

Nom :
Prénom :

Le formulaire et la calculatrice sont autorisés. Vous rendrez l'énoncé auquel vous pouvez joindre une copie si vous le souhaitez. Vous pouvez soit répondre directement sur l'énoncé, soit détailler certaines questions sur la copie si vous avez besoin de plus de place. Le soin de la rédaction entrera en compte dans la notation mais dans les questions où des détails ne sont pas explicitement demandés, un résultat correct, donné sans détails de calcul sera accepté.

On s'intéresse à l'influence du contexte extérieur sur la perception de la douleur. Par exemple, des travaux récents ont montré que la douleur ressentie était significativement diminuée en présence de personnes empathiques. On imagine ici une expérience simplifiée qui mette en lumière ce phénomène :

Exercice 1 : Intensité de stimuli douloureux

On soumet 12 personnes volontaires à des stimuli électriques et mécaniques douloureux, et on leur demande d'exprimer l'intensité de la douleur qu'elles ressentent. On désigne par X l'intensité des stimuli et par Y la douleur ressentie, exprimée sur une échelle de 0 à 10 (où 0 désigne l'absence de douleur et 10 est la douleur maximale). Les données obtenues sont reproduites en haut de la page suivante (pour faciliter les calculs qui suivront).

1. Déterminer la population et la/les variable(s) étudiée(s), ainsi que le type de variable(s).

Les variables statistiques sont l'intensité X des stimuli, et la douleur Y ressentie. Ce sont des variables quantitatives, a priori discrètes (seules des valeurs entières ont été mesurées). La population est constituée de personnes volontaires (ici elles sont 12).

2. Pourquoi a-t-on choisi la lettre X pour l'intensité des stimuli et de la lettre Y pour la douleur ressentie ?

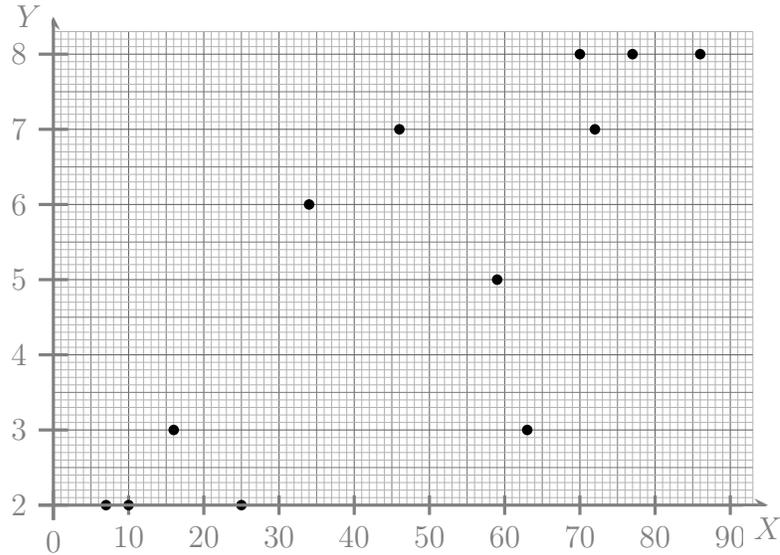
L'intensité des stimuli est contrôlable par l'expérimentateur, c'est donc la variable indépendante, c'est pourquoi on la note X . L'intensité de la douleur est la variable dépendante, on la note donc Y .

Remarque : Cette distinction entre variable dépendante et indépendante fait sens car les deux variables sont appariées, c'est à dire définies sur la même population.

Les données obtenues sont données ci-dessous :

Intensité X des stimuli	7	10	16	25	34	46	59	63	70	72	77	86
Douleur Y exprimée	2	2	3	2	6	7	5	3	8	7	8	8
x'_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y'_i	2	2	4,5	2	7	8,5	6	4,5	11	8,5	11	11
$(x'_i - y'_i)^2$	1	0	2,25	4	4	6,25	1	12,25	4	2,25	0	1

3. Représenter les données sous la forme d'un nuage de points.



4. Calculer le coefficient de corrélation des rangs de Spearman. Qu'en concluez-vous ?

On calcule tout d'abord les rangs x'_i et y'_i , entrés dans la table ci-dessus. le coefficient de corrélation des rangs de Spearman est donc

$$1 - \left(6 \frac{1+0+2,25+4+4+\dots+1}{12(12^2-1)} \right) \simeq 0,867$$

Cela montre un fort lien entre les deux variables, où Y augmente quand X augmente.

5. Calculer la moyenne, l'écart type et la médiane de l'intensité X des stimuli. *On demande dans cette question d'indiquer quels calculs vous effectuez pour obtenir le résultat.*

$$\text{moyenne : } m(X) = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7+10+\dots+86}{12} = \frac{565}{12} \simeq 47,08$$

$$m(X^2) = \frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{7^2+10^2+\dots+86^2}{12} = \frac{35161}{12}$$

$$\text{Var}(X) = m(X^2) - m(X)^2 = \frac{35161}{12} - \left(\frac{565}{12} \right)^2 \simeq 713,24$$

$$\text{Écart-type : } s(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \simeq 26,71$$

La médiane est la valeur numéro $\frac{12+1}{2} = 6,5$ (en ordonnant par ordre croissant), ou plutôt le milieu entre les valeurs numéro 6 et 7. C'est donc le milieu entre 46 et 59 c'est-à-dire $\frac{46+59}{2} = 52,5$.

6. De même, quels sont la moyenne et l'écart type de la douleur Y ressentie? *Dans cette question on ne demande pas forcément le détail des calculs.*

$$\begin{aligned} \text{moyenne : } m(Y) &= \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2+2+\dots+8}{12} = \frac{61}{12} \simeq 5,08 \\ m(Y^2) &= \frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{2^2+2^2+\dots+8^2}{12} = \frac{381}{12} \\ \text{Var}(Y) &= m(Y^2) - m(Y)^2 = \frac{381}{12} - \left(\frac{61}{12}\right)^2 \simeq 5,91 \\ \text{Écart-type : } s(Y) &= \sqrt{\text{Var}(Y)} \simeq 2,43 \end{aligned}$$

7. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Qu'en concluez-vous? *Dans cette question, on demande à nouveau d'indiquer quels calculs vous effectuez pour obtenir le résultat.*

$$\begin{aligned} m(XY) &= \frac{\sum x_i y_i}{n} = \frac{7 \times 2 + 10 \times 2 + \dots + 86 \times 8}{12} = \frac{3510}{12} = 292,5 \\ \text{Cov}(X,Y) &= m(XY) - m(X)m(Y) = \frac{3510}{12} - \frac{565}{12} \frac{61}{12} \simeq 53,16 \\ r(X,Y) &= \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{53,16}{\sqrt{713,243 \times 5,91}} \simeq 0,819 \end{aligned}$$

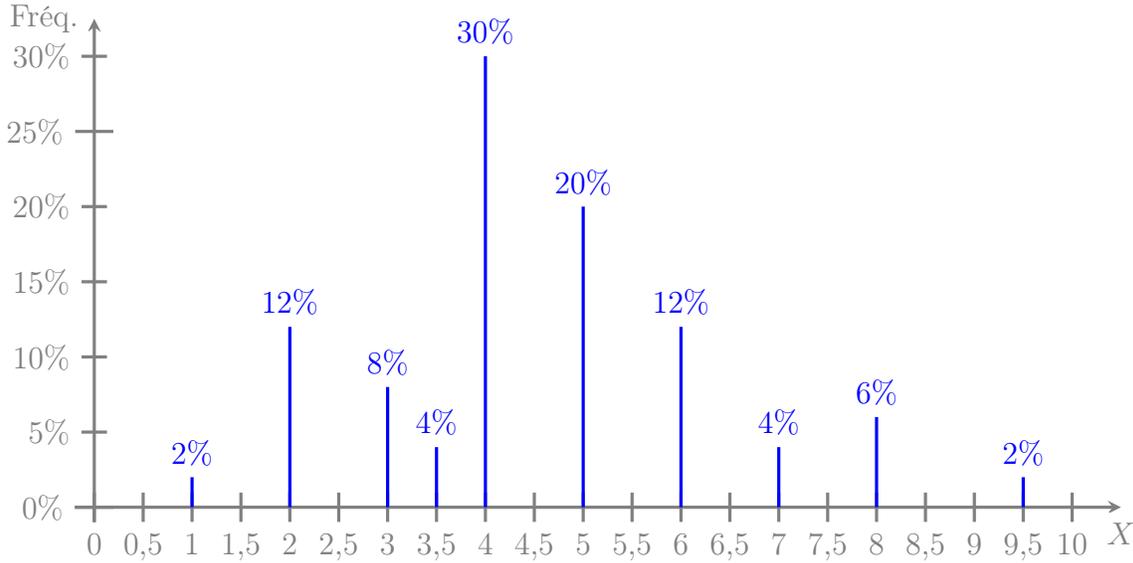
Cela montre un fort lien linéaire entre les deux variables, où Y augmente quand X augmente.

8. Si l'on souhaite qu'en moyenne, la douleur ressentie soit d'environ 5 sur 10, quelle intensité faut-il donner aux stimuli ?

$$\begin{aligned} \text{on pose } a' &= \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(Y)} \simeq \frac{53,16}{5,91} \simeq 8,995 \text{ et } b' = m(X) - a' m(Y) \simeq 47,083 - 8,995 \times \\ &5,083 \simeq 1,361 \\ \text{D'où l'équation de la droite } D_{X|Y} &: X = 8,995 Y + 1,361 \\ \text{Donc pour } y = 5, \text{ on s'attend à } x &= 8,995 \times 5 + 1,361 \simeq 46,336 . \end{aligned}$$

On fixe ainsi une fois pour toutes l'intensité des stimuli douloureux, auxquels on va exposer un des volontaires, en présence ou en l'absence de personnes empathiques.

Exercice 2 : Groupe témoin Un groupe de 50 volontaires est soumis aux stimuli douloureux, en l'absence de tout discours empathique. On leur demande d'indiquer la douleur qu'ils ressentent, sur une échelle allant de 0 à 10, et on obtient les données représentées ci-dessous :



- Déterminer les effectifs des différentes modalités et indiquez les dans le tableau ci-dessous.

On obtient les effectifs en multipliant les fréquences par l'effectif total.

Par exemple, pour $X = 2$, l'effectif est $\frac{12}{100} \times 50 = 6$

Modalités	1	2	3	3,5	4	5	6	7	8	9,5
Effectifs	1	6	4	2	15	10	6	2	3	1

- Combien d'individus ont indiqué une douleur au moins égale à 8 ?

Ils sont $3 + 1 = 4$ (obtenus en additionnant les effectifs correspondants aux douleurs 8 et 9,5).

- Calculer la moyenne et l'écart type de la douleur au sein de cet échantillon. *Dans cette question, on vous demande d'indiquer quels calculs vous effectuez.*

$$\begin{aligned} \text{moyenne : } m(X) &= \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \frac{1 \times 1 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + \dots + 9,5 \times 1}{50} = \frac{225,5}{50} = 4,51 \\ m(X^2) &= \frac{\sum_i x_i^2 n_i}{n} = \frac{1^2 \times 1 + 2^2 \times 6 + 3^2 \times 4 + \dots + 9,5^2 \times 1}{50} = \frac{1171,75}{50} \\ \text{Var}(X) &= m(X^2) - m(X)^2 = \frac{1171,75}{50} - \left(\frac{225,5}{50}\right)^2 \simeq 3,09 \\ \text{Écart-type : } s(X) &= \sqrt{\text{Var}(X)} \simeq 1,76 \end{aligned}$$

Exercice 3 : Douleur perçue en présence de personnes empathiques Un dernier groupe, de 80 volontaires, est soumis aux mêmes stimuli douloureux, mais cette fois-ci en présence de personnes qui se montrent empathiques. Les données ci-dessous indiquent la douleur qu'ils ressentent, sur une échelle allant de 0 à 10 :

Douleur (X)	[0 ; 1[[1 ; 3[[3 ; 5[[5 ; 7[[7 ; 9[[9 ; 11[
Effectifs	2	33	29	8	5	3
Fréquences	0,025	0,412	0,362	0,1	0,063	0,037
Fréquences cumulées	0,025	0,437	0,799	0,899	0,962	0,999

1. Calculer les fréquences et les fréquences cumulées. *Vous remplirez les lignes correspondantes du tableau*
2. Déterminer la médiane et les quartiles.

Classe de la médiane : [3 ; 5[

$$\text{Méd} \simeq a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)} (0,5 - F_X(a_i)) \simeq 3 + \frac{5-3}{0,8-0,438} (0,5 - 0,438) \simeq 3,34$$

Classe du premier quartile : [1 ; 3[

$$Q_1 \simeq a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)} (0,25 - F_X(a_i)) \simeq 1 + \frac{3-1}{0,438-0,025} (0,25 - 0,025) \simeq 2,09$$

Classe du troisième quartile : [3 ; 5[

$$Q_3 \simeq a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)} (0,75 - F_X(a_i)) \simeq 3 + \frac{5-3}{0,8-0,438} (0,75 - 0,438) \simeq 4,72$$

3. Quels sont la moyenne et l'écart type de la douleur perçue par les personnes de cet échantillon ?

$$\text{moyenne : } m(X) = \frac{\sum c_i n_i}{n} = \frac{0,5 \times 2 + 2 \times 33 + 4 \times 29 + \dots + 10 \times 3}{80} = \frac{301}{80} \simeq 3,76$$

$$m(X^2) = \frac{\sum c_i^2 n_i}{n} = \frac{0,5^2 \times 2 + 2^2 \times 33 + 4^2 \times 29 + \dots + 10^2 \times 3}{80} = \frac{1504,5}{80}$$

$$\text{Var}(X) = m(X^2) - m(X)^2 = \frac{1504,5}{80} - \left(\frac{301}{80}\right)^2 \simeq 4,65$$

$$\text{Écart-type : } s(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \simeq 2,16$$

Remarque : Les données de cet énoncé sont purement fictives. Les “travaux récents” mentionnés en début de sujet sont exposés dans l'article “*Brain activity sustaining the modulation of pain by empathetic comments*”, publié par C. Fauchon, I. Failenot, C. Quesada, D. Meunier, F. Chouchou, L. Garcia-Larrea & R. Peyron dans Scientific Reports