Développement 1

Inégalités de Kronecker

Théorème. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction C^n. On pose $M_k = ||f^{(k)}||_\infty$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, et l'on suppose M_0 et M_n finis. Alors tous les M_k sont finis, et on a les inégalités :*

$$M_k \leqslant 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$$

On commence par montrer que les M_k sont finis. En effet, soit $x \in \mathbf{R}$ et $h > 0$. L'inégalité de Taylor-Lagrange s'écrit :

$$\left| f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \cdots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leqslant \frac{h^n M_n}{n!}$$

d'où, par inégalité triangulaire :

$$\left| hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leqslant 2M_0 + \frac{h^n}{n!} M_n$$

Considérons alors le vecteur $X = \big(f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)\big) \in \mathbf{R}^{n-1}$. Si l'on applique l'inégalité précédente pour $n-1$ valeurs disctinctes $0 < h_1 < \cdots < h_{n-1} < 1$ de h, il vient :

$$||AX||_\infty \leqslant C = 2M_0 + M_n/n!$$

où A est la matrice $(h_i^j/j!)$, qui est aux factorielles près de Vandermonde, et donc en particulier inversible. On en déduit :

$$||X||_\infty \leqslant C \cdot \|A^{-1}\|$$

Comme cette inégalité vaut pour tout x, la finitude des M_k s'ensuit. On est alors en position de montrer l'inégalité du théorème par récurrence sur n.

On commence par le premier cas non trivial, soit $n = 2$ et $k = 1$. Dans ce cas, pour $x \in \mathbf{R}$ quelconque et $h > 0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre x et $x+h$ d'une part et x et $x-h$ d'autre part donne :

$$|2hf'(x) - f(x-h) - f(x+h)| \leqslant h^2 M_2$$

d'où $M_1 \leqslant M_0/h + hM_2/2$. En choisissant $h = (2M_0/M_2)^{-1/2}$ (ou en faisant tendre h vers l'infini si $M_2 = 0$), on en déduit l'inégalité recherchée : $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Passons maintenant à la récurrence : on suppose le résultat acquis jusqu'au rang n et on se donne f une fonction C^{n+1}. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. En appliquant le cas $n = 2$ à $f^{(k-1)}$, il vient $M_k^2 \leqslant 2M_{k-1}M_{k+1}$. Mais alors, par hypothèse de récurrence, en appliquant le théorème à f au rang k, il vient :

$$M_{k-1} \leqslant 2^{(k-1)/2} M_0^{1/k} M_k^{1-1/k}$$

Et de même, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $f^{(k)}$ au rang $n+1-k$, on obtient :

$$M_{k+1} \leqslant 2^{(n-k)/2} M_k^{1-1/(n+1-k)} M_{n+1}^{1/(n+1-k)}$$

En rassemblant le tout, on obtient :

$$M_k^2 \leqslant 2^{(n+1)/2} M_0^{1/k} M_k^{1-1/k+1-1/(n+1-k)} M_{n+1}^{1/(n+1-k)}$$

ce qu'il suffit d'élever à la puissance $k(n+1-k)/(n+1)$ pour conclure.

Développement 2
Éclatement d'un point double

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞ telle que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, et $D^2f(0)$ soit de signature $(1,1)$. On suppose en outre $f''_{y^2}(0) \neq 0$. Pour $(x,t) \in \mathbf{R}^2$, $x \neq 0$, on pose :

$$F(x,t) = \frac{1}{x^2} f(x, tx)$$

Théorème. *F se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^2$, et l'équation $F(0,t) = 0$ admet deux racines distinctes t_1, t_2. $F(x,t) = 0$ définit deux fonctions implicites $t = \varphi_i(x)$ au voisinage de $(x,t) = (0,t_i)$, et l'on a au voisinage de l'origine :*

$$f(x,y) = 0 \equiv y = x\varphi_1(x) \text{ ou } y = x\varphi_2(x)$$

L'équation des tangentes à la courbe $f(x,y) = 0$ à l'origine est $D^2f(x,y) = 0$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour f s'écrit :

$$f(h) = \int_0^1 (1-\lambda) D^2 f(\lambda h)(h,h) d\lambda \quad \text{pour tout } h \in \mathbf{R}^2$$

En appliquant cela à $h = (x, tx)$, il vient :

$$f(x,tx) = \int_0^1 (1-\lambda)\big(f''_{x^2}(\lambda x, \lambda tx)x^2 + 2f''_{xy}(\lambda x, \lambda tx)x \cdot tx + f''_{y^2}(\lambda x, \lambda tx)tx \cdot tx\big)d\lambda = x^2 \tilde{F}(x,t)$$

avec $\tilde{F}$ une application clairement C^∞ sur $\mathbf{R}^2$, et qui prolonge F (on la notera simplement F dans la suite). On obtient en particulier :

$$F(0,t) = f''_{x^2}(0) + 2f''_{xy}(0)t + f''_{y^2}(0)t^2$$

qui est un polynôme en t de degré 2 et de discriminant strictement positif, donc qui a deux racines réelles distinctes t_1, t_2. On a alors $F'_t(0,t_i) \neq 0$, donc le théorème des fonctions implicites assure l'existence de voisinages U_i, V_i de 0 et t_i dans $\mathbf{R}$, et de $\varphi_i : U_i \to V_i$ C^∞, tels que :

$$\text{Pour } (x,t) \in U_i \times V_i, \quad F(x,t) = 0 \equiv t = \varphi_i(x)$$

Pour passer à f, il suffit donc de montrer que les zéros de $f(x,y)$ au voisinage de l'origine correspondent bien à $t = y/x$ dans V_1 ou V_2. Pour cela, on choisit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que $]-\alpha, \alpha[\subset U_i$ et $]t_i - \beta, t_i + \beta[\subset V_i$, et l'on écrit la formule de Taylor-Young pour f à l'ordre 2 :

$$f(x,y) = \frac{f''_{y^2}(0)}{2}\big((y - t_1x)(y - t_2x) + r(x,y)\big)$$

avec $r(x,y) = o(x^2+y^2)$. Posons alors $T = \max(|t_i| + \beta)$, et :

$$\varepsilon = \frac{\beta^2}{1 + 2\beta^2 + 2T^2}$$

On a $0 < \varepsilon < 1/2$, et si $|t - t_i| < \beta$, $|t| < T$. Quitte à diminuer α, on peut alors supposer que pour $|x| < \alpha$, $|y| < \beta$, on ait $|r(x,y)| \leqslant \varepsilon(x^2+y^2)$. En particulier, dans ce rectangle, $f(x,y) = 0$ entraîne $|y - t_1x| \cdot |y - t_2x| \leqslant \varepsilon(x^2+y^2)$.

Si $x = 0$, l'inégalité est juste $y^2 \leqslant \varepsilon y^2$, qui impose $y = 0$. Sinon, soit $t = y/x$. On a $|t - t_1| \cdot |t - t_2| \leqslant \varepsilon(1+t^2)$. En particulier, si $|t - t_i|$ est le plus petit des deux nombres $|t - t_1|$ et $|t - t_2|$, il vient :

$$(t - t_i)^2 \leqslant \varepsilon(1 + t^2) \leqslant \varepsilon(1 + 2(t - t_i)^2 + 2t_i^2)$$

d'où :

$$(t - t_i)^2 < \frac{(1 + 2T^2)\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} = \beta^2$$

ce qui assure bien que t appartient à V_i et donc que $y = xt = x\varphi_i(x)$. La réciproque est immédiate.

Pour finir, on observe que le nombre dérivé en 0 de $x \mapsto x\varphi_i(x)$ est $\varphi_i(0) = t_i$, donc la tangente à cette branche a pour équation $y - t_ix = 0$. L'ensemble des deux tangentes a donc pour équation $(y - t_1x)(y - t_2x) = 0$, ce qui équivaut, on l'a vu, à $D^2f(0)(x,y) = 0$.

Remarque. Le théorème de Morse permet également d'obtenir cette décomposition en deux branches de manières assez rapide, mais l'éclatement fournit des informations plus précises. En effet, on a montré que si f est une fonction sur le plan ayant l'origine pour point critique non dégénéré, alors la courbe $C : f = 0$ est l'image par la projection naturelle d'une courbe $\tilde{C} : \tilde{f} = 0$ sur l'éclaté X du plan en 0, avec $\tilde{f}$ *submersive* en les deux points de $\tilde{C}$ qui se projettent sur l'origine. Comme rien ne nous empêche de continuer à éclater d'éventuels points doubles restants, on voit qu'on peut ainsi progressivement *désingulariser* C. Si par exemple f est une fonction de Morse propre, elle n'a qu'un nombre fini de points critiques le long de C qui est compacte, et ils sont tous non-dégénérés, donc on voit que C est l'image d'une courbe lisse par un difféomorphisme local propre (la suite des éclatements). Comme elle est compacte, c'est une réunion d'immersions de S^1 ! (Et mieux, chaque composante connexe est l'image de S^1 par une immersion).

Par ailleurs, on obtient aussi par éclatement la résolution d'un point n-uple à tangentes distinctes pour n'importe quel n : il suffit de pousser plus loin nos formules de Taylor.

Développement 3

Groupes locaux

On rappelle qu'un groupe local sur $\mathbf{R}^n$ est la donnée, pour un certain voisinage V de l'origine, d'une application C^∞ $F : V \times V \to \mathbf{R}^n$, $(x, y) \mapsto x *_F y$ vérifiant au voisinage de 0 les relations $x *_F 0 = 0 *_F x = x$ et $(x *_F y) *_F z = x *_F (y *_F z)$.

Une application C^∞ φ d'un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ vers un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^p$ est un morphisme de groupes locaux $F \to G$ si $\varphi(x *_F y) = \varphi(x) *_G \varphi(y)$. On dit que c'est un isomorphisme si c'est de plus un difféomorphisme local en 0.

Théorème. *Soit $F(x, y) = x *_F y$ une loi de groupe local sur $\mathbf{R}^n$. Alors $F(x, y) = x + y + b(x, y) + O(||(x, y)||^3)$, où b est une certaine application bilinéaire, et il existe une application C^∞ i définie au voisinage de 0 et vérifiant $i(x) *_F x = x *_F i(x) = 0$. De plus, la forme alternée $[x, y]_F = b(x, y) - b(y, x)$ satisfait à l'identité de Jacobi :*

$$[[x, y]_F, z]_F + [[y, z]_F, x]_F + [[z, x]_F, y]_F = 0$$

donc munit $\mathbf{R}^n$ d'une structure d'algèbre de Lie. Enfin, si $\varphi : F \to G$ est un morphisme, $D\varphi(0)$ est un morphisme entre les algèbres de Lie associées, qui est un isomorphisme si et seulement si φ en est un.

Soit $z = F(x, y)$. La formule de Taylor-Young permet d'écrire :

$$z_i = F(0, 0) + \sum_j u_{ij} x_j + v_{ij} y_j + a_i(x, x) + b_i(x, y) + c_i(y, y) + O(||(x, y)||^3)$$

Comme $F(x, 0) = x$ et $F(0, y) = y$, on a $u_{ij} = v_{ij} = \delta_{ij}$ par identification, donc le développement limité se réduit à :

$$z = x + y + b(x, y) + \cdots$$

En particulier, le théorème des fonctions implicites montre l'existence de fonctions i et i' C^∞ au voisinage de 0 telles que $i(x) *_F x = x *_F i'(x) = 0$. L'associativité assure de plus que $i = i'$, et l'identification dans un développement limité à l'ordre 2 montre que $i(x) = -x + b(x, x) + O(||x||^3)$.

Introduisons alors le commutateur $C(x, y) = i(x) *_F i(y) *_F x *_F y$. On a, à des termes d'ordre au moins 3 près :

$$i(y) *_F x *_F y = (-y + b(y, y)) + (x + y + b(x, y)) + b(-y, x + y) + \cdots = x + [x, y] + \cdots$$

donc :

$$C(x, y) = -x + b(x, x) + x + [x, y] + b(-x, x) + \cdots = [x, y] + \cdots$$

Par conséquent, si l'on considère $\Gamma(x, y, z) = C(i(y) *_F x *_F y, C(y, z))$, on a $\Gamma(x, y, z) = [i(y) *_F x *_F y, C(y, z)] + \cdots$ à des termes d'ordre au moins 4 près en x,y,z. En développant, il vient donc :

$$\Gamma(x, y, z) = [x, [y, z]] + O(||(x, y, z)||^4)$$

Il suffit pour obtenir l'identité de Jacobi de remarquer que $\Gamma(x,y,z)*_F\Gamma(y,z,x)*_F\Gamma(z,x,y) = 0$, ce qui s'obtient de manière commode en introduisant $u = z*x*i(z)*y*z$, et v, w analogues par permutations circulaires, et en observant que $\Gamma(x,y,z) = i(w)*u$.

Pour finir, l'assertion sur les morphismes résulte de ce que, si φ est un morphisme $F \to G$, on a $\varphi(C(x,y)) = C(\varphi(x),\varphi(y))$, d'où, en identifiant les premiers termes non nuls du développement limité :

$$D\varphi(0)([x,y]_F) = [D\varphi(0)(x), D\varphi(0)(y)]_G$$

et bien sûr, φ est un difféomorphisme local en 0 si et seulement si $D\varphi(0)$ est un isomorphisme.