Paradoxe de Banach-Tarski et groupes moyennables

Romain Tessera Yves de Cornulier

12 Juin 2001

Sujet proposé par Yves Coudène

Table des matières

Le but de l'exposé est de comprendre les raisons profondes du paradoxe de Banach-Tarski. Pour cela, on introduit la notion de groupe moyennable. L'existence du paradoxe de Banach-Tarski à partir de la dimension 3 s'explique essentiellement par la non-moyennabilité de $SO(n)$ si $n \geq 3$.

Dans tout cet exposé G est un groupe (discret) agissant sur un ensemble X.

1 Paradoxe de Banach-Tarski

1.1 Puzzles et paradoxes

Dans cette partie on introduit la notion de puzzle-équivalence, qui permet notamment d'énoncer simplement le théorème de Banach-Tarski.

Définition 1. *Deux parties de X, A et B, sont dites G-puzzle-équivalentes (ou G-équidécomposables) et on écrit $A \sim B$ si A et B peuvent être partitionnées un un même nombre fini de parties G-congruentes, i.e. s'il existe des partitions $A = \coprod_{i=1}^{n} A_i$ et $B = \coprod_{i=1}^{n} B_i$ et des éléments $g_1, \ldots, g_n \in G$ vérifiant $g_i(A_i) = B_i$, $1 \leq i \leq n$.*
L'application $g : A \to B$ qui envoie $x \in A_i$ sur $g_i(x)$ est une bijection qu'on appelera G-puzzle-équivalence de A sur B.
Si $A \sim B'$ pour une partie $B' \subset B$ on écrit $A \precsim B$.

Exemple 1. Soit B_n la boule unité de $\mathbb{R}^n$, sur lequel agit $SO(n)$. Si $n \geq 3$, alors $B_n \sim 2B_n$: c'est le paradoxe de Banach-Tarski, qui sera montré à la fin de cette partie.

Proposition 1 (Théorème de Banach-Schröder-Bernstein). *Si $A \precsim B \precsim A$, alors $A \sim B$.*

Preuve. Soit $f : A \to B'$ et $g : A' \to B$ des puzzle-équivalences, avec $A' \subset A$ et $B' \subset B$. On définit $C_0 = A \setminus A'$ et par récurrence $C_{n+1} = g^{-1}f(C_n)$. Soit $C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$. Alors $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$, donc $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$. Mais on a aussi $C \sim f(C)$, d'où $A \sim B$. ☐

Corollaire 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes, pour une partie $C \subset X$:*
(i)C peut être dupliqué, i.e. il existe une partition $C = A \amalg B$ avec $C \sim A \sim B$.
(ii)Il existe deux parties A et B de C disjointes telles que $C \sim A \sim B$.

Définition 2. *Une partie $C \subset X$ est dite G-paradoxal si elle vérifie les conditions du corollaire précédent ; en particulier G est dit paradoxal s'il l'est pour l'action sur lui-même par multiplication à gauche.*

Remarque 1. S'il existe une mesure finiment additive G-invariante définie sur $\mathcal{P}(X)$, normalisée en $C \subset X$, alors il est immédiat que C n'est pas G-paradoxal.
Le théorème de Tarski, qui fait l'objet de la partie 3, établit la réciproque.

Proposition 2. *Si G est paradoxal et agit librement sur X, alors X est G-paradoxal.*

Preuve. Si $G = A \amalg B$ avec $F \sim A \sim B$, alors on considère $Y \subset X$ un ensemble contenant un représentant de chaque orbite. Alors $Y \sim A(Y) \sim B(Y)$. ☐

1.2 Le théorème de Banach-Tarski

Proposition 3. *(1) Le groupe libre non abélien F est paradoxal.*
(2)Le groupe $SO(3)$ possède un sous-groupe libre à 2 générateurs.

Preuve. (1)On pose $F = \langle a, b \rangle$. Soit A_+ (resp. A_-) l'ensemble des mots réduits commençant par a^n, $n > 0$ (resp. $n < 0$) et $A = A_+ \amalg A_-$. On a alors

$$F = A_+ \amalg aA_- \sim A_- \amalg A_+ = A \sim bA \quad \text{et} \quad A \cap bA = \emptyset$$

(2) Soit ϕ et ρ les rotations d'angle $\arccos(\frac{1}{3})$ autour des axes orientés Ox et Oz de $\mathbb{R}^3$. Elles sont représentées par les matrices :

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On va montrer que tout mot réduit non trivial en $\phi^{\pm1}$ et $\rho^{\pm1}$ diffère de l'identité. Par conjugaison par ϕ on se ramène à des mots se terminant par $\phi^{\pm1}$. Soit w un tel mot : montrons par récurrence que $w(1,0,0)$ est de la forme $(a, b\sqrt{2}, c)/3^k$, où k est la longueur du mot w, et où $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \notin 3\mathbb{Z}$, ce qui achèvera la preuve.
Si w est de longueur 1, $w = \phi^{\pm1}$, et $w(1,0,0) = (1, \pm2\sqrt{2}, 0)/3$. Supposons maintenant que $w = \phi^{\pm1}w'$ ou $w = \rho^{\pm1}w'$ avec $w'(1,0,0) = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{k-1}$. Un calcul immédiat donne $w(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$, où $a = a' \mp 4b', b = b' \pm 2a', c = 3c'$, ou $a = 3a', b = b' \mp 2c', c = c' \pm 4b'$ suivant que w commence par $\phi^{\pm1}$ ou $\rho^{\pm1}$. Il s'ensuit que a, b, c sont entiers.
Reste à montrer que b n'est pas divisible par 3. On distingue essentiellement 4 cas suivant que w soit égal à $\phi^{\pm1}\rho^{\pm1}v$, $\rho^{\pm1}\phi^{\pm1}v$, $\phi^{\pm2}v$, $\rho^{\pm2}v$, où v est éventuellement vide. Dans le premier cas $b = b' \pm 2a'$ et a' est divisible par trois, donc b n'est pas divisible par 3. Le second est analogue. Dans le troisième cas on obtient aisément $b = 2b' - 9b''$ où $v(1,0,0) = (a'', b''\sqrt{2}, c'')/3^{k-2}$ et à nouveau b n'est pas divisible par 3. Le quatrième cas est analogue. $\square$

Remarque 2. Si $\alpha \in SO(3)$ est tel que $\exists\beta_0$ tel que α et β_0 engendrent un groupe libre (et on peut montrer qu'un tel β_0 existe toujours si α est d'ordre infini), alors α et β engendrent un groupe libre pour presque tout β. En effet, si $m(X, Y)$ est un mot non nul, l'ensemble des β tels que $m(\alpha, \beta) = 1$ est une sous-variété algébrique stricte de $SO(3)$ qui est connexe, donc de codimension ≥ 1, donc est maigre et de mesure nulle.

Proposition 4 (Duplication de la sphère de Hausdorff).
La sphère S^2 est $SO(3)$-paradoxale.

Preuve. Soit F un sous groupe libre à 2 générateurs de $SO(3)$. L'ensemble D des pôles des rotations $\neq 1$ de F est dénombrable et stable par action de F. Donc F agit librement sur D^c qui est alors F-paradoxal par la proposition 2. D'autre part si x et y sont deux éléments distincts de D, toute rotation $\neq 1$ envoyant x sur y a ses pôles dans le cercle C_{xy} des points équidistants de x et y. L'union C des C_{xy} quand x≠y décrivent D, est une partie symétrique stricte de S^2 (par un argument de mesure ou par le théorème de Baire). Soit r une rotation d'ordre infini et de pôles $\notin C$ et $W = \coprod_{n\geq0} r^n(D)$: $S^2 = W^c \amalg W \sim W^c \amalg r(W) = S^2 \setminus D$ qui est F-paradoxal, par conséquent S^2 est F-paradoxal, donc $SO(3)$-paradoxal. $\square$

Remarque 3. La décomposition paradoxale de $S^2 \setminus D$ remonte à Hausdorff (1914, [6]). $S^2 \setminus D \sim S^2$ est dû à Banach et Tarski (1924, [5]).

On note $I^+(n) \simeq SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$ le groupe des déplacements affines de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1 (de Banach-Tarski). *Si $n \geq 3$, 2 parties d'intérieur non vide et bornées de $\mathbb{R}^n$ sont $I^+(n)$-puzzle-équivalentes.*

Preuve. Nous donnons les grandes lignes de la preuve. D'abord, par récurrence on peut dupliquer S^{n-1} : c'est fait pour $n = 3$. Si $n \geq 4$, soit S et N deux points opposés de S^{n-1}. Alors $S^{n-1} \setminus \{S, N\}$ est décomposable en sphères S^{n-2} situées parallèlement autour de l'axe (SN), donc peuvent simulanément subir une décomposition paradoxale, donc $S^{n-1} \setminus \{S, N\}$ est paradoxal ; on obtient facilement qu'il est puzzle-équivalent à S^{n-1}.
On peut alors facilement dupliquer la boule épointée (i.e privée de son centre) de $\mathbb{R}^n$ en dupliquant simultanément les sphères centrées qu'elle contient. En découpant des pavés dans la boule épointée dupliquée autant de fois que l'on veut, on obtient que la boule épointée est puzzle-équivalente à n'importe quel pavé ouvert borné non vide, d'où le théorème, puisqu'une partie bornée d'intérieur non vide contient et est contenue dans de tels pavés. $\square$

2 Moyennabilité

2.1 Moyennes, moyennes invariantes

Définition 3. *Soit $P^1(X)$ l'ensemble des mesures positives finiment additives, de masse 1, définies sur toutes les parties de X. Une mesure $m \in P^1(X)$ est dite G-invariante si $m(g(A)) = m(A)$ pour toute partie A de X et pour tout $g \in G$.*

Définition 4. *Un groupe est dit moyennable (à gauche) s'il existe une moyenne G-invariante sur G (qui agit sur lui-même par translation à gauche).*

Exemple 2. Tout groupe contenant un sous-groupe libre à 2 générateurs est non moyennable. En particulier, si $n \geq 3$, $SO(n)$, $O(n)$, $I^+(n)$, $I(n)$ sont non moyennables.

Il est extrêmement pratique de considérer les mesures comme des formes linéaires, car cela permet de bénéficier de tout l'outillage de l'algèbre linéaire : Hahn-Banach, topologies faibles...
G agit naturellement sur $l^\infty(X)$ par $f \mapsto g.f$ où $g.f$ est définie par $x \mapsto f(g^{-1}.x)$

Définition 5. *On définit l'ensemble des moyennes sur X par $P^1(X) = \{\Phi \in l^\infty(X)^*, (f \geq 0 \Rightarrow \Phi(f) \geq 0), \Phi(1) = 1\}$, i.e. l'ensemble des formes linéaires positives normalisées.*

Proposition 5. *L'application $\Phi : P^1(X) \to M^1(X) : m \mapsto (A \mapsto m(1_A))$ est une bijection.*

Preuve. On va construire la bijection réciproque. Si $m \in M^1(X)$, on peut étendre de façon unique par linéarité $1_A \mapsto m(A)$ sur l'ensemble des fonctions étagées. L'application linéaire obtenue est de norme 1 donc se prolonge de façon unique en une forme linéaire de norme 1 sur l'adhérence de l'espace des fonctions étagées sur X, qui est $l^\infty(X)$. La forme linéaire obtenue est bien positive et normalisée. Donc Φ est bien bijective. □

Proposition 6. *Pour tout $m \in M^1(X)$, on a $\inf f \leq m(f) \leq \sup f$.*

Preuve. Par positivité de m, $m(l) \leq m(\sup l) = \sup(l)m(1) = \sup l$ et l'autre inégalité est analogue. □
Les moyennes vivent dans l'espace $l^\infty(X)^*$ qui est très gros et mal connu ; il est très utile de pouvoir approcher les moyennes par des éléments plus maniables : les moyennes à support fini.

Proposition 7. *On définit $\delta_g \in l^\infty(X)^*$, $g \in G$, par $\delta_g(u) = u(g)$. L'ensemble $Z(X)$ des combinaisons convexes des δ_g est dense dans $M^1(G)$ pour la topologie faible$*$.*

Preuve. $M^1(X)$ est borné, et fermé pour la topologie faible$*$. Par le théorème d'Alaoglu (voir [3]), c'est un compact faible$*$. Soit $Z(X)^\wedge$ l'adhérence faible$*$ de $Z(X)$ et $m \in M^1(G) \setminus Z(X)^\wedge$. Par une des versions géométriques du théorème de Hahn-Banach il existe une forme linéaire continue l de $(l^\infty(X)^*, faible*)$, telle que $l(m) \geq l(\delta_g) + 1$ pour tout $g \in G$. Mais on a, pour tout espace E localement convexe, $(E^*, faible*)^* = E$ (voir [3]), donc $l \in l^\infty(X)$. On a $m(l) \geq l(g) + 1$ pour tout $g \in G$, donc $m(l) \geq \sup(l) + 1$, ce qui est contradictoire. □

Soit H le sous-espace de $l^\infty(G)$ engendré par les fonctions du type $g.f - f$, $g \in G$, $f \in l^\infty(G)$.

Proposition 8 (Critère de Dixmier). *Le groupe G est moyennable si et seulement si pour tout $h \in H$, $\sup h \geq 0$.*

Preuve. Si m est une moyenne invariante sur G alors pour tout $h \in H$ on a $0 = m(h) \leq \sup h$. Réciproquement si le critère de Dixmier est vérifié, alors $1 \notin H$ et l'application

$$\begin{gathered} H \oplus \mathbb{R}1 \to \mathbb{R} \\ h + \lambda \mapsto \lambda \end{gathered}$$

est de norme ≤ 1. Elle peut donc par Hahn-Banach être prolongée en une forme linéaire de norme ≤ 1 sur $l^\infty(X)$, qui est bien une moyenne invariante. □

2.2 Le théorème du point fixe

Lemme 1 (Théorème de Kakutani). *Soit K un compact convexe d'un espace localement convexe E. Alors toute application affine continue $T : K \to K$ admet un point fixe.*

Preuve. Soit $a \in K$ et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(a)$. Montrons $T(u_n) - u_n \rightharpoonup 0$. Il s'agit de montrer que pour tout $l \in E^*$, $l(T(u_n) - u_n) \to 0$. Or, comme $l(K)$ est borné (en tant qu'image continue d'un compact), $l(T(u_n) - u_n) = \frac{1}{n} l(T^n(a) - a) = O(\frac{1}{n})$.
Or T est continue pour la topologie faible de K. Soit alors x une valeur d'adhérence de la suite (u_n). Alors $T(x) = x$. □

Lemme 2 (barycentre d'un convexe probabilisé). *Soit K un convexe compact d'un espace localement convexe E, et $\mu \in C(K)^*$ une mesure de probabilité. Alors il existe un unique $x \in K$ tel que pour tout $l \in E^* \subset C(K)$, $l(x) = \langle l, \mu \rangle$. On note alors $x = \int_K t \, d\mu(t)$.*

Preuve. L'unicité est immédiate car si x, x' vérifient l'hypothèse, alors $\forall l \in E^*$, $l(x-x')=0$, ce qui implique $x = x'$, par une application classique de Hahn-Banach.
Pour $l \in E^*$ on note $K_l = \{x \in K,\ l(x) = \langle l, \mu\rangle\}$. On veut montrer $\bigcap_{l\in E^*} K_l \neq \emptyset$. Par compacité, il suffit de montrer que les intersections finies sont non vides.
Soit donc $l_1, \dots, l_n \in E^*$ et supposons $\bigcap_{i=1}^n K_l = \emptyset$. On définit

$$L : \begin{array}{c} K \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (l_1(x), \dots, l_n(x)) \end{array}$$

$L(K)$ est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Par hypothèse, $(\langle l_1, \mu\rangle, \dots, \langle l_n, \mu\rangle) \notin L(K)$. Il existe donc (séparation d'un point et d'un convexe compact en dimension finie) une forme linéaire $l \in E^*$ et $\epsilon > 0$ tels que pour tout $x \in K$, $l(\langle l_1, \mu\rangle, \dots, \langle l_n, \mu\rangle) \geq l(L(x)) + \epsilon$. Si on écrit $l(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, on a $\forall x \in K \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle l_i, \mu\rangle \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i l_i(x) + \epsilon$. Donc, en appliquant μ, on obtient $0 \geq \epsilon$, qui est la contradiction recherchée. $\square$

Théorème 2. *On a équivalence entre :*
(1) G est moyennable.
(2) Pour toute action de G sur un ensemble X, il existe une moyenne G-invariante sur X.
(3) Pour toute action continue de G sur un compact X, il existe une mesure de probabilité (i.e. une forme linéaire positive $\mu \in C(X)^*$ normalisée) G-invariante sur X.
(4) G a la propriété du point fixe : toute action affine et continue de G sur un convexe compact non vide d'un espace vectoriel localement convexe admet un point fixe.

Preuve.
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $x \in X$ et $\sigma : g \mapsto g.x$: l'image directe par σ d'une moyenne invariante sur G est une moyenne invariante sur X.
(2) $\Rightarrow$ (1) Évident.
(4) $\Rightarrow$ (2) Supposons que G vérifie la propriété du point fixe. $M^1(G)$ s'identifie d'après la proposition précédente à une partie de $l^\infty(G)^*$, convexe fermée, et bornée, donc compacte pour la topologie faible$*$. Or G agit affinement et continûment sur $M^1(G)$ par $g.m(A) = m(g^{-1}(A))$ donc il existe un point fixe i.e. une moyenne invariante.
(2) $\Rightarrow$ (3) Si G agit de façon continue sur X compact, il existe sur X une moyenne invariante, i.e. une forme linéaire positive normalisée sur $l^\infty(X)$. Sa restriction à $C(X)$ est une forme linéaire positive normalisée invariante.
(3) $\Rightarrow$ (4) Réciproquement, si G agit affinement et continûment sur un compact convexe non vide K, alors il existe sur K une mesure de probabilité G-invariante μ. Alors le μ-barycentre de K, $\int_K \zeta d\mu(\zeta)$, est un point fixe par G. $\square$

Théorème 3.
(1) Les groupes finis sont moyennables.
(2) Si G est moyennable et H est un sous-groupe de G, alors H est moyennable.
(3) Si H est un sous-groupe moyennable, d'indice fini dans G, alors G est moyennable.
(4) Si $1 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} P \to 1$ est exacte, alors on a : G moyennable $\iff$ H et P sont moyennables.
(5) Tout groupe commutatif est moyennable.
(6) Mieux : les groupes résolubles sont moyennables.
(7) Une limite inductive de groupes moyennables est moyennable.
(8) G est moyennable si et seulement si tous ses sous-groupes de type fini sont moyennables.

Preuve.
(1) C'est immédiat en normalisant la mesure de comptage.
(2)Supposons G moyennable et soit m une moyenne invariante. H agit sur G par multiplication à gauche. Soit L un système de représentants des orbites. On définit, pour $S \subset H$, $m'(S) = m(SH)$ qui définit bien une moyenne invariante sur H.
(3) Si G agit de manière affine et continue sur un convexe compact, soit K l'ensemble compact convexe non vide des points fixes de H. Si $x \in K$, gx ne dépend que de la classe à droite modulo H de $g \in G$. $\frac{1}{|G/H|} \sum_{g \in G/H} g.x$ est un point fixe par G.
(4)Si G est moyennable, soit m une moyenne invariante. H est moyennable par (2), et on définit une moyenne invariante sur P par $m'(S) = m(p^{-1}(S))$.
Réciproquement, supposons H et P moyennables. Soit une action affine continue sur un convexe

compact K. Elle induit une action de H qui est moyennable, si bien que le compact convexe K' des points fixes de cette action est non vide. G agit sur K' par applications affines continues et H est contenu dans le noyau de cette action : l'action passe au quotient, i.e. induit une action de P sur K'. Cette action admet un point fixe qui est donc fixe pour l'action de G.
(5) Soit une action affine continue de G commutatif sur un convexe compact K. L'ensemble K_g des points fixes de $g \in G$ est non vide (théorème de Kakutani) et compact convexe. Si $g' \in G$, comme g et g' commutent, K_g est stable par g' qui admet alors un point fixe $\in K_g$, i.e. $K_g \cap K_{g'} \neq \emptyset$. Par récurrence on obtient que les intersections finies des K_g, $g \in G$ sont non vides, et donc par compacité $\bigcap_{g\in G} K_g \neq \emptyset$, i.e. l'action admet un point fixe.
(6) C'est une conséquence immédiate de (4) et (5).
(7) Si $G = \varinjlim G_i$, où $\{G_i\}$ est un système inductif de groupes moyennables, et si G agit affinement et continûment sur K convexe compact non vide, soit K_i l'ensemble convexe compact non vide des points fixes de G_i. K_i est une famille directe (pour $\supset$) de compacts non vides donc est d'intersection non vide.
(8) Se déduit de (2) et (7). □

Remarque 4. La question posée par Day (dite conjecture de Von Neumann), qui demande si tout groupe non moyennable contient nécessairement un sous-groupe libre à 2 générateurs, a été résolue négativement par Ol'shanskii, qui a construit un contre-exemple (difficile) à 2 générateurs, et a même récemment annoncé la construction, par lui et Sapir, d'un contre-exemple de présentation finie.
Il existe des contre-exemples plus connus et explicitables ici : les groupes de Burnside $B(2,n)$ pour $n \geq 665$ impair, où $B(m,n)$ est le groupe à m générateurs avec les relation $x^n = 1$ pour tout x dans le groupe. Il est clair que ces groupes ne contiennent aucun sous-groupe libre. On montre leur non-moyennabilité par des arguments de marches aléatoires sur ces groupes (voir [1]).

Exemple 3. Pour $n \leq 2$, $SO(n)$, $O(n)$, $I^+(n)$, $I(n)$ sont moyennables.

Proposition 9. *On ne peut pas dupliquer la boule unité de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ avec des isométries.*

Preuve. Pour $n = 1, 2$, on va construire sur les parties bornées de $\mathbb{R}^n$ une mesure finiment additive, normalisée en $[0,1[^n$, et invariante par isométries.
Faisons le cas où $n = 1$. $\mathbb{R}$ est moyennable et agit sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, donc par le théorème 2, il existe une mesure invariante sur le cercle, qu'on relève en une mesure m_0 finiment additive de masse 1 définie sur les parties de $[0,1[$. Si A est une partie bornée de $\mathbb{R}$, alors on peut écrire de façon unique $A = \coprod_{n\in\mathbb{Z}}(A_n + n)$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille à support fini de parties de $[0,1[$, et on définit par $m_1(A) = \sum m_0(A_i)$ une mesure finiment additive sur les parties bornées de $\mathbb{R}$, invariante par translation, et normalisée en [0,1[. Enfin, en posant $m(A) = \frac{m_1(A)+m_1(-A)}{2}$, on obtient une mesure finiment additive invariante par isométries.
Si n=2, on obtient de façon analogue une mesure finiment additive sur les parties bornées de $\mathbb{R}^2$, invariante par translation, et normalisée en $[0,1[^2$. Une telle mesure est entièrement déterminée par sa restriction au disque unité D. Soit K l'ensemble des mesures qui vérifient ces conditions. On peut alors identifier K à une partie de $M^1(D)$. On vient de voir que K est non vide ; il est aisé de voir que K est convexe compact, stable par $O(2)$ (car $\mathbb{R}^2 \lhd I(2)$). Comme $O(2)$ est moyennable, on considère un point fixe de K pour l'action de $O(2)$. Il induit bien une mesure sur les parties bornées de $\mathbb{R}^2$, invariante par $I(2)$, et normalisée en $[0,1[^2$. □

2.3 Conditions de Følner et graphes de Cayley

Définition 6. *On appelle ici filtre dans l'espace topologique E une application $\Gamma \to E$, où Γ est un ensemble ordonné inductif (2 éléments quelconques ont un majorant commun). Un filtre γ : $\Gamma \to E$ converge vers x si pour tout Ω voisinage de x il existe $u \in \Gamma$ tel que pour tout $v \geq u$ on ait $\gamma(v) \in \Omega$; x est dit valeur d'adhérence du filtre si pour tout Ω voisinage de x et $u \in \Gamma$ $\exists v \geq u$, tel que $\gamma(v) \in \Omega$. On voit facilement que pour toute partie F de E, $\bar{F}$ est l'ensemble des limites de filtres à valeurs dans F, que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'un filtre est fermé, non vide si E est compact.*

On rappelle que $Z(G) \subset l^1(G) \subset l^\infty(G)^*$ désigne l'ensemble des fonctions : $G \to \mathbb{R}$ positives, à support fini, et de somme 1. On rappelle (cf. proposition 7) que $Z(G)^\wedge = M^1(G)$.

Proposition 10 (Day). *G est moyennable si et seulement s'il existe un filtre $\{f_i\}$ dans $Z(G)$ tel que $\|g.f_i - f_i\|_1 \to 0$ pour tout $g \in G$.*

Preuve. Il existe un filtre $\{f_\alpha\}$, $f_i \in Z(G)$, défini sur l'ensemble inductif Γ tel que $g.f_\alpha - f_\alpha \rightharpoonup 0$ pour tout $g \in G$. Pour tout g et pour tout α, 0 appartient à la fermeture faible$*$ de l'enveloppe convexe des $g.f_\beta - f_\beta$, $\beta \geq \alpha$, donc à sa fermeture forte, car la topologie faible$*$ de $l^\infty(X)^*$ induit la topologie faible de $l^1(X)$. On peut donc, pour tout $(\alpha, n) \in \Gamma \times \mathbb{N}$ choisir $f_{\alpha,n}$ combinaison convexe des f_β, $\beta \geq \alpha$ telle que $\|g.f_{\alpha,n} - f_{\alpha,n}\|_1 \leq 2^{-n}$. En considérant un tel filtre pour tout $g \in G$ on obtient un filtre produit, défini sur l'ensemble ordonné produit $(\Gamma \times \mathbb{N})^G$. Le filtre obtenu convient. Réciproquement, si on a un tel filtre, il est immédiat que toutes ses limites faibles$*$ (et il en existe par compacité faible$*$ de $M^1(G)$) sont G-invariantes. $\square$

Exemple 4. Si $G = \mathbb{Z}$, la suite $u_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \delta_k$ vérifie les hypothèses précédentes. Toutes ses valeurs d'adhérence faible$*$ sont des moyennes invariantes sur $\mathbb{Z}$.

Théorème 4 (Conditions de Følner). *G est moyennable si et seulement si pour toute partie finie $F \subset G$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partie finie $A \subset G$ telle que pour tout $g \in F$ on a*

$$|g(A) \vartriangle A| < \epsilon |A|$$

Preuve. Supposons que G vérifie les conditions de Følner. On va montrer qu'il vérifie le critère de Dixmier. Soit $h \in H$ de la forme $h = \sum_{i=1}^{n} (g_i^{-1} f_i - f_i)$. Soit $F = \{g_1, \ldots, g_n\}$, $\epsilon > 0$ et $A \subset G$ tel que pour tout $g \in F$ on a $|g(A) \vartriangle A| \leq \epsilon |A|$. Posons $T(g) = \sum_{a \in A} h(ag)$.
Si $-\delta = \sup h \leq 0$, $|T(g)| \geq \delta |A|$. D'autre part

$$T(g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{a \in A} (f_i(g_i a g) - f_i(ag)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{a \in g_i A} f_i(ag) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{a \in A} f_i(ag)$$

Comme $|g_i A \vartriangle A| < \epsilon |A|$ on a :

$$\delta |A| \leq |T(g)| \leq n \epsilon |A| \max\{\|f_i\|_\infty, 1 \leq i \leq n\}.$$

Comme n et h sont fixés, en faisant tendre ϵ vers 0 on obtient $\delta = 0$, donc G vérifie bien le critère de Dixmier.
Réciproquement, supposons que G est moyennable. D'abord définissons pour $S \subset G$, S fini, $\mu_S = \frac{1}{|S|} 1_S$ Écrivons $F = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Il existe alors, par la proposition 10, $f \in Z(G)$ tel que

$$\|g_j.f - f\|_1 < \frac{\epsilon}{k},\ 1 \leq j \leq k$$

On voit facilement que f peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{A_i},\ |A_i| < \infty,\ A_i \supset A_{i+1},\ \lambda_i > 0 \textit{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

On définit une mesure sur $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ par $m(K) = \sum_{i \in K} \lambda_i$. Pour $1 \leq j \leq k$ soit

$$K_j = \left\{ i, \frac{|g_j(A_i) \vartriangle A_i|}{|A_i|} < \epsilon \right\}$$

Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus K_j$, $\frac{|g_j(A_i) \vartriangle A_i|}{|A_i|} \leq \epsilon$. Pour $g \in G$ on vérifie que

$$\|g.f - f\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{|g(A_i) \vartriangle A_i|}{|A_i|}$$

Donc pour $1 \leq j \leq k$

$$\frac{\epsilon}{k} > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{|g_j(A_i) \vartriangle A_i|}{|A_i|}$$

puis :

$$\frac{\epsilon}{k} > \sum_{i \in N \setminus K_j} \lambda_i \frac{|g_j(A_i) \vartriangle A_i|}{|A_i|} \geq \epsilon \sum_{i \in N \setminus K_j} \lambda_i = \epsilon . m(N \setminus K_j)$$

Par conséquent, par un argument de mesure, $\bigcap_{j=1}^{k} K_j \neq \emptyset$. Choisissons $i \in \bigcap_{j=1}^{k} K_j$ et posons $A = A_i$. Alors A satisfait les conditions du théorème. $\square$

Définition 7. *Soit G est un groupe et S une partie finie de G (en général supposée génératrice). On appelle graphe de Cayley de G (relatif à S) le graphe dont les sommets sont les éléments de G et dont les arêtes relient un sommet $g \in G$ aux élements de la forme $s^{\pm 1}g$, $s \in S$. Pour une partie $A \subset G$, on définit la frontière (relative à S) de A par $\partial_S A = \{g \in A, \exists s \in S\ s^{\pm 1}g \notin A$, i.e. ce sont les éléments de A liés par une arête à un élément de A^c.*

Lemme 3. *Soit S et S' sont 2 parties finies de G avec S génératrice. Alors il existe une constante C telle que, pour toute partie A finie*

$$|\partial_{S'} A| \leq C |\partial_S A|$$

Preuve. Si $S \supset S'$ c'est immédiat. Si $S \subset S'$, on choisit n tel que tout élement de S' puisse être obtenu par un mot de $\leq n$ lettres en les élements de $S^{\pm 1}$. Soit $a \in \partial_{S'} A$: il existe alors un n-uplet $(s_1, \ldots, s_n)$ d'éléments de $S^{\pm 1} \cup \{1\}$ tel que $b = s_1 s_2 \ldots s_n a \notin A$. On associe alors à a le n-uplet $(s_1^{-1} b, s_2, \ldots s_n) \in \partial_S A \times (S^{\pm 1} \cup \{1\})^{n-1}$. Cette application est injective, donc

$$|\partial_{S'} A| \leq |(2|S| + 1)|^{n-1} |\partial_S A|$$

Pour S, S' quelconques, il suffit de le faire avec $S \subset S \cup S'$ puis $S \cup S' \supset S'$. $\square$

Théorème 5. *Soit G est un groupe et S un système fini de générateurs. Alors G est moyennable si et seulement si $\inf\{\frac{|\partial_S A|}{|A|}, A \subset G, 0 < |A| < \infty\} = 0$.*

Preuve. Si G est moyennable, il vérifie les conditions de Følner qu'il suffit d'appliquer à S et un ϵ arbitrairement petit. Réciproquement, si $\inf\{\frac{|\partial_S A|}{|A|}, A \subset G, 0 < |A| < \infty\} = 0$ pour une partie finie S génératrice, alors, par le lemme précédent $\inf\{\frac{|\partial_{S'} A|}{|A|}, A \subset G, 0 < |A| < \infty\} = 0$ pour toute partie S' finie. Si $\epsilon > 0$ et si F est une partie finie de G, il existe alors une partie finie non vide $A \subset G$ telle que $\frac{|\partial_F A|}{|A|} < \frac{\epsilon}{2}$. Pour tout $g \in F$ on a $|g(A) \vartriangle A| = 2|\partial_F A| < \epsilon |A|$, donc G vérifie les conditions de Følner. $\square$

2.4 Le théorème de Tarski

Une décomposition paradoxale d'une partie est un obstacle évident à l'existence d'une mesure invariante normalisée en cette partie. La réciproque, beaucoup moins triviale, a été démontrée par Tarski et fait l'objet de cette partie.

Définition 8. *Soient deux parties $A, B \subset X$. Un G-puzzle-morphisme de A dans B est une application $\phi : A \to B$ telle qu'il existe une partition $A = \coprod_{i=1}^{n} A_i$ et des élements $g_1, \ldots, g_n \in G$ telle que pour tout $a \in A_i$, $f(a) = g_i a$. De façon équivalente, c'est une application $\phi : A \to B$ telle qu'il existe une partie finie $F \subset G$ telle que pour tout $a \in A$ il existe $g \in F$ telle que $h(a) = g(a)$.*
Il est clair qu'une G-puzzle-équivalence est par définition un G-puzzle-morphisme bijectif.
Si on a un puzzle-morphisme surjectif $\phi : A \to B$ alors il existe $A' \subset A$ tel que la restriction $\phi : A' \to B$ soit bijective.

Définition 9. *On note $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, le dupliqué n fois de X est l'ensemble $[n] \times X$, sur lequel agit $\mathcal{S}_n \times G$, où $\mathcal{S}_n$ est le groupe des permutations de $[n]$ (qui agit en permutant les copies de X).*

Théorème 6 (König). *Soit A, B des ensembles et $e : A \times B \to \mathbb{N}$, qu'on peut interpréter comme un graphe dans lequel, pour $(a, b) \in A \times B$, $e(a, b)$ est le nombre d'arêtes d'origine a et d'extrémité b.*

On suppose que le graphe est k-birégulier ($k \in \mathbb{N}^*$), i.e.

$$\forall a, \sum_{b \in B} e(a,b) = k \ \text{ et } \ \forall b, \sum_{a \in A} e(a,b) = k$$

Alors il existe un sous-graphe 1-birégulier, i.e. une bijection $\Phi : A \to B$ telle que $\forall a \in A$ $e(a, \Phi(a)) \geq 1$

Preuve. Elle est élémentaire, mais astucieuse. Voir par exemple [13]. □

Théorème 7 (de simplification). *Si $[n] \times A \sim [n] \times B$ alors $A \sim B$*

Preuve. Soit une puzzle-équivalence $\psi : [n] \times A \to [n] \times B$ et e_0 la fonction caractéristique de son graphe. Soit p_A, p_B les projections canoniques $[n] \times A \to A, [n] \times B \to B$.
Pour $(a,b) \in A \times B$, on pose $e(a,b) = \sum_{p_A(a')=a, p_B(b')=b} e_0(a',b')$. Cela définit un graphe n-birégulier, dont on peut extraire une bijection $\Psi : A \to B$. Soit F_0 une partie finie de $G \times \mathcal{S}_n$ telle pour tout $x \in nA$, il existe $g \in \mathcal{S}_n \times F_0$ tel que $\psi(x) = g(x)$. Soit F la projection de F_0 sur G. Alors pour tout $x \in A$, il existe $g \in F$ tel que $\Psi(x) = g(x)$: Ψ est une puzzle-équivalence $A \to B$.

Définition 10. *Un anneau de parties de X est une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que $\emptyset \in \mathcal{A}$, et $\mathcal{A}$ est stable par union finie et par différence. Si on fixe une partie $A \subset X$, on appelle A-mesure sur X une mesure finiment additive, à valeurs finies, définie sur l'anneau $\mathcal{A}$ engendré par $\bigcup_{g \in G} \mathcal{P}(g(A))$, dont les éléments sont appelés parties A-bornées. De façon équivalente, une partie B est bornée s'il existe $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que $b \subset \bigcup_{i=1}^n g_i(A)$*

Soit $\mathcal{E}_A(X)$ l'espace des fonctions numériques étagées définies sur X et à support A-borné. L'ensemble des A-mesures s'identifie à l'ensemble des formes linéaires algébriques positives sur $\mathcal{E}_A(X)$ normalisées en 1_A.

Lemme 4 (Hahn-Banach pour les formes linéaires positives). *Soit X un ensemble et ϕ une forme linéaire positive définie sur un sous-espace de $\mathbb{R}^X$. Alors on peut prolonger ϕ en une forme linéaire positive sur $\mathbb{R}^X$.*

Preuve. Par une application immédiate du lemme de Zorn on obtient un prolongement linéaire positif maximal l, défini sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^X$. Si $F \subsetneq E$, alors soit $f \in E \setminus F$. Comme l est positive, $\sup_{g \in F, g \leq f} l(g) \leq \inf_{h \in F, h \geq f} l(h)$. Soit a coincé entre ces 2 nombres ; on pose $l(f) = a$ et on prolonge ainsi l par linéarité sur $F \oplus \mathbb{R}1_A$. Montrons que le prolongement obtenu est positif. Soit $h + \lambda f \in F \oplus \mathbb{R}1_A$. Si $h + \lambda f \geq 0$, alors on veut $l(h + \lambda f) \geq 0$. Si $\lambda = 0$ alors c'est acquis. Si $\lambda > 0$, on a $-\frac{1}{\lambda} h \leq f$, donc, par définition de a, on obtient $l(-\frac{1}{\lambda} h) \leq a$, et donc $l(h + \lambda f) \geq 0$. Si $\lambda < 0$ c'est pareil en renversant 2 fois le sens des inégalités.
On a prolongé l, donc on a nié la maximalité de (F, l) si $F \subsetneq \mathbb{R}^X$, et donc $F = \mathbb{R}^X$. □

Soit H le sous-espace de $\mathcal{E}_A(X)$ engendré par les fonctions du type $f - g.f$, $g \in G$, $f \in \mathcal{E}_A(X)$.

Proposition 11 (Critère de Dixmier généralisé). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1)Il existe sur X une A-moyenne G-invariante.
(2)Pour tout $h \in H$, $h \ngeq 1_A$.
(3)Pour toutes parties A-bornées, $B_1, \ldots, B_n$, $g_1, \ldots, g_n \in G$ et toute partie B contenant tous les B_i, les $g_i(B_i)$, et A, on a $\sum_{i=1}^n (1_{B_i} - 1_{g_i(B_i)}) \ngeq 1_B$.

Preuve. (1)⇒(2) Si m est une moyenne G-invariante alors pour tout $h \in H$ on a $0 = m(h) \ngeq 1 = m(1_A)$, donc $h \ngeq 1_A$.
(2)⇒(1) Grâce à (2), $1_A \notin H$: on peut donc définir la forme linéaire :

$$\begin{gathered} H \oplus \mathbb{R}1_a \to \mathbb{R} \\ h + \lambda 1_A \mapsto \lambda \end{gathered}$$

Toujours par (2), cette forme linéaire est positive. On peut donc, par Hahn-Banach pour les formes linéaires positives, la prolonger en une forme linéaire positive définie sur $\mathcal{E}_A(X)$, donc on a bien une A-moyenne G-invariante sur X.
(2)⇒(3) est évident.
(¬2)⇒(¬3) Il existe une fonction $h \in H$, $h \geq 1_A$. Comme $\mathcal{E}_A(X)$ est engendré par les fonctions caractéristiques, on peut écrire $h = \sum_{i=1}^m \lambda_i (1_{B'_i} - 1_{x_i(B'_i)})$. Soit $B = A \cup \bigcup_{i=1}^m (B'_i \cup x_i(B'_i))$.

Alors B est borné, et on peut écrire $B=A \amalg \coprod_{i=1}^n x'_i(A_i)$, avec $A_i \subset A$, $x'_i \in G$. Soit $f = 2(n+1)h+2\sum_{i=1}^n(1_{x'_i(A_i)}-1_{A_i})$: alors $f \geq 2.1_B$. On voit facilement qu'on peut écrire $f = \sum_{i=1}^p \lambda'_i(1_{B''_i} - 1_{g_i(B''_i)})$ avec $x''_i \in G$, $B''_i, x''_i(B''_i) \subset B$, $\lambda'_i > 0$. En approchant les λ'_i par des rationnels > 0, puis en multipliant par un entier suffisamment grand pour chasser les dénominateurs, et en resommant, on obtient quelquechose de la forme $\sum_{i=1}^n(1_{B_i} - 1_{g_i(B_i)}) \geq 1_B$ avec $g_i \in G$, $B_i, g_i(B_i), A \subset B$. □

Théorème 8 (de Tarski). *Il existe une A-moyenne G-invariante sur X si et seulement si A n'est pas G-paradoxal.*

Preuve. La condition nécessaire est immédiate.
Supposons qu'il n'existe pas de A-mesure G-invariante sur X. Par Dixmier généralisé il existe une partie A-bornée B, $A_1, \ldots, A_n \subset B$, $g_1, \ldots g_n \in G$ tels que $g_iA_i \subset B$ et $1_B \leq \sum_{i=1}^n(1_{g_i(A_i)} - 1_{A_i})$. On aimerait que les parties A_i soient disjointes : pour cela, on va les répartir dans des copies disjointes de X. On écrit $[n] \times X = \coprod_{i=1}^n X_i$ le dupliqué n fois de X. On pose $B_1 = \{1\} \times B$. On note p la projection canonique $[n] \times X \to X_1$, j_i l'application canonique $X_1 \to X_i$. Soit aussi $C_i = j_i(A_i)$ et $C = \coprod_{i=1}^n C'_i$. On va construire une partition $C = C' \amalg C''$ avec $C \sim C''$ et $B \sim C'$.
Comme $1_{B_1} \leq \sum_{i=1}^n 1_{A_i} + 1_{B_1} \leq \sum_{i=1}^n 1_{g_iA_i}$, les g_iA_i recouvrent B_1.
Pour $x \in B_1$ on choisit i tel que $x \in g_iA_i$ et on définit $f : B_1 \to C$ par $f(x) = g_i^{-1}j_i(x)$. f est un puzzle-morphisme injectif, donc, en posant $C' = f(B_1)$, on a $B \sim C'$.
Soit $C''=C \setminus f(B_1)$ et $C''_i = C'' \cap X_i$.
Si $C'_i = C_i \setminus C''_i = C' \cap X_i$, on a $p(\coprod_{i=1}^n C'_i) = \coprod_{i=1}^n p(C'_i) = B_1$, donc $1_{B_1} = \sum_{i=1}^n 1_{pg_iC'_i}$. Or

$$\sum_{i=1}^n 1_{A_i} + 1_{B_1} \leq \sum_{i=1}^n 1_{pg_iC'_i} + \sum_{i=1}^n 1_{pg_iC''_i}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n 1_{A_i} \leq \sum_{i=1}^n 1_{pg_iC''_i}$$

À l'aide de cette dernière inégalité, on définit $w : C \to C''$ comme ceci. Si $x \in B$, $x \in A_i$ pour $i \in \{i_1, \ldots, i_p\}$ et $x \in pg_iC''_i$ pour $i \in \{i'_1, \ldots, i'_q\}$ avec $q \geq p$. Pour $1 \leq k \leq p$ on définit $w(j_{i_k}(x)) = g_i^{-1}j_{i'_k}(x)$. w est un puzzle-morphisme injectif, donc $C \lesssim C''$ mais comme $C'' \subset C$, par Banach-Schröder-Bernstein $C \sim C''$.
Les $w^k(C')$ forment des parties 2 à 2 disjointes de C toutes puzzle-équivalentes à B, donc en particulier $[2n] \times B \lesssim C$. Mais on a aussi $C \subset [n] \times B$, donc par Banach-Schröder-Bernstein, $[n] \times B \sim [2n] \times B$, i.e. $[n] \times B$ est paradoxal. On va en déduire que $[n] \times A$ l'est aussi.
Comme B est A-borné et contient A, $A \lesssim B \lesssim [m] \times A$ pour un $m \geq 1$, donc $[n] \times B \lesssim [mn] \times A \lesssim [mn] \times B$, Comme $[n] \times B \sim [2n] \times B$, par récurrence immédiate $[n] \times B \sim [2^kn] \times B$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient donc, par Banach-Schröder-Bernstein, $[mn] \times A \sim [mn] \times B$, et donc $[mn] \times A \sim [mn] \times A$. Par le théorème de simplification, $A \sim [2] \times A$, i.e. A est paradoxal. □

On a le cas particulier important :

Corollaire 2. *G est moyennable si et seulement s'il n'est pas paradoxal.*

2.5 Supermoyennabilité

Définition 11. *Un groupe G est dit supermoyennable si pour toute partie non vide $A \subset G$ il existe une A-moyenne G-invariante sur G.*

Proposition 12. *G est supermoyennable si et seulement si pour tout X sur lequel G agit et tout $A \subset X$ il existe une A-moyenne G-invariante.*

Preuve. Soit $x \in A$ et $f : G \to X$, $g \mapsto g(x)$, m une $f^{-1}(A)$-moyenne G-invariante sur G. $m'(B) = m(f^{-1}(B))$ définit une A-moyenne G-invariante sur X.
La réciproque est immédiate. □

Proposition 13. *Tout groupe contenant un semi-groupe libre à 2 générateurs n'est pas supermoyennable.*

Preuve. Si G contient a, b qui engendrent un semi-groupe libre S, alors S est G-paradoxal, car $S \sim aS, bS \subset S$, et $aS \cap bS = \emptyset$. □

Proposition 14. *$I^+(2)$ n'est pas supermoyennable.*

Preuve. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Soit u un transcendant fixé de module 1 : alors $\mathbb{N}[u]$ est paradoxal : $\mathbb{N}[u] \sim u\mathbb{N}[u] \sim \mathbb{N}[u]+1$ avec $\mathbb{N}[u]+1 \cap u\mathbb{N}[u] = \emptyset$. $\square$

Remarque 5. Il existe dans le plan des parties paradoxales : c'est le paradoxe de Sierpiński-Mazurkiewicz. On obtient sans difficulté que $z \mapsto z+1$ et $z \mapsto uz$ engendrent un semi-groupe libre.

L'existence de parties bornées du plan paradoxales est longtemps restée un problème ouvert, avant d'être résolu positivement par Just en 1987. Voici sa construction :
Soit $j = exp(\frac{2i\pi}{3})$, u un transcendant de module 1, et D le disque unité fermé. On commence par remarquer que si $z \in D$ alors il existe $f(z) \in \{z+1, z+j, z+j^2\} \cap D$ (il suffit de discuter suivant l'argument de z). Remarquons que le choix de f peut être explicite. Soit A le plus petit ensemble tel que :

$$0 \in A; \;\; z \in A \Longrightarrow uz \in A, f(uz) \in A$$

Alors A est dénombrable, $A \subset D$, et tout élément de A est un polynôme en u à coefficients dans $\{0, 1, j, j^2\}$. On pose pour $k = 0, 1, 2$: $A_k = \{z \in cA, f(z) = z + j^k\}$. On voit facilement, en utilisant la transcendance de u, que les ensembles cA, $A_k + j^k, k = 0, 1, 2$ sont 2 à 2 disjoints ; et $A \sim cA \sim A_0 \cup A_1 \cup A_2\}$, donc A est paradoxal. $\square$

Si S est une partie finie de G, on note $\gamma_S(n)$ le nombre d'éléments de G s'écrivant en un mot de longueur $\leq n$ en $S^{\pm 1}$.

Définition 12. *Un groupe G est dit à croissance sous-exponentielle si $\lim_{n\to\infty} \gamma_S(n)^{\frac{1}{n}} = 1$ pour toute partie finie $S \subset G$.*

Théorème 9. *Si G est à croissance sous-exponentielle alors :*
(1) Si G agit sur X et $\emptyset \neq A \subset X$ alors A n'est pas G-paradoxal. (2) G est supermoyennable.

Preuve. (2) se déduit de (1) par le théorème de Tarski. Montrons (1).
Supposons qu'il existe une action de G sur un ensemble X et une partie $A \subset X$ paradoxale. Soient 2 puzzle-morphismes injectifs $f_1, f_2 : A \to A$ d'images disjointes. Il existe alors une partie finie $S \subset G$ telle que pour tout $x \in A$, $\exists g_1, g_2 \in S$ tel que $f_i(x) = g_i(x)$, $i = 1, 2$. Considérons les 2^n mots h_i de n lettres en f_1 et f_2. Il est immédiat que les h_i sont d'images 2 à 2 disjointes. Donc si on choisit $x \in A$, alors l'ensemble $\{h_i(x), 1 \leq i \leq 2^n\}$ possède 2^n éléments. Mais chaque h_i coïncide en x avec un mot en n éléments de S, donc $\gamma_S(n) \geq 2^n$ et G est à croissance exponentielle. $\square$

Corollaire 3. *Tout groupe commutatif est supermoyennable.*

Preuve. $\gamma_S(n)$ croît alors polynômialement, car le nombre de mots qui s'écrivent avec $\leq n$ lettres de $S^{\pm 1}$ est majoré par $(n+1)^{2|S|}$. $\square$

Corollaire 4. *Le groupe des isométries de $\mathbb{R}$ est supermoyennable et par conséquent aucune partie non vide de $\mathbb{R}$ n'est paradoxale.*

Preuve. Pour G groupe commutatif, on note $G \rtimes \{1, -1\}$ le produit semi-direct où -1 agit sur G par $g \mapsto -g$. On va montrer que de façon générale que, si G est commutatif, alors $G \rtimes \{1, -1\}$ est à croissance polynômiale.
On note p la projection $G \rtimes \{1, -1\} \to G$. Soit donc $S \subset G$ une partie finie non vide. Soit S' l'ensemble des $p(s), s \in S$, et $S'' = S' \cup \{\epsilon\}$. Il est immédiat que tout mot de $\leq n$ lettres en $S^{\pm 1}$ peut s'écrire avec $\leq n+1$ lettres de $S''^{\pm 1}$, avec le ϵ à gauche puis $\leq n$ lettres dans S'. Donc $\gamma_S(n) \leq 2\gamma_{S'}(n)$. Et comme les éléments de S' commutent, $\gamma_{S'}(n)$ croît polynômialement, donc il en est de même pour $\gamma_S(n)$. $\square$

Remarque 6. Les questions suivantes sont ouvertes :
Tout groupe supermoyennable est-il à croissance sous-exponentielle ?
Le produit direct de 2 groupes supermoyennables est-il nécéssairement supermoyennable ?

3 Commentaires

3.1 Généralisation aux groupes localement compacts

On a donné dans cet exposé la définition et quelques propriétés de la moyennabilité des groupes discrets, c'est-à-dire munis de la topologie discrète et de leur mesure de comptage. On a la généralisation suivante : un groupe localement compact G muni de sa mesure de Haar λ est dit moyennable s'il existe une moyenne invariante sur $L^\infty(G)$. Presque tous les théorèmes de caractérisation des groupes moyennables possèdent une version localement compacte, en particulier le théorème du point fixe, les conditions de Følner. En gros, il faut changer l^∞ en L^∞, fini en compact, partie en partie mesurable, sous-groupe en sous-groupe fermé, card en λ... Voir [10] ou [13]. En revanche, le théorème de simplification $nA \sim nB \Rightarrow A \sim B$, où $\sim$ est l'équidécomposabilité avec des partitions boréliennes, n'a aucune raison de rester valable, car le théorème d'extraction de König ne garantit pas, si le graphe d'origine est mesurable, que la bijection extraite le soit aussi. Le problème est ouvert, même dans le cas de parties de $\mathbb{R}$. De même on ne sait pas si la version mesurable théorème de Tarski, reliant l'existence d'une décomposition mesurable paradoxale de A à l'existence d'une mesure invariante sur les boréliens A-bornés, normalisée en A, est vraie dans toute sa généralité. Cependant, Paterson a démontré dans [12] qu'un groupe localement compact est moyennable si et seulement s'il n'est pas paradoxal.

3.2 L'axiome du choix

Dans tout ce paragraphe, la principale référence est [14]. On note ZF les axiomes de Zermelo-Fraenkel, et AC l'axiome du choix. Si T est une collection d'axiomes utilisant un langage ensembliste, on note cons(T) la proposition que T est consistante, i.e. que on ne peut pas déduire de T une contradiction par une démonstration logique. Gödel a démontré que cons(ZF) implique cons(ZF+AC). C'est une des principales raisons de ne pas craindre l'axiome du choix : si on peut prouver 0=1 avec AC, alors on peut sans AC.

Il est cependant intéressant de savoir quand et de quelle façon on a besoin de AC. Dans cet exposé, pour démontrer qu'une action libre d'un groupe paradoxal est paradoxale, on a utilisé AC (en faisant le choix d'un représentant dans chaque orbite). De même, pour montrer qu'un sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable ; on a utilisé le théorème de Hahn-Banach, on a travaillé avec de la topologie faible : cela repose aussi sur Hahn-Banach, qui assure entre autres la séparation des topologies faibles. On a enfin utilisé le théorème de König pour démontrer le théorème de Tarski.

On a des axiomes strictement plus faibles que AC : le théorème de Hahn-Banach (HB), l'axiome du choix dépendant (ACD) qui dit que si E est un ensemble, et $G \subset E \times E$ est tel que

$$G \neq \emptyset; \quad \forall x \in E \; \exists y \in E, \; (x, y) \in G$$

alors il existe une application $u : \mathbb{N} \to E$ tel que $\forall n, (u_n, u_{n+1}) \in G$. C'est un peu plus fort que l'axiome du choix dénombrable. Il permet par exemple de montrer qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, le théorème de Baire, qui ne sont pas des théorèmes de ZF. En revanche il n'implique pas qu'il existe un bon ordre sur $\mathbb{R}$. Soit MI l'axiome qu'il existe pour tout n une mesure (σ-additive) invariante par isométries sur les parties de $\mathbb{R}^n$, normalisée en $[0,1]^n$. Il a été démontré par Solovay que cons(ZF) implique cons(ZF+ACD+MI). En particulier, même avec ACD, on ne peut pas démontrer le paradoxe de Banach-Tarski ou de Vitali. En revanche, le paradoxe de Banach-Tarski est un théorème de ZF+HB.

D'autre part, si HB permet de démontrer la moyennabilité des groupes abéliens, ACD n'est pas suffisant pour assurer l'existence d'une moyenne invariante sur $\mathbb{Z}$. D'ailleurs, si on se prive de AC, les différentes caractérisations de la moyennabilité peuvent ne plus être équivalentes. Par exemple, un groupe abélien vérifiera toujours les conditions de Følner. On peut montrer avec ZF que deux parties mesurables $O(2)$-équidécomposables (avec des partitions quelconques) de $\mathbb{R}^2$ ont même mesure de Lebesgue ; cependant on peut remarquer qu'on a donné des exemples de parties paradoxales du plan avec des décompositions paradoxales explicites.

Mentionnons aussi le fait que l'on peut démontrer (voir [14]) sans axiome du choix le fait qu'une partie du plan de mesure $\neq 0, \infty$ est non paradoxale.

Références

[1] S.I. ADYAN. Random walks on free periodic groups. *Math. USSR Izvestiya*, 3(21) :425–434, 1983.

[2] A.Lubotzky. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures.* Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1994.

[3] John B. Conway. *A course in functional analysis.* Springer, 1990.

[4] Pierre de la Harpe. Mesures finiment additives et paradoxes. Conférence à l'occasion du centenaire de la mesure de Lebesgue à l'ENS-Lyon, 27-28 Avril 2001 ; disponible en format pdf à l'adresse : http ://www.unige.ch/math/biblio/preprint/liste.html, 2001.

[5] S. Banach et A. Tarski. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fund. Math.*, (6) :244–277, 1924. Oeuvres, Vol. I, 118-148 et 125-127.

[6] Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, 1914.

[7] Miklós Laczkovich. *Paradoxical decompositions : A survey of recent results*, pages 159–184. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1992.

[8] I. Namioka. Følner's conditions for amenable semi-groups. *Math. Scand.*, (15) :18–28, 1964.

[9] Robert R. Phelps. *Lectures on Choquet's theorem.* American Book Company, 1966.

[10] Jean-Paul Pier. *Amenable locally compact groups.* Pure and applied mathematics. Wiley, 1984.

[11] Volker Rundl. *Lectures on amenability.* Lecture notes in mathematics 1774. Springer, 2002.

[12] Alan L. T.Paterson. Nonamenability and borel paradoxical decompositions for locally compact groups. *Proc. Amer. Soc.*, (96) :89–90, 1986.

[13] Alan L. T.Paterson. *Amenability.* Mathematical Surveys and monographs. American Mathematical Society, 1988.

[14] Stan Wagon. *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge University Press, 1984.