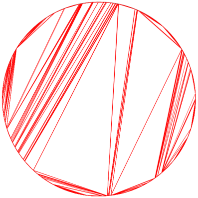
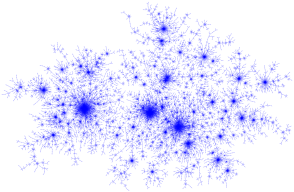
Arbres, laminations et factorisations aléatoires

Paul Thévenin

Visio-conférence

22 juin 2020


x

Introduction

Convergence d'objets aléatoires

- Ensemble $\mathbb{X}^{(n)}$ d'objets "discrets" de "taille" n donnée. A quoi ressemble un élément typique X_n pris au hasard dans cet ensemble $\mathbb{X}^{(n)}$, pour n grand ?

x

Introduction

Convergence d'objets aléatoires

- Ensemble $\mathbb{X}^{(n)}$ d'objets "discrets" de "taille" n donnée. A quoi ressemble un élément typique X_n pris au hasard dans cet ensemble $\mathbb{X}^{(n)}$, pour n grand ?
- Idée : faire converger X_n en un certain sens.

$$a_n \cdot X_n \longrightarrow X_\infty$$

x

Convergence d'objets aléatoires

- Ensemble $\mathbb{X}^{(n)}$ d'objets "discrets" de "taille" n donnée. A quoi ressemble un élément typique X_n pris au hasard dans cet ensemble $\mathbb{X}^{(n)}$, pour n grand ?
- Idée : faire converger X_n en un certain sens.

$$a_n \cdot X_n \longrightarrow X_\infty$$

- Propriétés de l'objet limite X_∞ $\Rightarrow$ Propriétés de l'objet discret X_n pour n grand.

x

Introduction

Convergence d'objets aléatoires

- Ensemble $\mathbb{X}^{(n)}$ d'objets "discrets" de "taille" n donnée. A quoi ressemble un élément typique X_n pris au hasard dans cet ensemble $\mathbb{X}^{(n)}$, pour n grand ?
- Idée : faire converger X_n en un certain sens.

$$a_n \cdot X_n \longrightarrow X_\infty$$

- Propriétés de l'objet limite X_∞ $\Rightarrow$ Propriétés de l'objet discret X_n pour n grand.
- Universalité : si une autre suite d'objets vérifie $Y_n \to X_\infty$, alors Y_n "ressemble" à X_n pour de grandes valeurs de n.

x

Plan

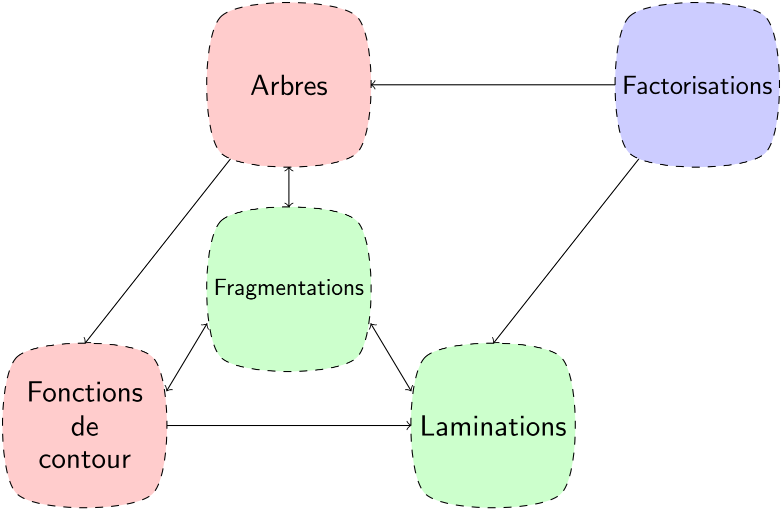
I - Arbres aléatoires

II - Laminations du disque et processus de fragmentation

III - Application aux factorisations minimales

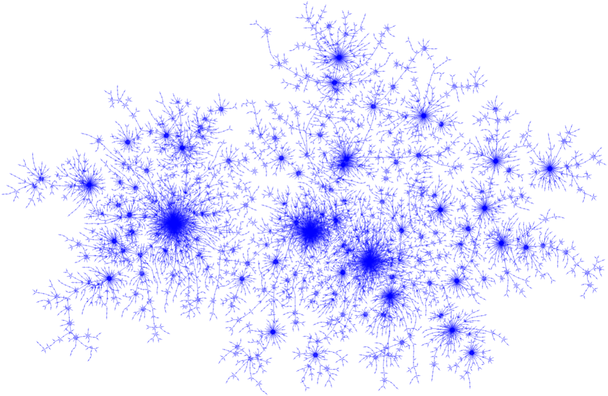
x

Plan

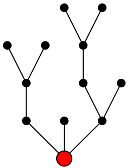


Arbres
Factorisations
Fragmentations
Fonctions de contour
Laminations

I - Arbres aléatoires

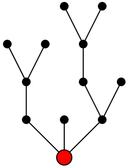


Arbres



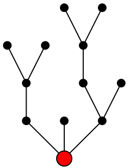
- Arbre : graphe connexe sans cycle.
- Les arbres seront toujours *plans* et *enracinés*.

Arbres



- Arbre : graphe connexe sans cycle.
- Les arbres seront toujours *plans* et *enracinés*.
- On peut voir un arbre comme un espace métrique, en le munissant de sa distance de graphe (toutes les arêtes ont longueur 1).

Arbres



- Arbre : graphe connexe sans cycle.
- Les arbres seront toujours *plans* et *enracinés*.
- On peut voir un arbre comme un espace métrique, en le munissant de sa distance de graphe (toutes les arêtes ont longueur 1).
- Soit $\mathbb{T}_n$ l'ensemble des arbres à n sommets. A quoi "ressemble" un élément de $\mathbb{T}_n$ choisi au hasard ?

Théorème [Aldous '91 '93, Le Gall '05]

Soit T_n un arbre à n sommets choisi uniformément au hasard. Il existe un espace métrique aléatoire compact $\mathcal{T}_2$ tel que, en loi :

$$\frac{T_n}{\sqrt{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{T}_2,$$

pour la distance de Gromov-Hausdorff.

x

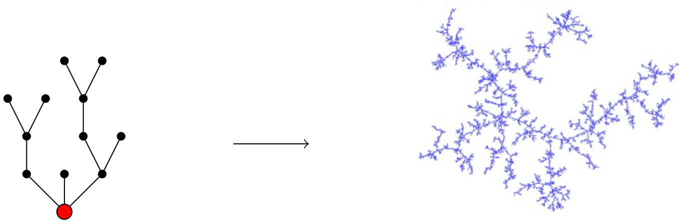
Théorème [Aldous '91 '93, Le Gall '05]

Soit T_n un arbre à n sommets choisi uniformément au hasard. Il existe un espace métrique aléatoire compact $\mathcal{T}_2$ tel que, en loi :

$$\frac{T_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{T}_2,$$

pour la distance de Gromov-Hausdorff.

- $\mathcal{T}_2$: arbre Brownien d'Aldous.



Arbres de Galton-Watson

Modèle d'arbre aléatoire "naturel" [Bienaymé 1845, Galton & Watson 1873]

x

Arbres de Galton-Watson

Modèle d'arbre aléatoire "naturel" [Bienaymé 1845, Galton & Watson 1873]

- Loi de probabilité μ sur $\mathbb{N}$ fixée.
- On part d'un individu, qui a un nombre d'enfants $\sim \mu$.
- Chacun de ses enfants a un nombre d'enfants $\sim \mu$ indépendamment, etc.

x

Arbres de Galton-Watson

Modèle d'arbre aléatoire "naturel" [Bienaymé 1845, Galton & Watson 1873]

- Loi de probabilité μ sur $\mathbb{N}$ fixée.
- On part d'un individu, qui a un nombre d'enfants $\sim \mu$.
- Chacun de ses enfants a un nombre d'enfants $\sim \mu$ indépendamment, etc.
- A quoi "ressemble" un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir n sommets, quand $n \to \infty$?

x

- Si la loi μ est suffisamment régulière, l'arbre T_n convenablement renormalisé converge.

x

- Si la loi μ est suffisamment régulière, l'arbre T_n convenablement renormalisé converge.

Théorème [Duquesne '03]

Soit $\alpha \in (1,2]$. Soit T_n un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir n sommets, de loi μ critique (i.e. de moyenne 1) et dans le domaine d'attraction d'une loi α-stable (μ est de variance finie, ou bien $\mu(n) \approx C \cdot n^{-1-\alpha}$). Alors il existe une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ et un espace métrique aléatoire compact $\mathcal{T}_\alpha$ tel que, en loi :

$$\frac{B_n}{n} T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{T}_\alpha,$$

pour la distance de Gromov-Hausdorff.

x

- Si la loi μ est suffisamment régulière, l'arbre T_n convenablement renormalisé converge.

Théorème [Duquesne '03]

Soit $\alpha \in (1,2]$. Soit T_n un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir n sommets, de loi μ critique (i.e. de moyenne 1) et dans le domaine d'attraction d'une loi α-stable (μ est de variance finie, ou bien $\mu(n) \approx C \cdot n^{-1-\alpha}$). Alors il existe une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ et un espace métrique aléatoire compact $\mathcal{T}_\alpha$ tel que, en loi :

$$\frac{B_n}{n} T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{T}_\alpha,$$

pour la distance de Gromov-Hausdorff.

- $\mathcal{T}_\alpha$ est appelé arbre stable d'indice α [Le Gall & Le Jan '98].

- Si la loi μ est suffisamment régulière, l'arbre T_n convenablement renormalisé converge.

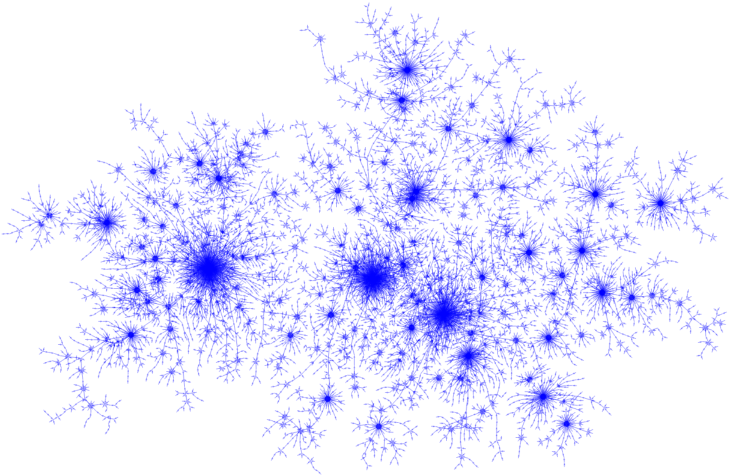
Théorème [Duquesne '03]

Soit $\alpha \in (1, 2]$. Soit T_n un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir n sommets, de loi μ critique (i.e. de moyenne 1) et dans le domaine d'attraction d'une loi α-stable (μ est de variance finie, ou bien $\mu(n) \approx C \cdot n^{-1-\alpha}$). Alors il existe une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ et un espace métrique aléatoire compact $\mathcal{T}_\alpha$ tel que, en loi :

$$\frac{B_n}{n} T_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{T}_\alpha,$$

pour la distance de Gromov-Hausdorff.

- $\mathcal{T}_\alpha$ est appelé arbre stable d'indice α [Le Gall & Le Jan '98].
- Englobe le cas des arbres uniformes (loi $Geom(\frac{1}{2})$).



Une réalisation de l'arbre 1.3-stable.

Pourquoi étudier les arbres

- Moyen naturel de modéliser des dynamiques de population.

Pourquoi étudier les arbres

- Moyen naturel de modéliser des dynamiques de population.
- "brique élémentaire" : de nombreux objets combinatoires sont codés par des arbres de manière bijective.
  Propriétés des arbres $\Rightarrow$ Propriétés de ces objets combinatoires (cartes, factorisations, ...)

x

Pourquoi étudier les arbres

- Moyen naturel de modéliser des dynamiques de population.
- "brique élémentaire" : de nombreux objets combinatoires sont codés par des arbres de manière bijective.
  Propriétés des arbres $\Rightarrow$ Propriétés de ces objets combinatoires (cartes, factorisations, ...)
- Intérêt : beaucoup d'outils pour étudier les arbres.

x

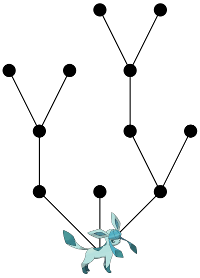
Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.

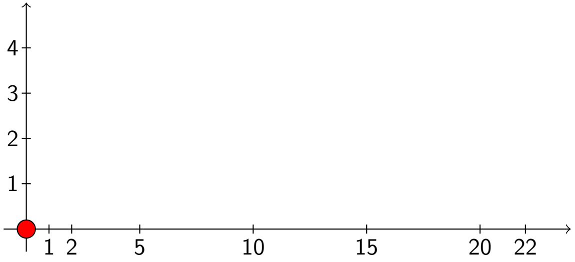
x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



T

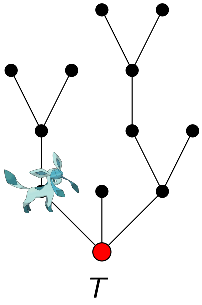


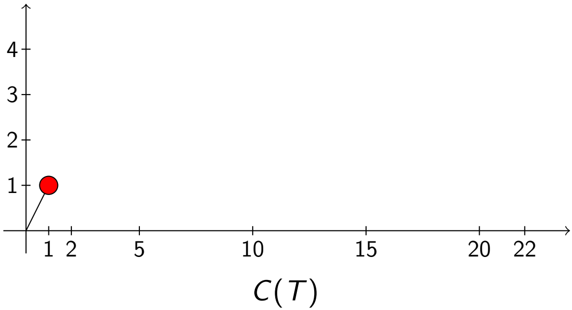
$C(T)$

x

Fonction de contour

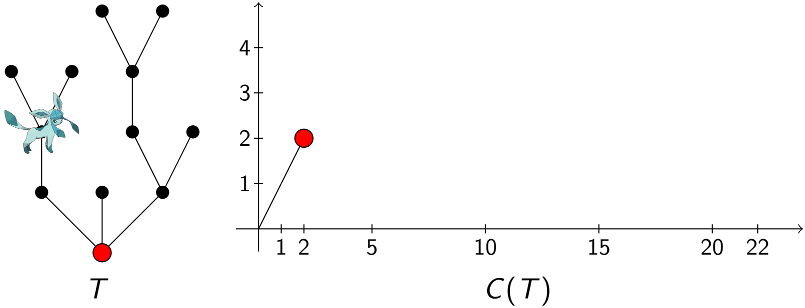
- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.





Fonction de contour

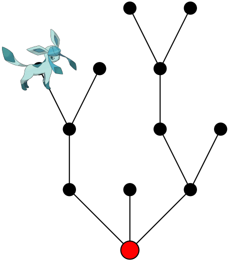
- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



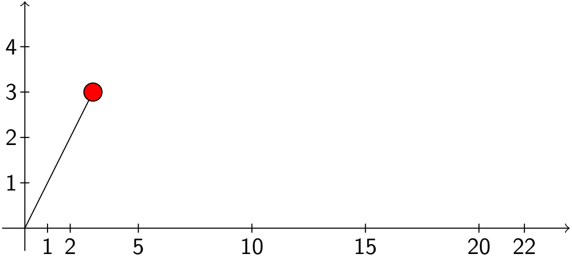
x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



T

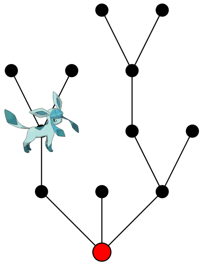


$C(T)$

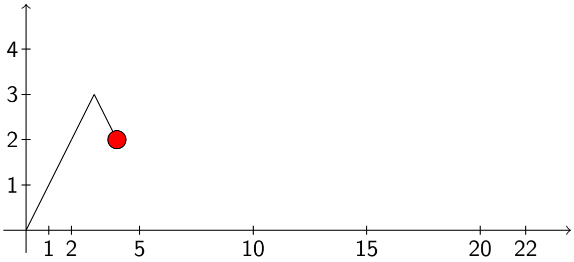
x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



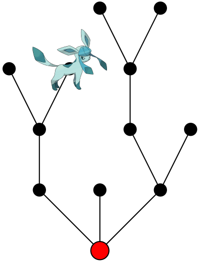
T



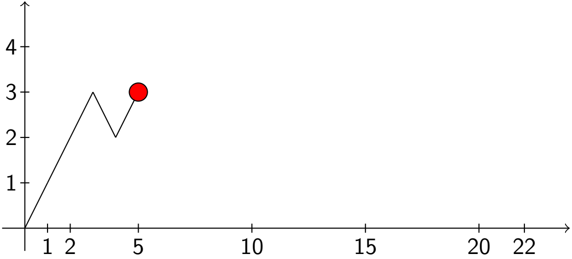
$C(T)$

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



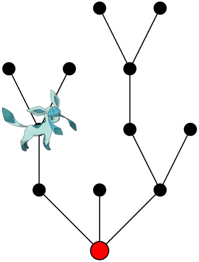
T



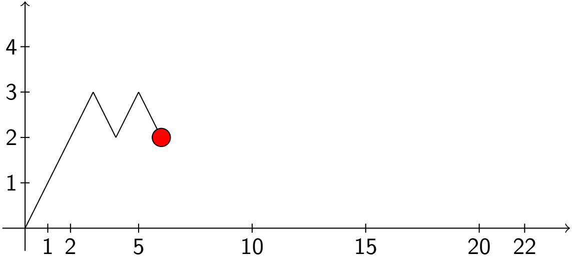
$C(T)$

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



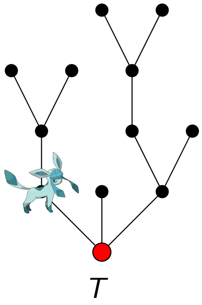
T

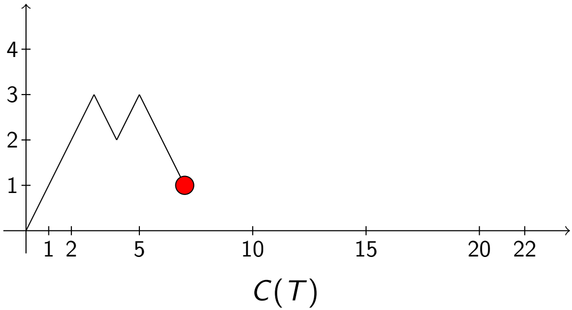


$C(T)$

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.

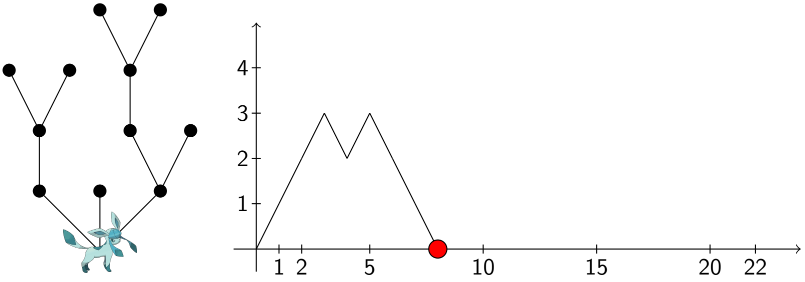




x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.

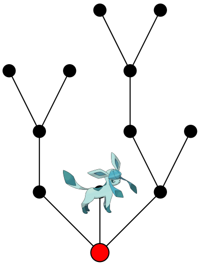


T $\quad$ $C(T)$

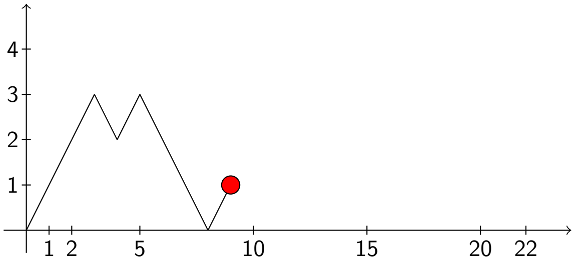
x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



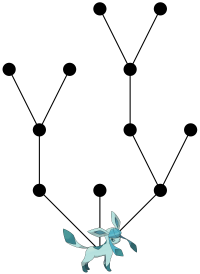
T



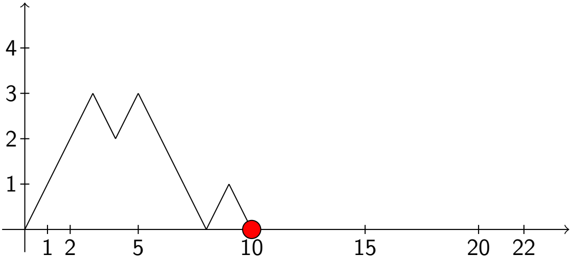
$C(T)$

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



T

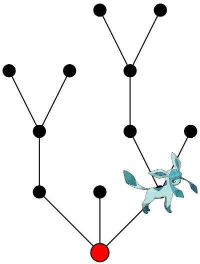


$C(T)$

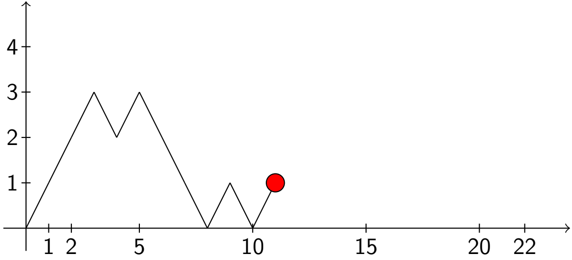
x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



T

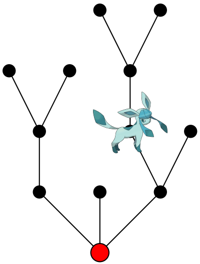


$C(T)$

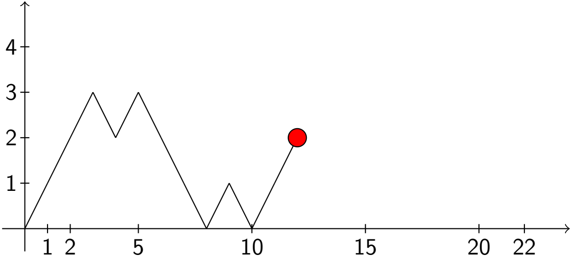
x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



T

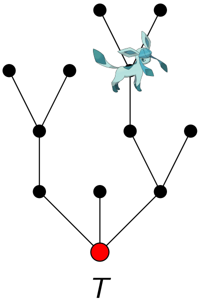


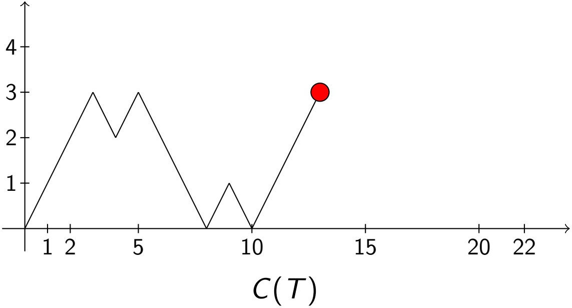
$C(T)$

x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.

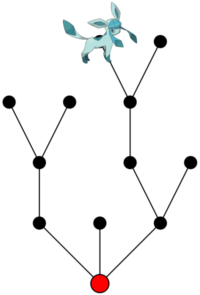




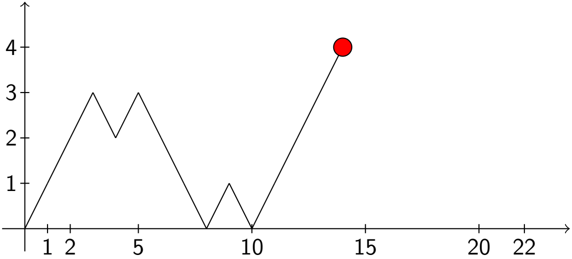
x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



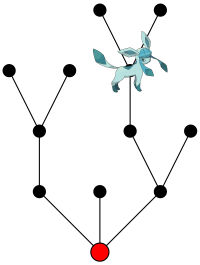
T



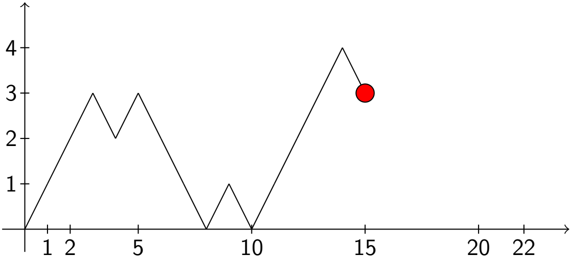
$C(T)$

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



T

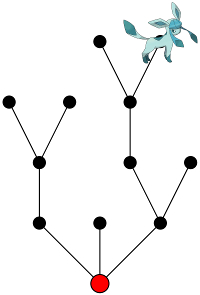


$C(T)$

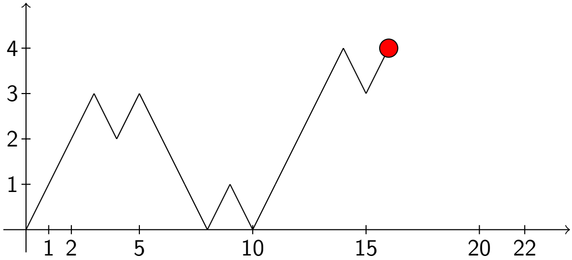
x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



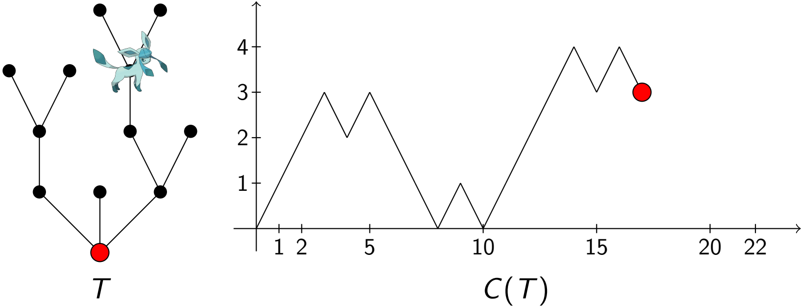
T



$C(T)$

Fonction de contour

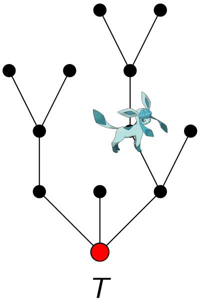
- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.

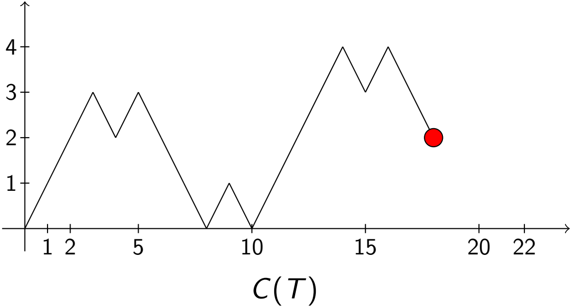


x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.

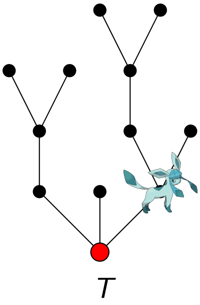


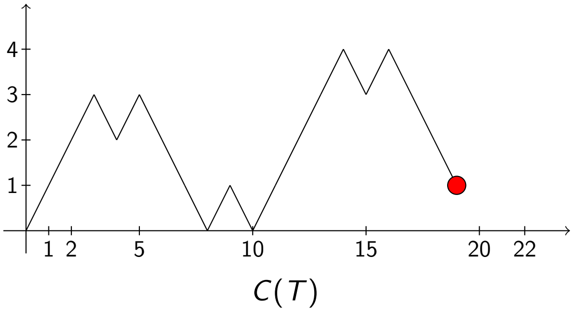


x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.

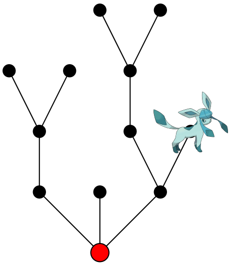




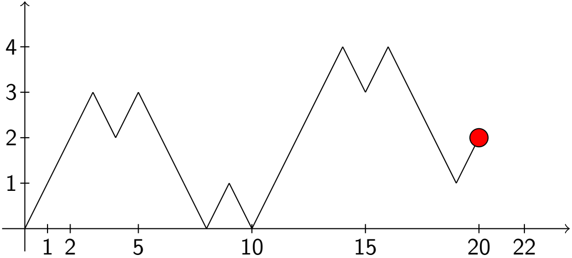
x

Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



T

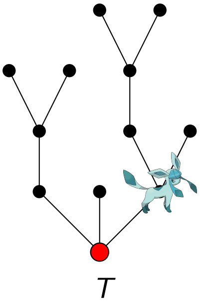


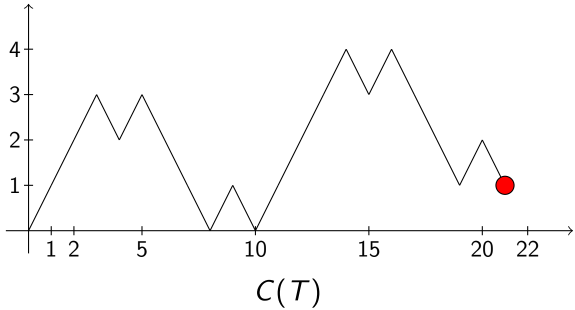
$C(T)$

x

Fonction de contour

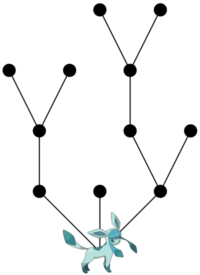
- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



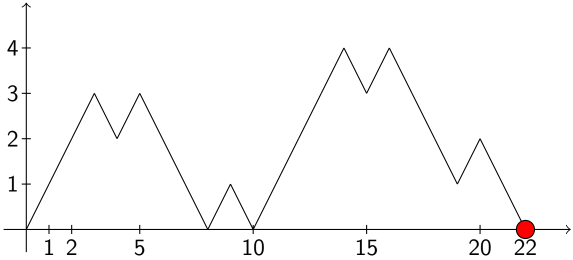


Fonction de contour

- T arbre à n sommets.
- On parcourt T de gauche à droite en partant de la racine, et on note à tout instant la distance à la racine.



T



$C(T)$

x

Théorème [Aldous '91, '93]

Soit μ une loi critique et de variance finie σ^2, et T_n un μ-GW conditionné à avoir n sommets. Alors, en loi :

$$\left(\frac{\sigma}{2}\frac{C_{2nt}(T_n)}{\sqrt{n}}\right)_{0\leq t\leq 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathfrak{e}_t)_{0\leq t\leq 1}.$$

x

Théorème [Aldous '91, '93]

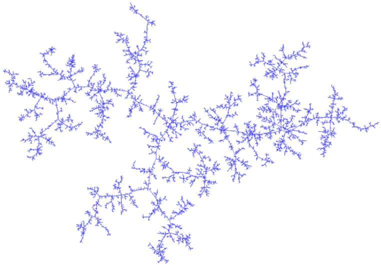
Soit μ une loi critique et de variance finie σ^2, et T_n un μ-GW conditionné à avoir n sommets. Alors, en loi :

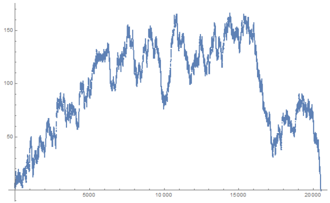
$$\left(\frac{\sigma}{2}\frac{C_{2nt}(T_n)}{\sqrt{n}}\right)_{0\leq t\leq 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathfrak{e}_t)_{0\leq t\leq 1}.$$

- $(\mathfrak{e}_t)_{0\leq t\leq 1}$: excursion Brownienne standard.

x

Une réalisation de l'arbre Brownien d'Aldous $\mathcal{T}_2$ et de sa "fonction de contour" $\mathfrak{e}$.





x

Répartition des degrés des sommets dans un arbre

- Ne se voient pas directement sur l'arbre Brownien.

x

Répartition des degrés des sommets dans un arbre

- Ne se voient pas directement sur l'arbre Brownien.
- Certains objets sont codés par des arbres, dont les degrés des sommets codent des quantités intéressantes.

Répartition des degrés des sommets dans un arbre

- Ne se voient pas directement sur l'arbre Brownien.
- Certains objets sont codés par des arbres, dont les degrés des sommets codent des quantités intéressantes.
- Dissections aléatoires d'un polygone : codent les degrés des faces [Kortchemski '12].
- Cartes aléatoires : codent les taille des composantes 2-connexes [Addario-Berry '18].

x

- Soit T_n un arbre de Galton-Watson de loi μ critique de variance finie, conditionné à avoir n sommets.

- Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $N^{\mathcal{A}}(T)$ nombre de sommets de degré sortant $\in \mathcal{A}$.

- Soit T_n un arbre de Galton-Watson de loi μ critique de variance finie, conditionné à avoir n sommets.

- Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $N^{\mathcal{A}}(T)$ nombre de sommets de degré sortant $\in \mathcal{A}$.

- Pour tout $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $N^{\mathcal{A}}(T_n)$ vérifie un théorème central limite [Kolchin '84, Minami '05, Janson '13]: pour $\mu_{\mathcal{A}} = \sum_{i \in \mathcal{A}} \mu(i)$,

$$\exists\, \sigma^2 \geq 0, \frac{N^{\mathcal{A}}(T_n) - n\mu_{\mathcal{A}}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

- Soit T_n un arbre de Galton-Watson de loi μ critique de variance finie, conditionné à avoir n sommets.
- Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $N^{\mathcal{A}}(T)$ nombre de sommets de degré sortant $\in \mathcal{A}$.
- Pour tout $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $N^{\mathcal{A}}(T_n)$ vérifie un théorème central limite [Kolchin '84, Minami '05, Janson '13]: pour $\mu_{\mathcal{A}} = \sum_{i \in \mathcal{A}} \mu(i)$,

$$\exists\, \sigma^2 \geq 0, \frac{N^{\mathcal{A}}(T_n) - n\mu_{\mathcal{A}}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

- Résultats similaires sur les arbres de Pólya [Drmota & Gittenberger '99].

x

- Soit T_n un arbre de Galton-Watson de loi μ critique de variance finie, conditionné à avoir n sommets.

- Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $N^{\mathcal{A}}(T)$ nombre de sommets de degré sortant $\in \mathcal{A}$.

- Pour tout $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $N^{\mathcal{A}}(T_n)$ vérifie un théorème central limite [Kolchin '84, Minami '05, Janson '13]: pour $\mu_{\mathcal{A}} = \sum_{i \in \mathcal{A}} \mu(i)$,

$$\exists\, \sigma^2 \geq 0, \frac{N^{\mathcal{A}}(T_n) - n\mu_{\mathcal{A}}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

- Résultats similaires sur les arbres de Pólya [Drmota & Gittenberger '99].

- Résultats de convergence fonctionnelle : processus des hauteurs des sommets de T de degré fixé [Marckert & Mokkadem '03].

x

- Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ et $u \leq 2n$, on note $N_u^{\mathcal{A}}(T)$ le nombre de sommets de degré sortant dans $\mathcal{A}$ visités par la fonction de contour de T jusqu'au temps u.

- But : regarder l'homogénéité de ces sommets dans l'arbre.

x

- Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ et $u \leq 2n$, on note $N_u^{\mathcal{A}}(T)$ le nombre de sommets de degré sortant dans $\mathcal{A}$ visités par la fonction de contour de T jusqu'au temps u.

- But : regarder l'homogénéité de ces sommets dans l'arbre.

Théorème [T., '19]

Soit μ une loi critique de variance finie σ^2, et $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$. Alors, en loi:

$$\left(\frac{C_{2nt}(T_n)}{\sqrt{n}}, \frac{N_{2nt}^{\mathcal{A}}(T_n) - nt\mu_{\mathcal{A}}}{\sqrt{n}} \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \left(\frac{2}{\sigma} \mathfrak{e}_t, \alpha\, \mathfrak{e}_t + \beta\, B_t \right)_{0 \leq t \leq 1}.$$

x

- Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ et $u \leq 2n$, on note $N_u^{\mathcal{A}}(T)$ le nombre de sommets de degré sortant dans $\mathcal{A}$ visités par la fonction de contour de T jusqu'au temps u.

- But : regarder l'homogénéité de ces sommets dans l'arbre.

Théorème [T., '19]

Soit μ une loi critique de variance finie σ^2, et $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$. Alors, en loi:

$$\left(\frac{C_{2nt}(T_n)}{\sqrt{n}}, \frac{N_{2nt}^{\mathcal{A}}(T_n) - nt\mu_{\mathcal{A}}}{\sqrt{n}} \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} \left(\frac{2}{\sigma} \mathfrak{e}_t, \alpha\, \mathfrak{e}_t + \beta\, B_t \right)_{0 \leq t \leq 1}.$$

- α, β explicites, dépendent de $\mathcal{A}$ et de μ.
- B mouvement Brownien indépendant de $\mathfrak{e}$.

x

- Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ et $u \leq 2n$, on note $N_u^{\mathcal{A}}(T)$ le nombre de sommets de degré sortant dans $\mathcal{A}$ visités par la fonction de contour de T jusqu'au temps u.

- But : regarder l'homogénéité de ces sommets dans l'arbre.

Théorème [T., '19]

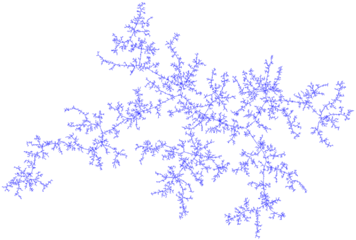
Soit μ une loi critique de variance finie σ^2, et $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$. Alors, en loi:

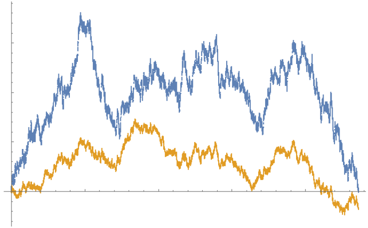
$$\left(\frac{C_{2nt}(T_n)}{\sqrt{n}}, \frac{N_{2nt}^{\mathcal{A}}(T_n) - nt\mu_{\mathcal{A}}}{\sqrt{n}} \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \left(\frac{2}{\sigma} \mathfrak{e}_t, \alpha\, \mathfrak{e}_t + \beta\, B_t \right)_{0 \leq t \leq 1}.$$

- α, β explicites, dépendent de $\mathcal{A}$ et de μ.
- B mouvement Brownien indépendant de $\mathfrak{e}$.
- Étend [Labarbe & Marckert '07] (feuilles, arbres uniformes).

x

Un arbre à 20942 sommets





Un arbre T uniforme à 20942 sommets, $C(T)$ et $\frac{N_{2nt}^{\{1\}}(T)-nt\mu(1)}{\sqrt{n}}$.

x

Idée de preuve

- Marche de Łukasiewicz $W(T)$ d'un arbre T, qui code les degrés des sommets. Processus $K^{\mathcal{A}}$ qui compte le nombre de sommets de degré sortant dans $\mathcal{A}$ visités par $W(T)$.

x

Idée de preuve

- Marche de Łukasiewicz $W(T)$ d'un arbre T, qui code les degrés des sommets. Processus $K^{\mathcal{A}}$ qui compte le nombre de sommets de degré sortant dans $\mathcal{A}$ visités par $W(T)$.
- On voit $(W(T_n), K^{\mathcal{A}}(T_n))$ comme une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ conditionnée.
  On utilise un théorème local limite *bivarié*.

x

Idée de preuve

- Marche de Łukasiewicz $W(T)$ d'un arbre T, qui code les degrés des sommets. Processus $K^{\mathcal{A}}$ qui compte le nombre de sommets de degré sortant dans $\mathcal{A}$ visités par $W(T)$.

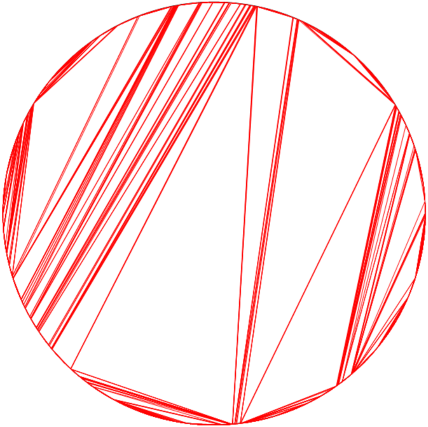
- On voit $(W(T_n), K^{\mathcal{A}}(T_n))$ comme une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ conditionnée.
  On utilise un théorème local limite *bivarié*.

- $(C(T), N^{\mathcal{A}}(T))$ dépend de manière déterministe de $(W(T), K^{\mathcal{A}}(T))$.

Idée de preuve

- Marche de Łukasiewicz $W(T)$ d'un arbre T, qui code les degrés des sommets. Processus $K^{\mathcal{A}}$ qui compte le nombre de sommets de degré sortant dans $\mathcal{A}$ visités par $W(T)$.
- On voit $(W(T_n), K^{\mathcal{A}}(T_n))$ comme une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ conditionnée.
  On utilise un théorème local limite *bivarié*.
- $(C(T), N^{\mathcal{A}}(T))$ dépend de manière déterministe de $(W(T), K^{\mathcal{A}}(T))$.
- Robustesse du résultat, qui s'étend au cas stable.

II - Laminations du disque et processus de fragmentation



x

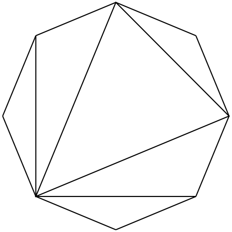
Laminations

- Lamination : ensemble fermé de cordes du disque unité qui ne se coupent pas.

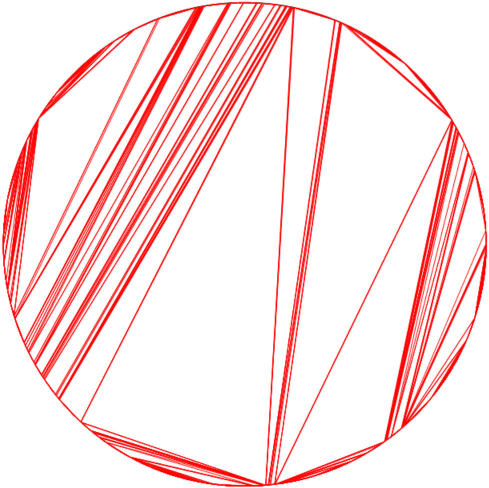
x

Laminations

- Lamination : ensemble fermé de cordes du disque unité qui ne se coupent pas.
- Convergence d'une triangulation aléatoire uniforme du n-gone vers une lamination aléatoire - la triangulation Brownienne - pour la distance de Hausdorff [Aldous '94].



La triangulation Brownienne



x

Laminations

- Lamination : ensemble de cordes du disque unité qui ne se coupent pas.
- Convergence d'une triangulation aléatoire du n-gone vers la triangulation Brownienne, pour la distance de Hausdorff [Aldous '94]
- Universalité de la triangulation Brownienne [Curien & Kortchemski '14, Bettinelli '17]

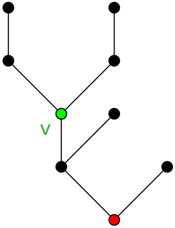
Laminations

- Lamination : ensemble de cordes du disque unité qui ne se coupent pas.
- Convergence d'une triangulation aléatoire du n-gone vers la triangulation Brownienne, pour la distance de Hausdorff [Aldous '94]
- Universalité de la triangulation Brownienne [Curien & Kortchemski '14, Bettinelli '17]
- D'autres modèles de laminations aléatoires ont été étudiés [Curien & Le Gall '11, Curien & Werner '13, Kortchemski '14]

x

Codage d'un arbre par une lamination

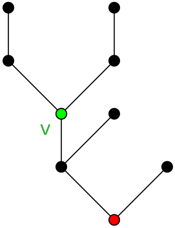
- Soit T un arbre à n sommets.

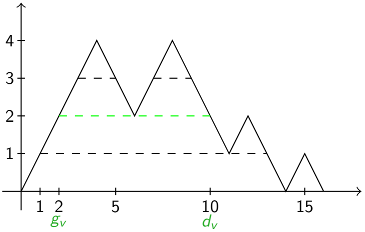


x

Codage d'un arbre par une lamination

- Soit T un arbre à n sommets.
- Pour tout sommet $v \in T$, on note g_v et d_v le premier et dernier instant où v est visité par la fonction de contour.

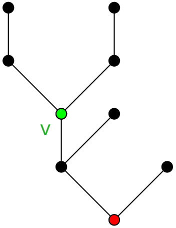


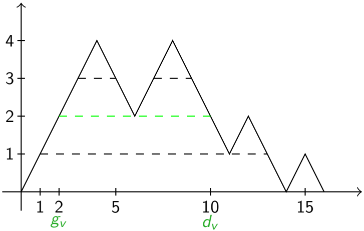


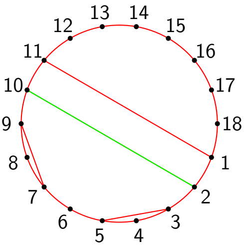
x

Codage d'un arbre par une lamination

- Soit T un arbre à n sommets.
- Pour tout sommet $v \in T$, on note g_v et d_v le premier et dernier instant où v est visité par la fonction de contour.
- On trace une corde entre les points $e^{-2i\pi g_v/2n}$ et $e^{-2i\pi d_v/2n} \Rightarrow \mathbb{L}(T)$.

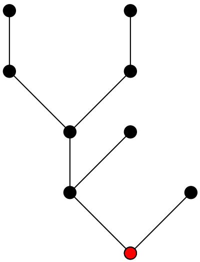


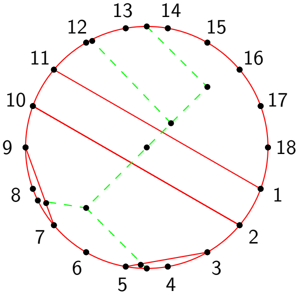




x

Dualité arbre - lamination





On peut retrouver l'arbre à partir de la lamination.

Convergence de laminations

Théorème [≈ Aldous '94]

Soit T_n un arbre de Galton-Watson de loi μ critique et de variance finie, conditionné à avoir n sommets. Il existe une lamination $\mathbb{L}_\infty^{(2)}$ telle que, en loi, pour la distance de Hausdorff :

$$\mathbb{L}(T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{L}_\infty^{(2)}$$

x

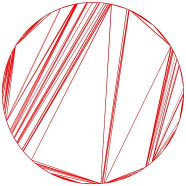
Convergence de laminations

Théorème [$\approx$ Aldous '94]

Soit T_n un arbre de Galton-Watson de loi μ critique et de variance finie, conditionné à avoir n sommets. Il existe une lamination $\mathbb{L}_\infty^{(2)}$ telle que, en loi, pour la distance de Hausdorff :

$$\mathbb{L}(T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{L}_\infty^{(2)}$$

$\mathbb{L}_\infty^{(2)}$: triangulation Brownienne



x

Fragmentation d'un arbre

- Fragmentation : étude d'un objet qui se décompose en morceaux de taille plus petite.

x

Fragmentation d'un arbre

- Fragmentation : étude d'un objet qui se décompose en morceaux de taille plus petite.
- Soit T un arbre à n sommets.
- On numérote les arêtes de T de 1 à $n-1$, uniformément au hasard.

x

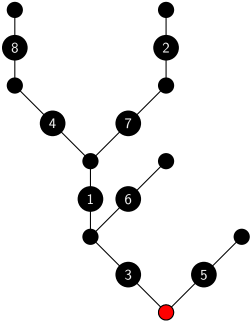
Fragmentation d'un arbre

- Fragmentation : étude d'un objet qui se décompose en morceaux de taille plus petite.
- Soit T un arbre à n sommets.
- On numérote les arêtes de T de 1 à $n-1$, uniformément au hasard.
- A l'instant $k \geq 1$, on supprime l'arête numéro k.
- On trace la corde dans le disque correspondant à l'extrémité de l'arête la plus éloignée de la racine.

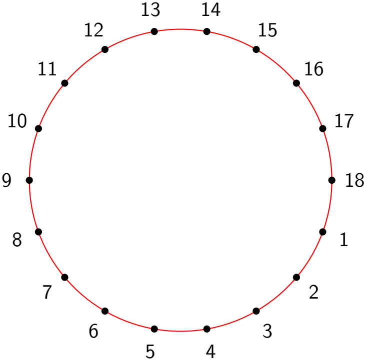
Fragmentation d'un arbre

- Fragmentation : étude d'un objet qui se décompose en morceaux de taille plus petite.
- Soit T un arbre à n sommets.
- On numérote les arêtes de T de 1 à $n-1$, uniformément au hasard.
- A l'instant $k \geq 1$, on supprime l'arête numéro k.
- On trace la corde dans le disque correspondant à l'extrémité de l'arête la plus éloignée de la racine.
- Processus de laminations $(\mathbb{L}_k(T))_{k \geq 0}$.

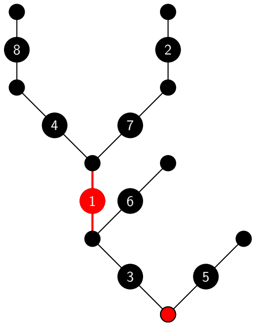
x



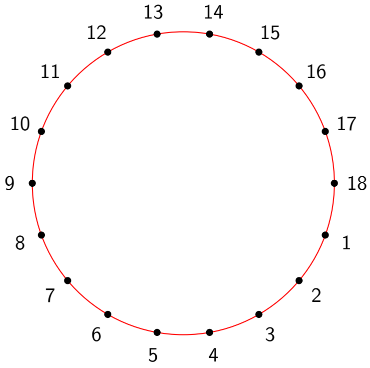
T



$\mathbb{L}_0(T)$

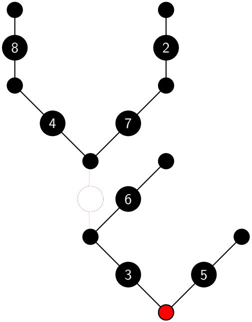


T

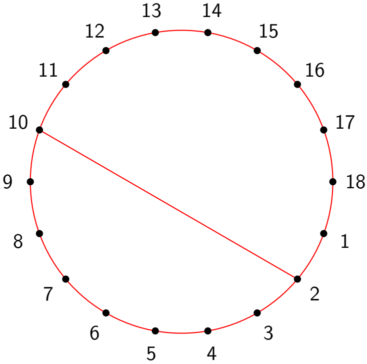


$\mathbb{L}_0(T)$

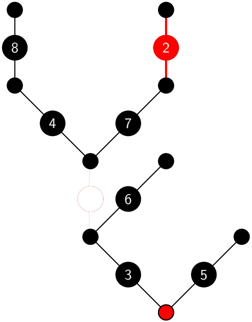
x



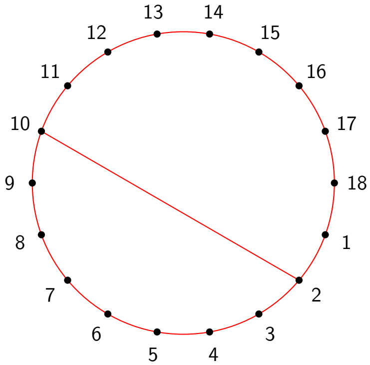
T



$\mathbb{L}_1(T)$

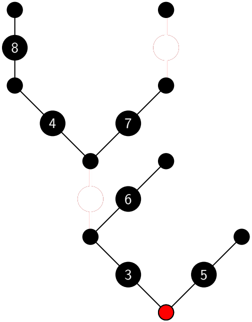


T

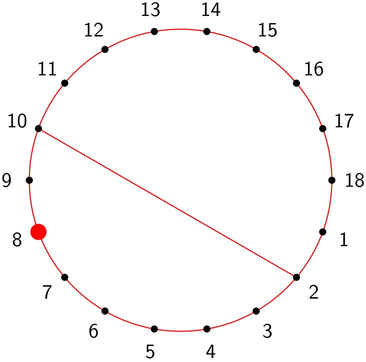


$\mathbb{L}_1(T)$

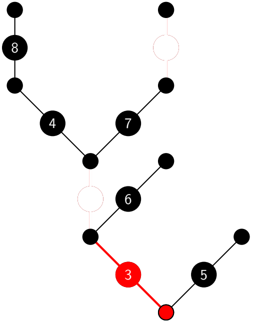
x



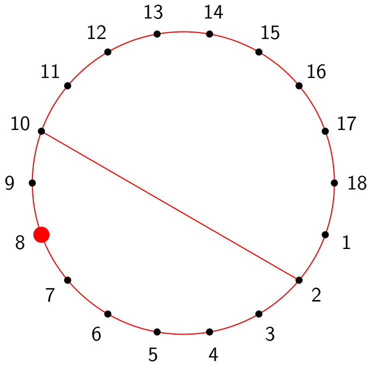
T



$\mathbb{L}_2(T)$

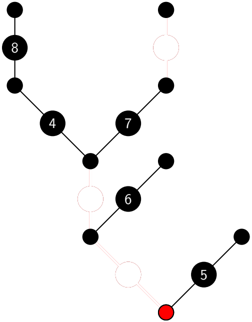


T

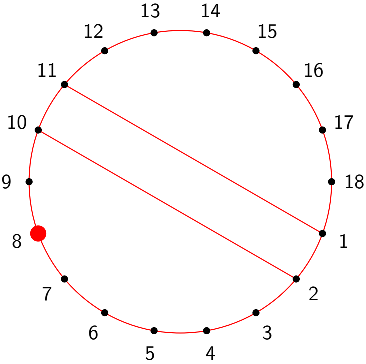


$\mathbb{L}_2(T)$

x



T



$\mathbb{L}_3(T)$

Fragmentation de l'arbre Brownien

- On peut fragmenter de manière analogue l'arbre Brownien [Aldous & Pitman '98].

x

Fragmentation de l'arbre Brownien

- On peut fragmenter de manière analogue l'arbre Brownien [Aldous & Pitman '98].
- Processus de Poisson homogène sur le squelette de $\mathcal{T}_2$, d'intensité $cd\ell$.

x

Fragmentation de l'arbre Brownien

- On peut fragmenter de manière analogue l'arbre Brownien [Aldous & Pitman '98].
- Processus de Poisson homogène sur le squelette de $\mathcal{T}_2$, d'intensité $cd\ell$.
- Pour chaque point du processus, on note g, d le premier et dernier instant où il est visité par la "fonction de contour".
  Analogue planaire d'Aldous-Pitman, réalisé par une pluie Poissonienne sous l'excursion Brownienne [Abraham & Serlet '02].

x

Fragmentation de l'arbre Brownien

- On peut fragmenter de manière analogue l'arbre Brownien [Aldous & Pitman '98].
- Processus de Poisson homogène sur le squelette de $\mathcal{T}_2$, d'intensité $cd\ell$.
- Pour chaque point du processus, on note g, d le premier et dernier instant où il est visité par la "fonction de contour".
  Analogue planaire d'Aldous-Pitman, réalisé par une pluie Poissonienne sous l'excursion Brownienne [Abraham & Serlet '02].
- On trace la corde $[e^{-2i\pi g}, e^{-2i\pi d}]$ dans le disque.

x

Fragmentation de l'arbre Brownien

- On peut fragmenter de manière analogue l'arbre Brownien [Aldous & Pitman '98].
- Processus de Poisson homogène sur le squelette de $\mathcal{T}_2$, d'intensité $cd\ell$.
- Pour chaque point du processus, on note g, d le premier et dernier instant où il est visité par la "fonction de contour".
  Analogue planaire d'Aldous-Pitman, réalisé par une pluie Poissonienne sous l'excursion Brownienne [Abraham & Serlet '02].
- On trace la corde $[e^{-2i\pi g}, e^{-2i\pi d}]$ dans le disque.
- On obtient un processus de laminations $\left(\mathbb{L}_c^{(2)}\right)_{c\in[0,\infty]}$.

x

Théorème de représentation

Théorème [T. '19]

Soit T_n un arbre de Galton-Watson de loi μ critique et de variance finie, conditionné à avoir n sommets. Alors, en loi, pour la topologie de Skorokhod :

$$\left(\mathbb{L}_{\lfloor c\sqrt{n}\rfloor}(T_n)\right)_{c\in[0,\infty]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\mathbb{L}_c^{(2)}\right)_{c\in[0,\infty]}$$

x

Théorème de représentation

Théorème [T. '19]

Soit T_n un arbre de Galton-Watson de loi μ critique et de variance finie, conditionné à avoir n sommets. Alors, en loi, pour la topologie de Skorokhod :

$$\left(\mathbb{L}_{\lfloor c\sqrt{n}\rfloor}(T_n)\right)_{c\in[0,\infty]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\mathbb{L}_c^{(2)}\right)_{c\in[0,\infty]}$$

- $c = 0 \Rightarrow$ cercle $\mathbb{S}^1$.

x

Théorème de représentation

Théorème [T. '19]

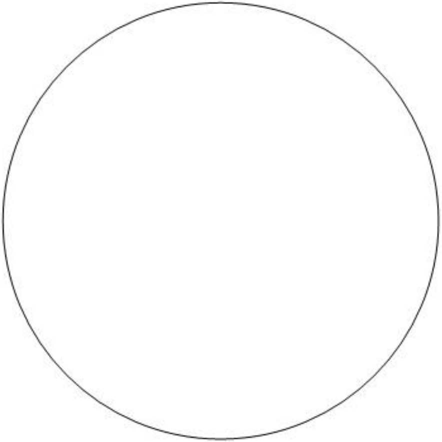
Soit T_n un arbre de Galton-Watson de loi μ critique et de variance finie, conditionné à avoir n sommets. Alors, en loi, pour la topologie de Skorokhod :

$$\left(\mathbb{L}_{\lfloor c\sqrt{n}\rfloor}(T_n)\right)_{c\in[0,\infty]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\mathbb{L}_c^{(2)}\right)_{c\in[0,\infty]}$$

- $c = 0 \Rightarrow$ cercle $\mathbb{S}^1$.
- $c = \infty \Rightarrow$ triangulation Brownienne $\mathbb{L}_\infty^{(2)}$.

x

Le processus limite



x

III - Application aux factorisations minimales

Factorisations minimales en transpositions

- On se donne un entier $n \geq 1$.

x

Factorisations minimales en transpositions

- On se donne un entier $n \geq 1$.
- Factorisation minimale en transpositions : $(n-1)$-uplet de transpositions dont le produit vaut $(1\,2\ldots n)$.

$$\mathfrak{M}_n := \left\{(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) \in \mathfrak{T}_n^{n-1}, \tau_1 \cdots \tau_{n-1} = (1\,2 \cdots n)\right\}.$$

(on lira les transpositions de gauche à droite)

x

Factorisations minimales en transpositions

- On se donne un entier $n \geq 1$.
- Factorisation minimale en transpositions : $(n-1)$-uplet de transpositions dont le produit vaut $(1\,2\dots n)$.

$$\mathfrak{M}_n := \left\{(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \in \mathfrak{T}_n^{n-1}, \tau_1 \cdots \tau_{n-1} = (1\,2 \cdots n)\right\}.$$

(on lira les transpositions de gauche à droite)

- Question : à quoi ressemble un élément de $\mathfrak{M}_n$ choisi uniformément au hasard ?

x

Historique

- Exemple : (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78) est une factorisation en transpositions du 9-cycle.

x

Historique

- Exemple : (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78) est une factorisation en transpositions du 9-cycle.
- Il y a n^{n-2} factorisations minimales du n-cycle en transpositions [Dénes '59, Moszkowski '89].

Historique

- Exemple : (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78) est une factorisation en transpositions du 9-cycle.
- Il y a n^{n-2} factorisations minimales du n-cycle en transpositions [Dénes '59, Moszkowski '89].
- Comportement d'une factorisation typique [Féray & Kortchemski '17].

x

- Factorisation : objet combinatoire abstrait !

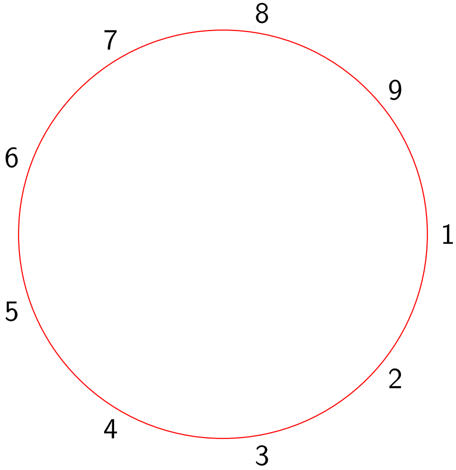
x

- Factorisation : objet combinatoire abstrait !
- On la code par une lamination du disque [Goulden & Yong '02].
  Transposition $(a\,b) \leftrightarrow$ Corde $\left[e^{-2i\pi a/n}, e^{-2i\pi b/n}\right]$.

- Factorisation : objet combinatoire abstrait !
- On la code par une lamination du disque [Goulden & Yong '02]. Transposition $(a\,b) \leftrightarrow$ Corde $\left[e^{-2i\pi a/n}, e^{-2i\pi b/n}\right]$.
- Soit $\mathcal{L}_s(f)$ l'ensemble des cordes qui correspondent aux $\lfloor s \rfloor$ premières transpositions de f.

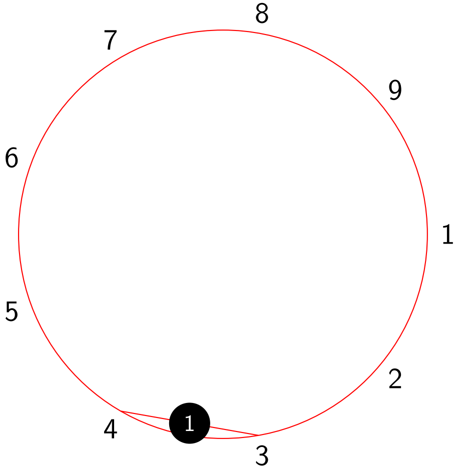
x

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



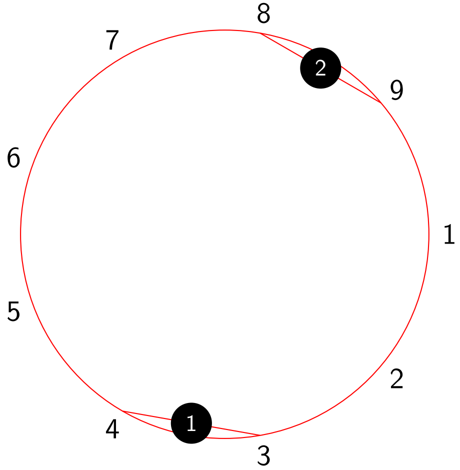
$\mathcal{L}_0(f)$

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



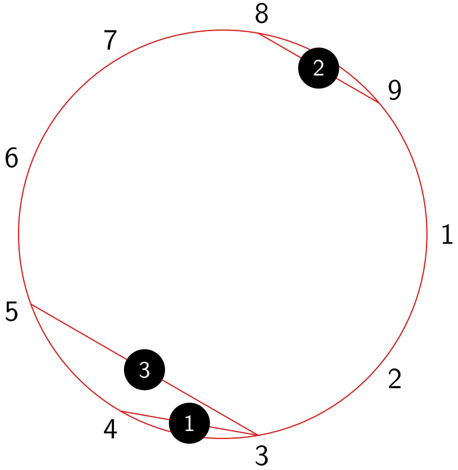
$\mathcal{L}_1(f)$

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



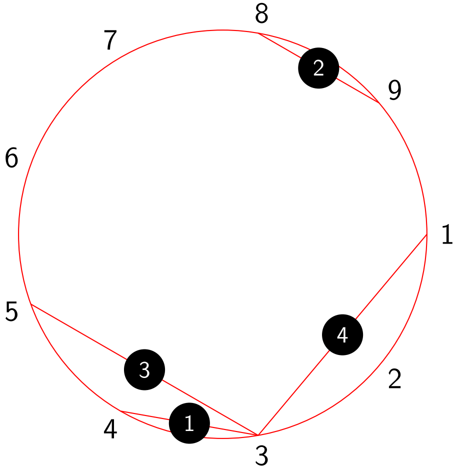
$\mathcal{L}_2(f)$

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



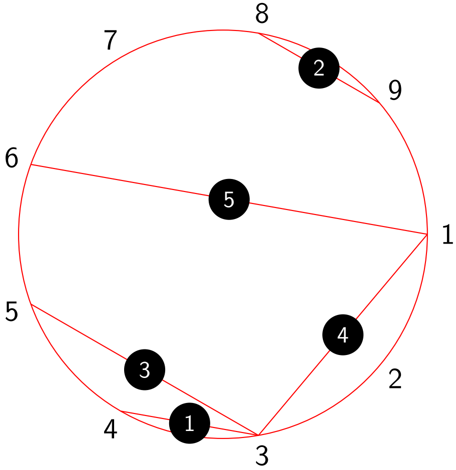
$\mathcal{L}_3(f)$

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



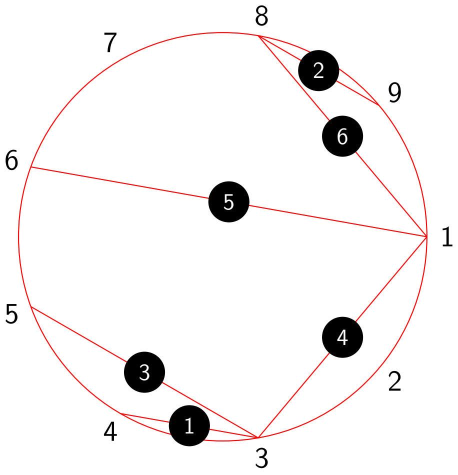
$\mathcal{L}_4(f)$

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



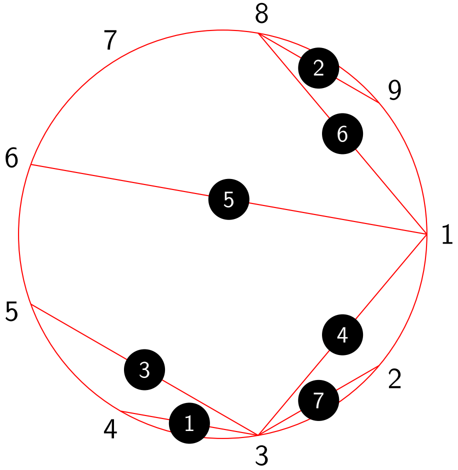
$\mathcal{L}_5(f)$

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



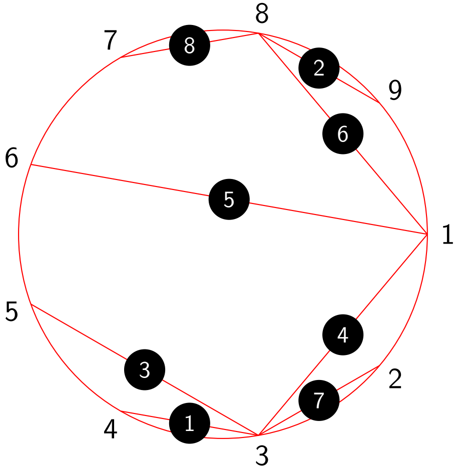
$\mathcal{L}_6(f)$

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



$\mathcal{L}_7(f)$

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



$\mathcal{L}_8(f)$

Théorème [T. '19]

Soit f_n une factorisation minimale uniforme du n-cycle en transpositions. Alors, en loi :

$$\left(\mathcal{L}_{c\sqrt{n}}(f_n)\right)_{c\in[0,\infty]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\mathbb{L}_c^{(2)}\right)_{c\in[0,\infty]}.$$

x

Théorème [T. '19]

Soit f_n une factorisation minimale uniforme du n-cycle en transpositions. Alors, en loi :

$$\left(\mathcal{L}_{c\sqrt{n}}(f_n)\right)_{c\in[0,\infty]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\mathbb{L}_c^{(2)}\right)_{c\in[0,\infty]}.$$

- [Féray & Kortchemski '17] : convergence à c fixé.
- Contient un couplage explicite.

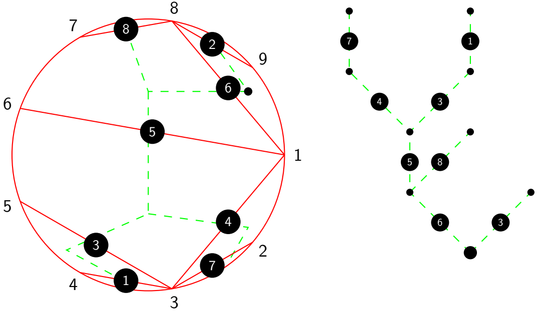
Idées de preuve

- L'arbre "dual" T_n de la lamination associée à f_n est un Galton-Watson ($Po(1)$) conditionné à avoir n sommets.

Idées de preuve

- L'arbre "dual" T_n de la lamination associée à f_n est un Galton-Watson ($Po(1)$) conditionné à avoir n sommets.

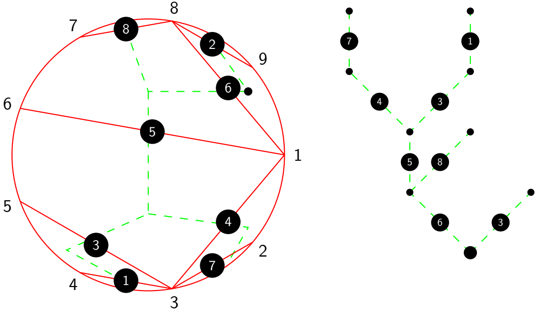
$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



Idées de preuve

- L'arbre "dual" T_n de la lamination associée à f_n est un Galton-Watson ($Po(1)$) conditionné à avoir n sommets.

$$f := (34)(89)(35)(13)(16)(18)(23)(78)$$



- Convergence du processus "dual" $(\mathbb{L}_k(T_n))_{k \geq 0}$.

Factorisations minimales générales

- Factorisation minimale du n-cycle : un k-uplet de cycles (pour $k \geq 1$) de longueur ≥ 2, dont le produit vaut $(1\,2 \cdots n)$:

$$f := (\tau_1, \dots, \tau_k),\ \tau_1 \cdots \tau_k = (1\,2 \cdots n).$$

et qui vérifient

$$\sum_{i=1}^{k} (\ell(\tau_i) - 1) = n - 1.$$

x

Factorisations minimales générales

- Factorisation minimale du n-cycle : un k-uplet de cycles (pour $k \geq 1$) de longueur ≥ 2, dont le produit vaut $(1\,2 \cdots n)$:

$$f := (\tau_1, \ldots, \tau_k),\ \tau_1 \cdots \tau_k = (1\,2 \cdots n).$$

et qui vérifient

$$\sum_{i=1}^{k} (\ell(\tau_i) - 1) = n - 1.$$

- Nombre de factorisations minimales du n-cycle en k cycles de longueurs $a_1, \ldots, a_k$: n^{k-1} [Biane '96].

- Nombre de factorisations minimales du n-cycle : $(n+1)^{n-2}$ [Biane '96].

x

Factorisations aléatoires

- Suite de poids positifs $(w_i)_{i\geq 1}$
- Poids d'une factorisation minimale f :

$$W(f) := \prod w_{\ell(\tau_i)-1}$$

x

Factorisations aléatoires

- Suite de poids positifs $(w_i)_{i\geq 1}$
- Poids d'une factorisation minimale f :

$$W(f) := \prod w_{\ell(\tau_i)-1}$$

- $f := (89)(123)(1478)(567) \Rightarrow W(f) = w_1 w_2^2 w_3.$

x

Factorisations aléatoires

- Suite de poids positifs $(w_i)_{i \geq 1}$
- Poids d'une factorisation minimale f :

$$W(f) := \prod w_{\ell(\tau_i)-1}$$

- $f := (89)(123)(1478)(567) \Rightarrow W(f) = w_1 w_2^2 w_3$.
- A n fixé, factorisation minimale aléatoire f_n^w :

$$\mathbb{P}(f_n^w = f) \propto W(f)$$

pour toute factorisation minimale f du n-cycle.

x

Factorisations aléatoires

- Suite de poids positifs $(w_i)_{i \geq 1}$
- Poids d'une factorisation minimale f :

$$W(f) := \prod w_{\ell(\tau_i)-1}$$

- $f := (89)(123)(1478)(567) \Rightarrow W(f) = w_1 w_2^2 w_3$.
- A n fixé, factorisation minimale aléatoire f_n^w :

$$\mathbb{P}(f_n^w = f) \propto W(f)$$

pour toute factorisation minimale f du n-cycle.

- Si $w_1 = 1$ et $w_i = 0$ pour $i \geq 2$: factorisation minimale en transpositions.
- Si $w_i = 1$ pour tout $i \geq 1$: factorisation minimale uniforme du n-cycle.

x

- But : faire converger f_n^w, en un certain sens.

x

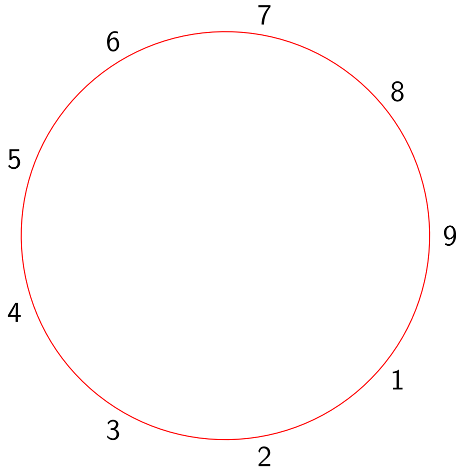
- But : faire converger f_n^w, en un certain sens.
- Codage dans le disque.
  Cycle $(a_1 \cdots a_k) \longleftrightarrow$ Polygone $\left[e^{-2i\pi a_1/n}, \dots, e^{-2i\pi a_k/n}\right]$,
  coloré en noir.

x

- But : faire converger f_n^w, en un certain sens.
- Codage dans le disque.
  Cycle $(a_1 \cdots a_k) \longleftrightarrow$ Polygone $\left[e^{-2i\pi a_1/n}, \dots, e^{-2i\pi a_k/n}\right]$,
  coloré en noir.
- On définit $\mathcal{L}_s(f)$ comme l'union du cercle et des polygones qui correspondent aux $\lfloor s \rfloor$ premiers cycles de f.

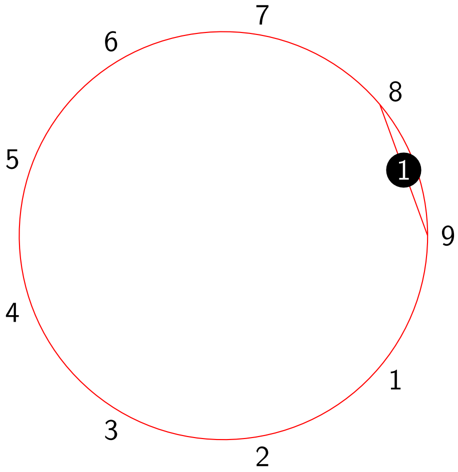
x

$$f := (89)(123)(1478)(567)$$



$\mathcal{L}_0(f)$

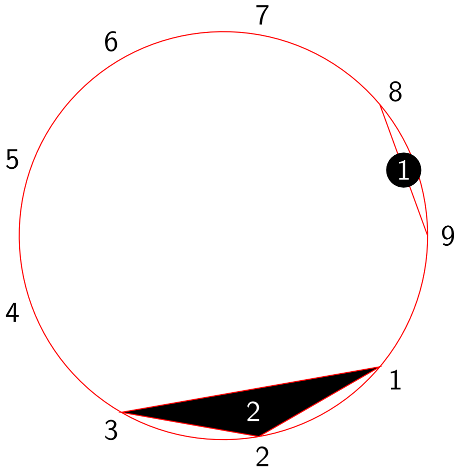
$$f := (89)(123)(1478)(567)$$



$\mathcal{L}_1(f)$

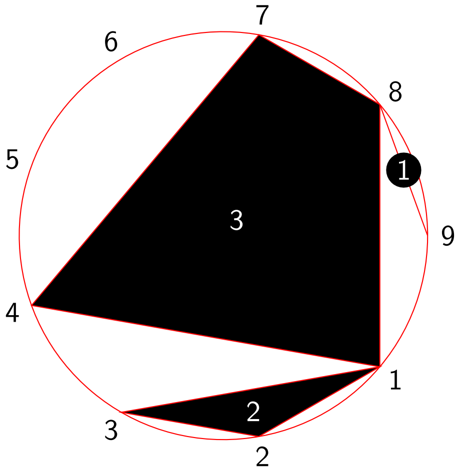
x

$$f := (89)(123)(1478)(567)$$



$\mathcal{L}_2(f)$

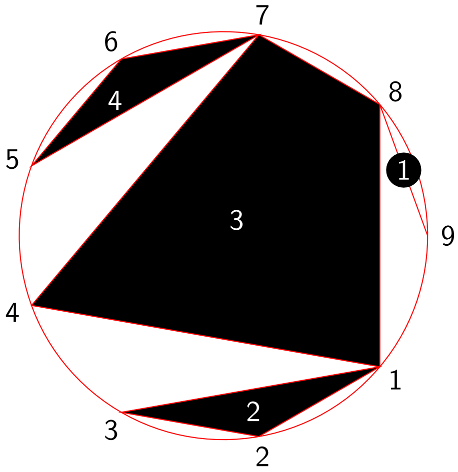
$$f := (89)(123)(1478)(567)$$



$\mathcal{L}_3(f)$

x

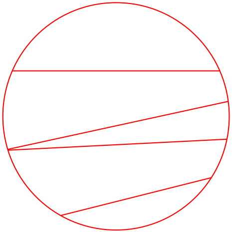
$$f := (89)(123)(1478)(567)$$



$\mathcal{L}_4(f)$

Le Rouge et le Noir

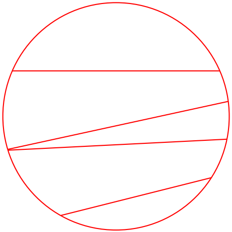
- Les laminations ne suffisent plus pour coder ces factorisations minimales générales.



x

Le Rouge et le Noir

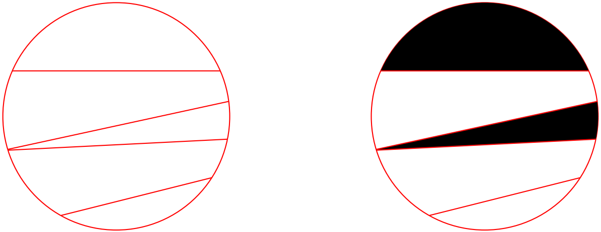
- Les laminations ne suffisent plus pour coder ces factorisations minimales générales.
- On a besoin de *laminations colorées* : laminations dont les faces peuvent être blanches ou noires.



x

Le Rouge et le Noir

- Les laminations ne suffisent plus pour coder ces factorisations minimales générales.
- On a besoin de *laminations colorées* : laminations dont les faces peuvent être blanches ou noires.



- Vues comme des produits de deux compacts : la composante rouge et la composante colorée (rouge + noir).

Résultats

Théorème [T. '20]

Soit $(w_i)_{i \geq 1}$ une suite de poids. On suppose qu'il existe ν critique de variance finie telle que $w_i = \nu(i)$ pour tout $i \geq 1$. Alors, en loi :

$$\left(\mathcal{L}_{\lfloor \gamma c \sqrt{n} \rfloor}(f_n^w) \right)_{c \in \mathbb{R}_+} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \left(\mathbb{L}_c^{(2)} \right)_{c \in \mathbb{R}_+}.$$

x

Résultats

Théorème [T. '20]

Soit $(w_i)_{i\geq 1}$ une suite de poids. On suppose qu'il existe ν critique de variance finie telle que $w_i = \nu(i)$ pour tout $i \geq 1$. Alors, en loi :

$$\left(\mathcal{L}_{\lfloor \gamma c\sqrt{n} \rfloor}(f_n^w)\right)_{c\in\mathbb{R}_+} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\mathbb{L}_c^{(2)}\right)_{c\in\mathbb{R}_+}.$$

- A l'échelle $\sqrt{n}$, on ne voit asymptotiquement que des cordes.
- γ est explicite et dépend uniquement de ν.

x

A l'infini (c'est-à-dire si on lit tous les cycles), on verra des polygones noirs.

Suite du théorème

Sous les mêmes hypothèses, en loi :

$$\mathcal{L}_\infty(f_n^w) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{L}_\infty^{(2),p}$$

x

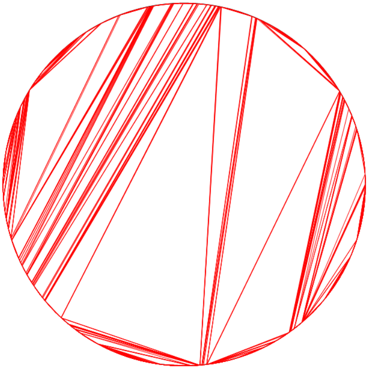
A l'infini (c'est-à-dire si on lit tous les cycles), on verra des polygones noirs.

Suite du théorème

Sous les mêmes hypothèses, en loi :

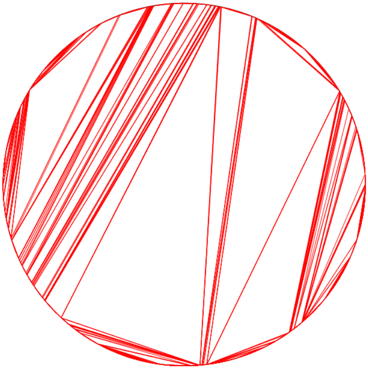
$$\mathcal{L}_\infty(f_n^w) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{L}_\infty^{(2),p}$$

- $p \in [0,1]$ explicite, ne dépend que de la variance de ν.
- Objet limite $\mathbb{L}_\infty^{(2),p}$: lamination colorée obtenue en coloriant chaque face de $\mathbb{L}_\infty^{(2)}$ indépendamment avec probabilité p.



$\mathbb{L}_\infty^{(2)}$

x

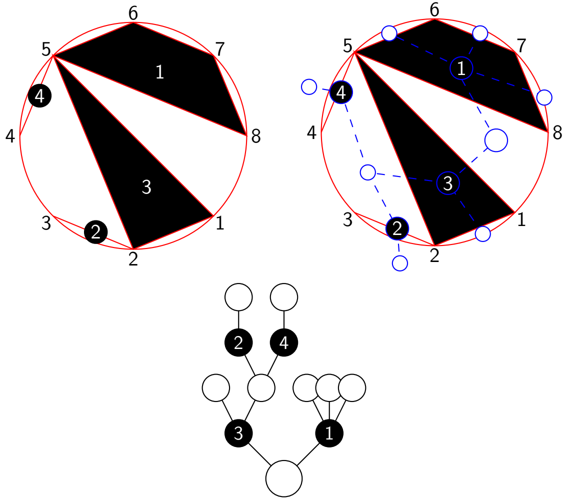


$\mathbb{L}_\infty^{(2)}$

$\mathbb{L}_\infty^{(2),3/4}$

x

Idées de preuve



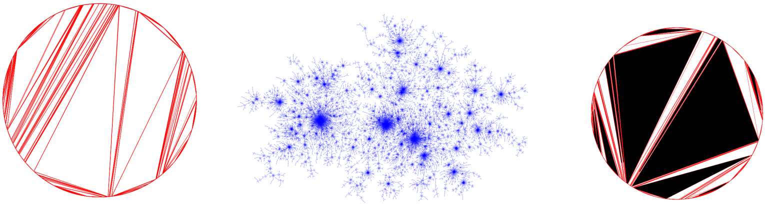
- Les méthodes développées dans le cas des factorisations en transpositions ne fonctionnent plus, car il faut tenir compte de l'arrivée de grandes faces noires. Nouveaux outils nécessaires.

- Entre autres, étude d'arbres à deux types [Le Gall & Miermont '11, Janson & Stefánsson '15]

- Les méthodes développées dans le cas des factorisations en transpositions ne fonctionnent plus, car il faut tenir compte de l'arrivée de grandes faces noires. Nouveaux outils nécessaires.
- Entre autres, étude d'arbres à deux types [Le Gall & Miermont '11, Janson & Stefánsson '15]
- Que se passe-t-il quand les factorisations ne sont plus minimales ?

x

Merci de votre attention



x

x

x

x