathcal{D}_c = \mathcal{D}_n$

(A5.1) : "Absorption 1"

$$\begin{aligned} & \exists t > 0, \exists t_\alpha > 0, \exists c > 0, \\ \forall x \in \mathcal{D}_c, \quad & \mathbb{P}_x(X_t \in dx ; t < \tau_\partial) \leq c \mathbb{P}_{\alpha_c}(X_{t_\alpha} \in dx ; t_\alpha < \tau_\partial). \end{aligned}$$

De même pour les espaces discrets avec \mathcal{D}_c fini.

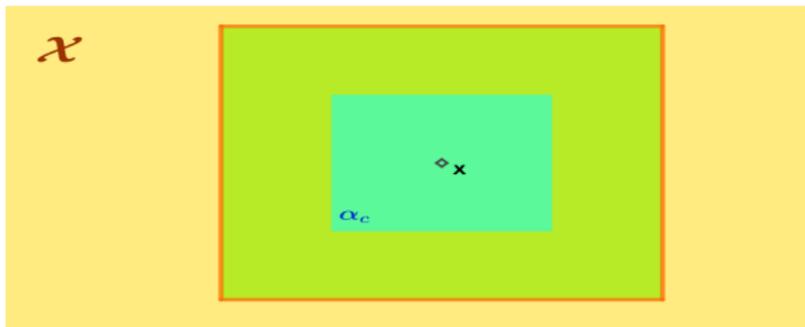
(A5.2) : extension du résultat précédent

(A5.2) : "Absorption 2"

Il existe $t_{\bar{\lambda}}, c > 0$ t.q. :

pour tout $x \in \mathcal{D}_c$, il existe $U^x \leq t_{\bar{\lambda}}$ et U_{α}^x temps d'arrêt t.q. :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(X_{U^x} \in dx ; U^x < \tau_{\partial}) \\ \leq c \mathbb{P}_{\alpha_c}(X_{U_{\alpha}^x} \in dx ; U_{\alpha}^x < \tau_{\partial}) \end{aligned}$$



(A5.3) : en excluant les singularités

Singularités rares en probabilité :

- Sauts en temps très courts (si diffuse par ailleurs)
- Type de saut exceptionnel
- Maintien pendant un temps très long

⇒ inclure la possibilité d'échec, alors $K \geq 1$

Temps d'arrêt auquel l'échec est déclaré : T_{fl}^1

Doit arriver vite dans l'échelle de temps de l'extinction

Enoncé 3-4

Théorème v3

Supposons (A0, A1) -avec α_c - et que pour tout ρ , il existe \mathcal{D}_c t.q. (A2) et (A5.3) sont satisfaites avec $\rho_{eT} = \rho_{AF} = \rho$. Alors tous les résultats de la section précédente s'appliquent.

Théorème v4

Supposons (A0, A1) -avec α_c - et (A4) -avec ρ_{sv} . Si de plus il existe \mathcal{D}_c t.q. (A2) et (A5.3) sont satisfaites avec $\rho_{eT} > \rho_{sv}$ et $\rho_{AF} = \rho_{sv}$. Alors tous les résultats de la section précédente s'appliquent.

Quasi-ergodicité exponentielle

Hypothèses illustrées

Éléments de preuve

2 étapes intermédiaires

Stabilisation

Il existe $\mathcal{M}_{xt} = \mathcal{M}_{n_{xt}, \xi_{xt}}$ avec $n_{xt} \geq m_{sv}$, $\xi_{xt} > 0$ t.q. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi > 0, \exists t_{xt} > 0,$$
$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{n, \xi}, \forall t \geq t_{xt}, \quad \mu A_t \in \mathcal{M}_{xt}.$$

Persistance

Il existe $t_{ps}, c_{ps} > 0$ t.q. :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall t \geq t_{ps}, \quad \mathbb{P}_x(t < \tau_{\partial}) \leq c_{ps} \mathbb{P}_{\alpha_c}(t < \tau_{\partial}).$$

Corollaires et couplage

Régénération

Il existe $\mathcal{M}_{rn} = \mathcal{M}_{n_{rn}, \xi_{rn}}$ (avec $n_{rn} \geq m_{sv}$, $\xi_{rn} > 0$),
 $h_{cm} 1_{c_{db}}, t_{db} > 0$ t.q. :

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{rn}, \quad \mu A_{t_{db}}(dx) \geq c_{db} \alpha_c(dx) \text{ et } \frac{\mu A_{t_{db}}(\mathcal{D}_{rn}) - c_{db}}{1 - c_{db}} \geq \xi_{rn}$$

Corollaires et couplage

Mesure minorante

$$\alpha_c[t_h](dx) := \sum_{k \ t_{db} + t_{ps} \leq t_h} \frac{C_{db}}{C_{ps}} \left[1 - \frac{C_{db}}{C_{ps}} \right]^{k-1} \alpha_c A_{t_h - k t_{db}}(dx)$$

Minoration

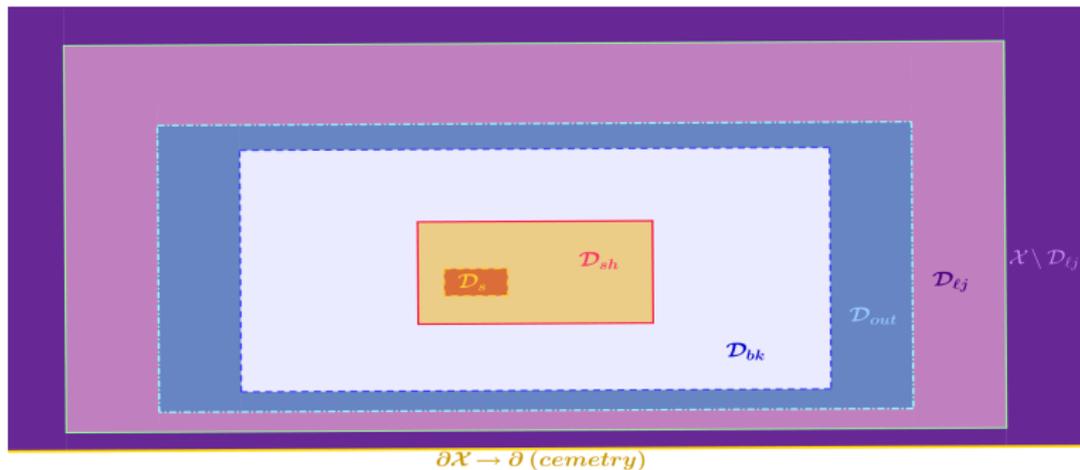
$$\forall \mu \in \mathcal{M}_m, \forall t_h \geq t_{ps}, \quad \mu A_{t_h} \geq \alpha_c[t_h]$$

Corollaires et couplage : 2

Cadre général

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi > 0, \exists t_{xt} > 0, \\ & \forall \mu \in \mathcal{M}_{n,\xi}, \forall t_h^2 \geq t_h^1 \geq t_{xt}, \quad \mu A_{t_h^2} \geq \alpha_c [t_h^1 - t_{xt}] \\ & \Rightarrow \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{n,\xi}, \\ & \|\mu_1 A_{t_h} - \mu_2 A_{t_h}\|_{TV} \leq 2 \left[1 - \frac{c_{db}}{c_{ps}} \right] \wedge \left(\frac{t_h - t_{xt} - t_{ps}}{t_{db}} \right). \end{aligned}$$

Illustration extraction



Sorties et retours

$$T_{out}^i := \inf \{ t \geq \tau_{bk}^i ; X_t \notin \mathcal{D}_{out} \}, \quad T_{out}^0 := 0,$$

$$\tau_{bk}^{i+1} := \inf \{ t \geq T_{out}^i ; X_t \in \mathcal{D}_{bk} \}$$

Stabilisation : preuve

L'idée essentielle est de garantir que "le processus n'a pas pu rester longtemps dans le domaine transitoire sans que l'extinction associée ne soit forte".

t_e : horizon en temps

t_m : limite du temps à remonter pour revenir dans \mathcal{D}_{out}

Dernière excursion

$$\exists C_v > 0, \forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}), \forall t_m > 0, \forall t_e > t_m,$$

$$\mathbb{P}_\mu \left(T_{out}^{I(t_e)} \leq t_e - t_m, t_e \leq \tau_{bk}^{I(t_e)+1}, \tau_{bk}^1 \leq t_e \mid t_e < \tau_\partial \right) \\ \leq C_v e^{-(\rho_e T - \rho_{sv}) t_m},$$

$$\text{with } I(t_e) := \max \{ i \geq 0, T_{out}^i \leq t_e \} < \infty.$$

Dernière excursion : principes

- Se ramener à des temps d'arrêts (les T_{out}^j)
+ condition postérieure (pas de retour)
- Décroissance en proba au taux au moins ρ_{eT}
- **Compétition** avec d'autres trajectoires partant de $X(T_{out}^j)$
- Condition : ne pas ressortir $\Rightarrow T_{out}^j = T_{out}^{l(t_e)}$
- Temps fini pour atteindre \mathcal{D}_s puis maintien au taux ρ_{sv}

Premier retour

Avec les mêmes principes :

Premier retour

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi > 0, \exists C_e(n, \xi) > 0, \quad \forall t_e > 0, \forall \mu \in \mathcal{M}_{n, \xi},$$

$$\mathbb{P}_\mu \left(t_e \leq \tau_{bk}^1 \mid t_e < \tau_\partial \right) \leq C_e(n, \xi) e^{-(\rho_e T - \rho_{sv}) t_e}.$$

Reste à contrôler des trajectoires partant d'un \mathcal{D}_n sur des temps finis \Rightarrow par l'hypothèse de Mélange et de survie :

Retour et maintien

$$\exists n_{xt} > n_{\ell j}, \mathcal{D}_{xt} := \mathcal{D}_{n_{xt}}, \exists c_{xt} > 0,$$

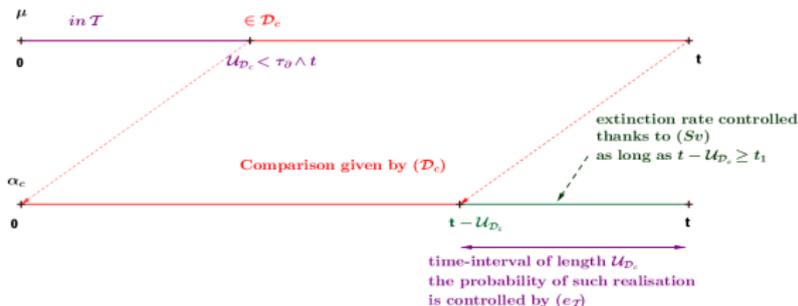
$$\forall x \in \mathcal{D}_{\ell j}, \forall t > 0, \text{ with } T_{xt} := \inf \{s > 0 ; X_s \notin \mathcal{D}_{xt}\}$$

$$\mathbb{P}_x (t < T_{out}^1 \wedge T_{xt} \wedge \tau_\partial) \geq c_{xt} \exp[-\rho_{sv} t].$$

3 grandes étapes pour la "Persistance"

$$\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial) \leq c_{ps} \mathbb{P}_{\alpha_c}(t < \tau_\partial), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall t \geq t_{ps},$$

- \mathcal{D}_c : domaine accessible depuis α_c (sans conditionnement)
- Etats transitoires + Etats mortifères :
moment exponentiel du temps de sortie contrôlé par ($e_{\mathcal{T}}$)
- Estimée de survie :
définit le moment exponentiel



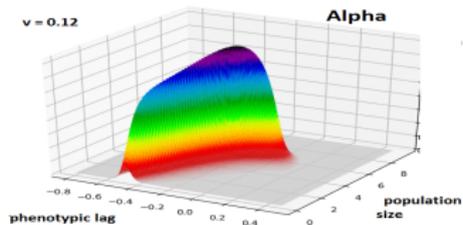
Conclusion

- Critères relativement naturels
pour garantir la stabilité d'une unique QSD :
 - **Confinement** à justifier :
comparaison entre le taux de survie
et le taux de retour au domaine de couplage
 - **Non-dégénérescence** à justifier :
contribution de l'étape de couplage
non-négligeable à long terme
- Bien adaptés à des processus assez généraux :
temps et espaces continus, sauts assez généraux
(même si limite aux expulsions tout de même)
- Mais très dépendant de la méthode de Doeblin
↔ convergence en variation totale

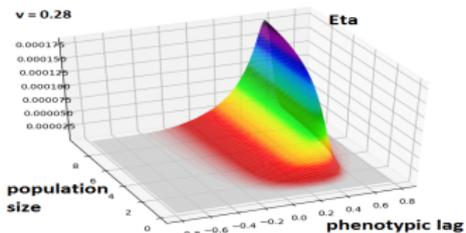
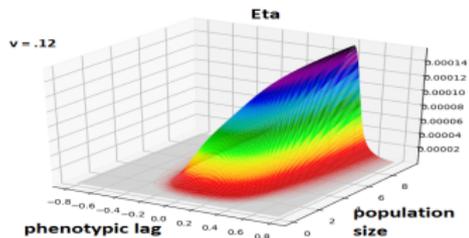
Perspectives

- Rédaction à finaliser :
 - Modèle d'adaptation : trait 1D, non borné (grand \Rightarrow très délétères)
 - Cas avec mutations délétères + cas où elles sont bloquées
- Plus de réalisme au modèle (envisagé)
 - Trait multidimensionnel
 - Variation de l'environnement plus générale
 \Rightarrow borne uniforme sur une classe de fonctions : $t \mapsto E_t$
(le modèles précédent correspond au cas $E_t^0 := v t$)

- Non plus unique QSD mais unique Yaglom :
Cas où e_T dépend de \mathcal{D}_n ? version Lyapunov?
Mais gestion des sauts bien plus délicate!
- Description de la QSD
 - Régularité : densité solution d'une EDP non-locale
 - Dérivée de la QSD selon ses différents paramètres
- Convergence du profil empirique des mutations
vers un profil déterministe (qui dépend de α et η)



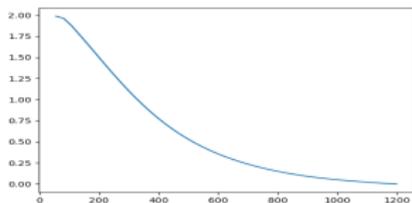
Je vous remercie pour votre attention
Des questions ?



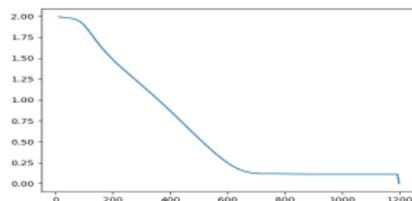
Références

-  Champagnat N and Villemonais D, Exponential convergence to quasi-stationary distribution and Q-process, Probability Theory and Related Fields, volume 164, pages 243–283, 2016
-  Champagnat N and Villemonais D, Exponential convergence to quasi-stationary distribution for one-dimensional diffusions, ArXiv e-prints, June 2015.
-  Kopp M and Hermisson J (2009) The genetic basis of phenotypic adaptation II : The distribution of adaptative substitutions of the moving optimum model. Genetics 183 : 1453-1476
-  Nassar E, thèse : Modèles probabilistes de l'évolution d'une population dans un environnement variable, sous la direction de Kopp M et Pardoux E, 2016
-  Nassar E, Pardoux E : On the long time behavior of the solution of an SDE driven by a Poisson Point Process, to appear in Journal of Applied Probability

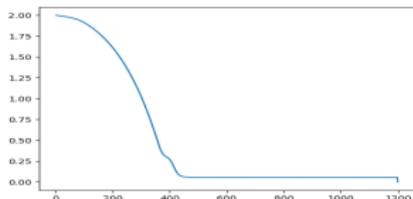
Convergence in total variation towards the QSD



Population naturally adapting :
little risk of extinction



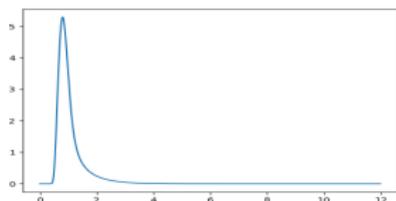
Intermediate regime



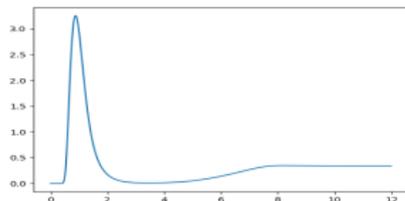
Mortality dominates

Convergence of the mortality rate

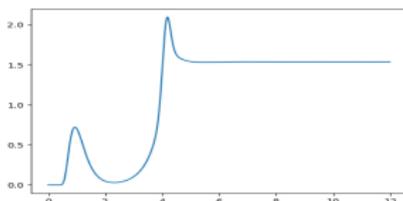
Different regimes visible for the gap relative to the moving optimum :



Population naturally adapting :
little risk of extinction

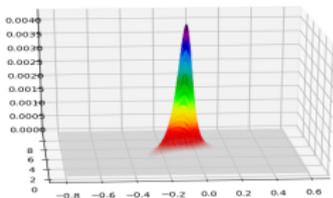


Intermediate regime

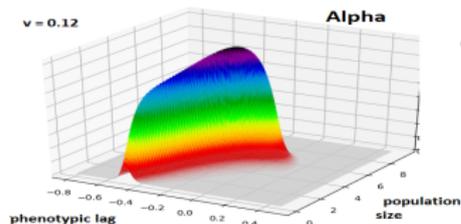


Mortality dominates

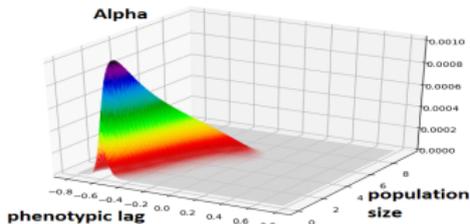
3D view of the QSD



Population naturally adapting :
little risk of extinction

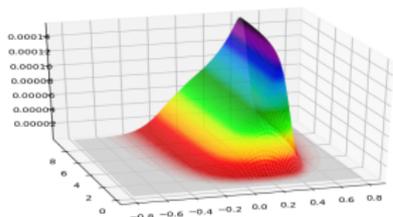
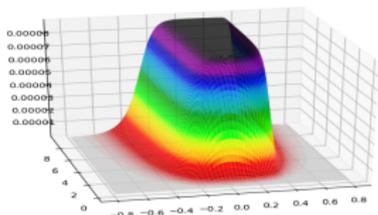


Intermediate regime



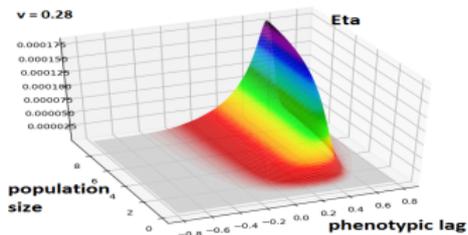
Mortality dominates

3D view of the capacity of survival



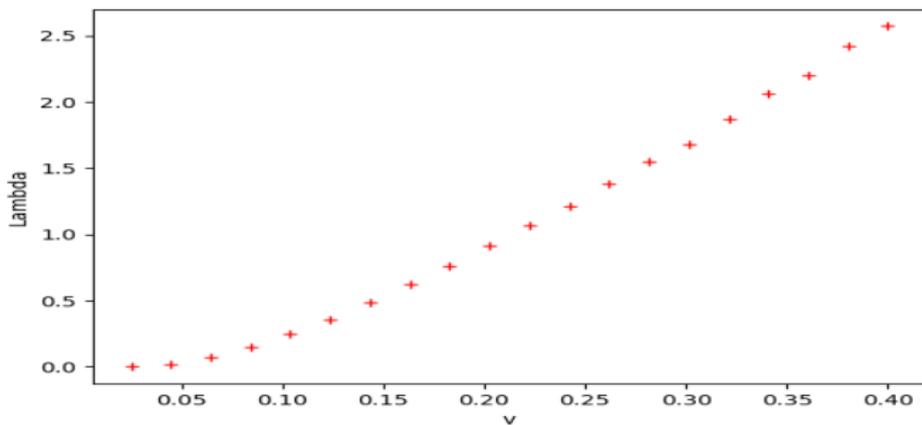
Population naturally adapting :
little risk of extinction

Intermediate regime



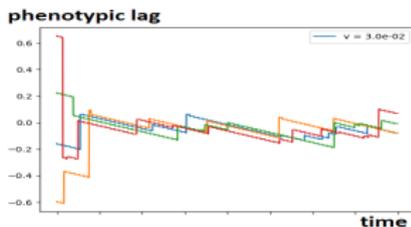
Mortality dominates

rate of extinction as a function of environmental change

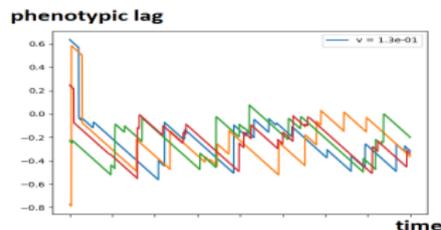


Dynamique évolutive (2)

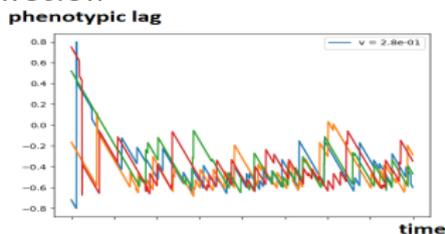
Différent régimes visible pour l'écart à l'optimum :



Adaptation spontanée : faible
taux d'extinction



Régime intermédiaire



La disparition des populations trop
mal-adaptées explique l'adaptation
apparente

Modèle 2D

$$\begin{cases} X_t = x - v t + \int_{[0,t] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w \mathbf{1}_{\{u_f \leq f(Z_s)\}} \times \mathbf{1}_{\{u_g \leq g(X_{s-}, w)\}} \\ \quad M(ds, dw, du_f, du_g), \\ Z_t = z + \int_0^t (r(X_s) Z_s - c (Z_s)^2) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{Z_s} dB_s, \end{cases}$$

où Z_t décrit la taille de la population
et X_t son décalage phénotypique.

Extinction au temps :

$$T_0^Z := \inf\{t \geq 0, Z_t = 0\}.$$

Modèle simplifié

$$(S1) \begin{cases} X_t = x - v t + \int_{[0,t] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w \mathbf{1}_{\{u \leq h(X_{s-}, w)\}} M(ds, dw, du) \\ \text{tant que } t < \tau_{\partial}, \end{cases}$$

avec extinction au temps t ($\tau_{\partial} = t$) :

- à taux $\rho(X_t)$
- ou dès lors que X sort de $] - L, L[$