

Analyse – Suites et séries de fonctions.

Sébastien LEURENT

Année 2026-2027
(mis à jour le 26 octobre 2026)



Notes de cours sous licence CC BY-NC-SA 4.0

Les séances de CM de Math3A (de l'année universitaire 2026-2027) s'appuient sur ces notes de cours, qui sont largement inspirées des notes de cours de D. Faenzi (en charge de ce cours jusqu'en 2022-2023).

Il est fortement encouragé d'utiliser des manuels pour compléter et préciser ces notes de cours. Plusieurs sont disponibles dans les bibliothèques universitaires du campus, et dans ce cours on fera parfois référence au livre de Marie-Cécile Darracq et Jean-Étienne Rombaldi (LMD Maths, 2020), qui a l'avantage d'être aussi disponible en ligne à partir du site des bibliothèques universitaires (et téléchargeable chapitre par chapitre).

Table des matières

1	Suites réelles	9
1.1	La droite réelle	9
1.2	Convergence des suites réelles	14
1.3	Suites de Cauchy	21
1.4	Suites extraites, valeurs d'adhérence	23
1.A	Quantificateurs	27
1.B	Implications	30
1.C	Rationalité ou irrationalité de $\sqrt{n}$	31
1.D	Espaces vectoriels, algèbres	32
1.E	Constructions de $\mathbb{R}$	36
1.F	Démonstrations omises dans le texte principal	36
2	Séries réelles et complexes	39
2.1	Suites complexes	39
2.2	Convergence de séries	40
2.3	Séries réelles; positivité	42
2.4	Convergence absolue	47
2.A	Rappels sur l'inégalité triangulaire	53
2.B	Démonstrations omises dans le texte principal	53
3	Séries entières	55
3.1	Séries de fonctions	55
3.2	Définition et convergence des séries entières	61
3.3	Dérivation des séries entières	65
3.4	Développement en série entière en 0	67
3.5	Opération sur les séries	69
3.6	La fonction exponentielle complexe	73

Notations

$\mathcal{C}^\infty$: infiniment dérivable	p. 66
$\mathcal{C}^n$: dérivable n fois avec dérivée $n^{\text{ème}}$ continue ..	p. 66
$\mathcal{C}(w_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid z - w_0 = r\}$: cercle	p. 55
$\mathbb{C}^\mathbb{N}$: ensemble des suites complexes	p. 14
$f'(x)$: dérivée de f au point x	p. 65
$\bar{D}(w_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid z - w_0 \leq r\}$: disque fermé .	p. 55
$D(w_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid z - w_0 < r\}$: disque ouvert	p. 55
$E(x)$: partie entière inférieure	p. 13
$\inf$: borne inférieure	p. 12
$\llbracket a; b \rrbracket$: intervalle de nombres entiers	p. 11
$\lim$: limite	p. 14
$\liminf$: limite inférieure	p. 20
$\limsup$: limite supérieure	p. 20
$\ f\ _\infty = \sup_w f(w) $, norme infinie	p. 60
$\mathcal{O}(1)$: suite bornée	p. 11

$\mathcal{O}(u_n)$: suite dominée par (u_n)	p. 11
$o(1)$: suite tendant vers 0	p. 17
$o(u_n)$	p. 17
$\bar{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$	p. 15
$\mathbb{R}^\mathbb{N}$: ensemble des suites réelles	p. 14
$\sum u_n$: série de terme général u_n	p. 40
$\sum a_n z^n$: série entière	p. 61
$w \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$: somme de $\sum a_n z^n$	p. 61
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n u_i$: somme d'une série ..	p. 40
$\sum_{i=0}^n u_i$: somme partielle	p. 40
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (u_n)_{n \geq 1}, (u_n)$, ou u : suite	p. 10
$(u_{n,p})_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ p \in \mathbb{N}}}$: suite double	p. 70
$\sup$: borne supérieure	p. 11
$u_n \sim v_n$: suites équivalentes	p. 17

Objectifs et prérequis

Enjeux

Ce cours vise à approfondir les notions de limite déjà vues auparavant, à la fois en montrant des résultats absents des cours de L1 et en adoptant un niveau de rigueur plus précis. Il vise aussi à construire des fonctions comme la fonction exponentielle, que l'on définira par :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Pour donner un sens à cette somme infinie, on étudiera les sommes de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, où les a_k désigneront des coefficients complexes.

On appellera ces sommes des *séries entières* et on montrera notamment qu'elle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (à l'intérieur d'un ensemble précis qu'on appellera le “*disque ouvert de convergence*”).

Prérequis

Pour suivre ce cours il faut une familiarité avec

- Les nombres : entiers, rationnels, réels et complexes.
- Les quantificateurs (les symboles $\exists$ et $\forall$)
- La rigueur mathématique (par exemple la notion de contraposée).
- La notion de limite.

« Avoir une familiarité » ne signifie pas que vous devez tout savoir sur ces notions, dont certains aspects seront repris dans ce cours. En particulier les appendices 1.A et 1.B de ce chapitre fournissent de précieuses informations sur l'utilisation des quantificateurs, et sur la notion de contraposée.

Mise en garde

Quand on commence à se familiariser avec certaines notions mathématiques, on peut facilement commettre des erreurs si on l'on est pas assez rigoureux dans ce que l'on écrit. Par exemple, dans l'exercice 40 on peut penser avoir prouvé que $\frac{1}{2} = 0$.

Un des objectifs de ce cours est d'adopter une rédaction suffisamment rigoureuse pour ne pas commettre ce type d'erreurs.

Objectifs de l'UE

Les chapitres successifs traiteront plusieurs notions, en particulier concernant les suites réelles et leur limites, les séries de nombres complexes, les suites et séries de fonctions, et les séries entières.

L'objectif de cette UE est qu'à l'issue du semestre :

- Vous sachiez traiter des “Exercices type ou classiques” directement liés à ces notions, comme ceux présents en début de chapitre.
- Vous soyez capables de rédiger des preuves rigoureuses, qui peuvent être plus ou moins guidées (par des questions intermédiaires aidant à construire la démonstration). Les preuves du cours, comme les exercices “Autres démonstrations” sont de bons entraînements.
- Vous sachiez reconnaître des arguments erronés et/ou insuffisants, comme dans les exercices “Exemples à ne pas suivre” de la feuille de TD.

Évaluations

Votre note de première session est constituée d'un contrôle terminal (2 tiers de la note) et d'une note de contrôle continu. Le contrôle continu consiste en des contrôles en amphi pendant le créneau de CM. L'un de ces contrôles aura lieu le 19 octobre (10h15-12h15, amphis Gevrey et Niepce). D'autres contrôles peuvent avoir lieu lors de n'importe quel-s CM.

Pour sa part, votre note de deuxième session est issue d'une seule note de contrôle terminal.

Le barème pour noter les copies pourra tout à fait être non-linéaire.

Déroulé

Ce CM est associé à des séances de TD, et au sein de notre université, la présence est obligatoire à la fois en CM et en TD.

Au delà de cette obligation, l'enjeu est d'une part de permettre de traiter l'ensemble du contenu du cours dans le volume horaire prévu. Le contenu des CM est nécessaire pour être en mesure de suivre les TDs; les séances de TDs ne pourront donc se dérouler correctement que si les étudiant-e-s sont préalablement venu-e-s en CM.

Concrètement, les séances CM ne reproduiront pas en totalité le contenu de ces notes de cours. Chaque semaine, il vous sera demandé de lire une certaine partie des notes de cours, sur laquelle vous pourrez poser des questions la semaine suivante. Ainsi les séances de CM se focaliseront sur un résumé synthétique du cours, et/ou sur des exercices (qu'il vous sera aussi demandé de regarder à l'avance).

Chapitre 1

Suites réelles

1.1 La droite réelle

1.1.a Introduction

Entiers naturels On suppose connue la notion de nombre entier. Pour rappel les entiers peuvent être vus comme

- Les classes d'équivalences des ensembles finis, pour la relation de bijection. Cela signifie que par exemple le nombre 4 est le point commun à « un paquet de quatre bonbons », « un panier de 4 pommes », etc mais qui diffère avec « un cageot de 5 carottes ».
- Des listes de chiffres, quand on écrit le nombre en base 10 (par exemple, quand on met bout à bout les chiffres 2, 0, 2 et 6, cela correspond au nombre 2026).

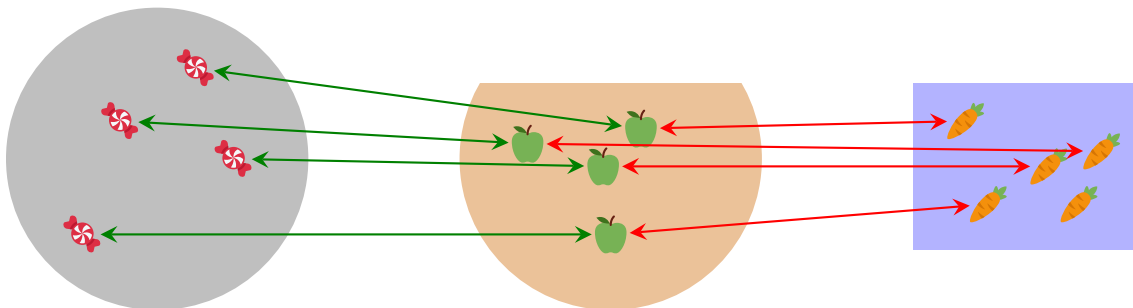


FIGURE 1.1 – Exercice d'école primaire où l'on constate (en les reliant deux à deux) qu'il y a autant de bonbons dans le paquet de gauche que de pommes dans la panier du milieu (on le voit par exemple en traçant les flèches vertes), mais moins que de carottes dans le cageot de droite (on le voit par exemple en traçant les flèches rouges, par lesquelles la carotte en bas à droite n'est pas atteinte).

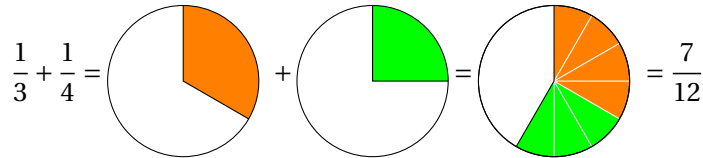
Il ne va pas de soi que ces deux notions soient bien la même, et par exemple, le nombre d'Avogadro $N_A = 602\,214\,076\,000\,000\,000\,000\,000$ peut difficilement être interprété comme le cardinal (c'est à dire le nombre d'éléments) d'un ensemble dont on aurait compté les éléments un par un. En revanche on voit très bien comment le manipuler et faire des calculs avec (par exemple, $N_A - 1 = 602\,214\,075\,999\,999\,999\,999\,999$).

Nombres rationnels On suppose dans ce cours une familiarité avec les nombres rationnels, qui peuvent eux aussi être envisagés sous deux points de vue :

- On peut introduire les règles formelles suivantes pour manipuler ces fractions :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \begin{cases} \frac{a}{b} > \frac{c}{d} & \text{si } ad > cb \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \text{si } ad = cb \\ \frac{a}{b} < \frac{c}{d} & \text{si } ad < cb. \end{cases}$$

- Ou bien on peut les voir comme des portions de « camemberts », et faire appel à des calculs plus intuitifs :



On considère que ces deux notions coïncident, et on désigne par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des fractions de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Quand on écrit une fraction comme $\frac{2026}{2027}$, cela ne signifie pas que l'on se croit capable de couper un camembert en 2027 parts égales et de conserver 2026 parts, sans perdre aucune miette dans l'opération. On travaille simplement dans une version idéalisée de la réalité, où des règles de calcul assez formelles indiquent quelles opérations on sait faire, mais dont l'intuition nous vient en partie de notre vie quotidienne réelle (où on peut couper des parts de « camemberts »).

Les calculs que l'on sait faire avec ces fractions donnent à $\mathbb{Q}$ une structure de corps, muni d'une relation d'ordre. Enfin vous savez que certains nombres ne sont pas rationnels. Par exemple vous êtes invité-e-s à retrouver par vous même comment montrer que $\sqrt{2026}$ est irrationnel (si besoin, une preuve est donné dans l'annxe 1.C).

Suites Lorsqu'un vecteur a un nombre fini de coordonnées, par exemple 3 coordonnées, il est habituel de le noter (x_1, x_2, x_3) . On peut aussi noter $(x_i)_{1 \leq i \leq 3}$, ce qui signifie exactement (x_1, x_2, x_3) .

Les « suites » en sont une généralisation : la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspondrait intuitivement aux coordonnées $(u_0, u_1, u_2, \dots)$, où il y a une infinité de coordonnées. Au lieu de parler de coordonnées ou de vecteurs, on appelle cela « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ».

De même la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n \geq 1}$ correspondrait intuitivement à $(u_1, u_2, u_3, \dots)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté il arrive de noter « u » ou « (u_n) » pour désigner cette suite, c'est à dire pour désigner $(u_0, u_1, u_2, \dots)$. En revanche lorsqu'on écrit u_n (avec le n , mais pas entouré de parenthèses ayant une mention du type $n \in \mathbb{N}$ ou $n \geq 0$) cela désigne l'élément numéro n .

Nombres réels Nous allons maintenant discuter des nombres réels.

Un exemple de construction mathématique de $\mathbb{R}$, en précisant les règles de calculs qui se rapprochent de notre intuition, est disponible par exemple dans les chapitres 1 et 2 du livre de Marie-Cécile Darracq et Jean-Étienne Rombaldi.

Dans les présentes notes de cours, à défaut de détailler toute une construction de ce type, on mettra en évidence des propriétés de $\mathbb{R}$, que l'on ne démontrera pas et qu'on qualifiera de « postulat » pour la lisibilité de la discussion, et dont on déduira un certain nombre d'autres propriétés et de théorème. Quelques mots sont indiqués en appendice 1.E sur la façon dont ces postulats peuvent en fait être démontrés en introduisant une construction explicite de $\mathbb{R}$.

1.1.b Propriétés de $\mathbb{R}$

Tout d'abord, on suppose connues les propriétés élémentaires (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, commutativité, inversibilité), que parmi deux réels distincts, il y en a toujours un des deux qui est strictement plus petit que l'autre, que cette relation d'infériorité/supériorité est compatible avec l'addition et la multiplication, et que les nombres rationnels sont un cas particulier de nombres réels.

La façon formelle d'énoncer cela est

Postulat 1.1.1. $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, totalement ordonné, et $\mathbb{Q}$ en est un sous-corps (en tant que corps totalement ordonné).

Ensuite, deux propriétés qui caractérisent $\mathbb{R}$ sont son caractère *archimédien* (d'où découle la *densité* de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) et la *propriété de la borne supérieure* (dont l'énoncé nous permettra de rappeler quelques définitions utiles) :

Propriété de la borne supérieure

Définition 1.1.2. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Un *majorant* de X est un nombre $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X, x \leq b$.

Un *minorant* de X est un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X, x \geq a$.

Remarque Si b est un majorant de X , alors tout nombre $b' \in [b; +\infty[$ est aussi un majorant de X . De même si a est un minorant de X , alors tout nombre $a' \in]-\infty, a]$ est aussi un minorant de X .

Définition 1.1.3. On dit que X est *majorée* si X admet un majorant et que X est *minorée* si X admet un minorant. Une partie majorée et minorée et appelée *bornée*.

Notation 1.1.4. La notation $\llbracket m; +\infty \rrbracket$ désigne l'ensemble $[m; +\infty[\cap \mathbb{Z}$, c'est à dire $\{m, m+1, m+2, \dots\}$. Plus généralement $\llbracket a; b \rrbracket$ désigne l'ensemble $[a; b[\cap \mathbb{Z}$.

Définition 1.1.5. On dira qu'une suite (u_n) est majorée (resp minorée resp bornée) si l'ensemble $X = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (resp minoré resp borné).

Si la suite (u_n) est bornée, alors on note « $u_n = \mathcal{O}(1)$ ».

Plus généralement, s'il existe deux suites (w_n) et (v_n) , telles que (w_n) soit bornée et qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n = w_n v_n$ (c'est à dire qu'il existe $N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket, u_n = w_n v_n$), alors on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. On dit dans ce cas que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) .

La borne supérieure d'une partie majorée et non vide X de $\mathbb{R}$ est le plus petit parmi tous les majorants de X :

Définition 1.1.6. Soit $X \subset \mathbb{R}$. Une *borne supérieure* de X est un majorant b de X tel que, pour tout autre majorant c de X , on ait $b \leq c$.

Théorème et notation 1.1.7. Si X admet une borne supérieure b , alors celle-ci est unique. On la note $b = \sup X$, et on l'appelle aussi « supremum » de X .

Démonstration. Soient b et c deux bornes supérieures de X . Alors c est un majorant donc $c \geq b$ (car b est une borne supérieure). De même b est un majorant donc $b \geq c$ (car c est une borne supérieure). Donc $b = c$, ce qui montre l'unicité. $\square$

Exemples

- Vous savez déjà que toute partie non vide majorée P de $\mathbb{Z}$ admet un maximum : c'est une borne supérieure qui appartient à P .
- L'intervalle $]0,1[$ admet 1 comme borne supérieure, et 1 n'appartient pas à l'intervalle.

La proposition ci-dessous est très utilisée pour déterminer des bornes supérieures :

Remarque 1.1.8. On définit de même la borne inférieure (ou « inféum ») de X , qui est (lorsqu'il existe) le plus grand des minorants de X , et est noté $\inf X$.

Proposition 1.1.9. Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $b = \sup X$ si et seulement si :

- i) pour tout $x \in X$, on a $x \leq b$;
- ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $x > b - \varepsilon$.

Démonstration.

- Supposons que $b = \sup X$. Alors b est un majorant de X , d'où i). De plus, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, $b - \varepsilon < b$ donc $b - \varepsilon$ n'est pas un majorant de X , donc il existe $x \in X$ tel que $x > b - \varepsilon$ (c'est à dire que ii) est satisfait).
- Réciproquement supposons que i) et ii) soient satisfaits. Alors d'une part i) indique que b est un majorant de X . Montrons d'autre part que c'est le plus petit majorant, c'est à dire que les nombres plus petits que b ne sont pas des majorants de X :
Soit $a < b$. Posons $\varepsilon = b - a$, d'après ii) il existe $x \in X$ tel que $x > b - \varepsilon = b - (b - a) = a$. Donc a n'est pas un majorant de X . Les majorants de X sont donc tous au moins égaux à b (qui est lui même un majorant), d'où $b = \sup X$. □

Remarque 1.1.10.

- Dans la proposition 1.1.9, l'affirmation « pour tout $\varepsilon > 0$ » signifie « pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ».
Cette notation est naturelle car le symbole > 0 n'a de sens que pour les nombres réels, et on continuera à utiliser cette notation dans tout ce cours.
- Pour la borne inférieure, l'analogue de la proposition 1.1.9 est :
Soient $X \subset \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $b = \inf X$ si et seulement si
 - i) pour tout $x \in X$, on a $x \geq b$;
 - ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $x < b + \varepsilon$.
- Il peut être utile de savoir que certaines personnes utilisent aussi les conventions
 - $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$
 - $\sup X = +\infty$ si X n'est pas majoré.
 - $\inf X = -\infty$ si X n'est pas minoré.

Ces conventions ne correspondent pas à la définition 1.1.6, et elles violent certaines propriétés (par exemple $\inf \emptyset > \sup \emptyset$, et la proposition 1.1.9 n'est pas satisfaite), c'est pourquoi on n'utilisera pas cette convention dans ce cours.

Le postulat suivant est appelé *propriété de la borne supérieure*.

Postulat 1.1.11. Toute partie X non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Caractère archimédien

Postulat 1.1.12 (Axiome d'Archimède). Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.

Remarque 1.1.13.

- Pour nous qui avons l'habitude de manipuler les nombres réels, cette propriété est évidente, par exemple en prenant (pour n) la partie entière de $x + 1$.
- Archimède raisonnait quand à lui de manière plus physique ou géométrique. Dans ce cas l'affirmation serait que si vous placez un point M n'importe où sur l'axe réel, alors si on construisait une règle assez grande, en mettant des graduations jusqu'au bout de cette règle, il y aurait une graduation qui dépasserait le point M .
- Si on veut être rigoureux mathématiquement, il faudrait prouver la propriété 1.1.12. Pour cela, il faudrait s'appuyer sur une construction précise, qui ne sera qu'esquissée en section 1.E.
- En fait, Archimède, avait plutôt formulé cet axiome comme l'affirmation selon laquelle

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > x.$$

Dans la vision imagée (ci avant) où pour n'importe quel point on peut construire une règle assez grande pour dépasser ce point, l'affirmation serait que le résultat reste vrai que la règle soit graduée en mètres, en millimètres, en microns, en pouces, ou dans d'autres unités plus ou moins farfelues (le ε correspond alors à la taille des graduations).

On va maintenant montrer la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, après l'introduction de quelques définitions importantes :

Corollaire et définition 1.1.14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n + 1.$$

Cet entier n s'appelle la partie entière inférieure de x , notée $E(x)$ ou $E(x)$.

Démonstration.

Existence: Soit $P = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$. Montrons que P est non vide et majoré :

- D'après l'axiome d'Archimède 1.1.12 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > |x|$. Alors $-n_0 < -|x| \leq x$, donc $-n_0 \in P$ et $P \neq \emptyset$.
- Avec cette même valeur de n_0 , on a $\forall m \in P : m \leq x \leq |x| < n_0$, donc P est majoré par n_0 .

Donc il existe un nombre $n = \max P$. Dès lors, $n \in P$ et $n + 1 \notin P$, c'est à dire $n \leq x < n + 1$. D'où l'existence de n .

Unicité: Soient $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n_1 \leq x < n_1 + 1$ et que $n_2 \leq x < n_2 + 1$. Alors d'une part $n_1 \leq x < n_2 + 1$ (donc $n_1 \leq n_2$) et d'autre part $n_2 \leq x < n_1 + 1$ (donc $n_2 \leq n_1$). D'où $n_1 = n_2$, qui montre l'unicité. $\square$

Définition 1.1.15. Pour $x \in \mathbb{R}$, il existe aussi un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 1 < x \leq n$.

Cet entier n s'appelle la partie entière supérieure de x .

Théorème 1.1.16 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $x < y$.

Alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

L'idée de la preuve va tout d'abord reposer sur le fait de choisir un dénominateur assez grand. Intuitivement, on voit bien que si on choisit $q > \frac{2}{y-x}$, alors les $\frac{p}{q}$ successifs sont distants de $\frac{1}{q} < \frac{y-x}{2}$ donc il devrait y en avoir entre y et x . Ensuite on cherchera à avoir $x < \frac{p}{q} < y$, c'est à dire $xq < p < yq$.

Démonstration. Grâce à l'axiome d'Archimède 1.1.12, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > \frac{2}{y-x}$. On remarque alors que $q > 0$.

On pose alors $p = E(yq) - 1$, de sorte que l'on a $p \leq yq - 1 < p + 1$. Donc $\frac{p}{q} \leq y - \frac{1}{q} < y$ et $\frac{p}{q} + \frac{1}{q} > y - \frac{1}{q}$ d'où $\frac{p}{q} > y - \frac{2}{q} > y - (y - x) = x$. On a montré que $x < \frac{p}{q} < y$, d'où le résultat en posant $r = \frac{p}{q}$. $\square$

1.1.c Algèbre des suites

On peut faire de nombreuses opérations sur les suites. Pour les lister ci-dessous, on considère que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites, et que λ est un nombre réel (ou un nombre complexe, selon le contexte) :

Addition: La suite $u + v$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n$.

Multiplication: La suite $u \times v$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, (u \times v)_n = u_n v_n$.

Dilatation: La suite $\lambda \cdot u$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda \cdot u)_n = \lambda u_n$.

Inverse: Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, alors on peut définir la suite $\frac{1}{u}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{u}\right)_n = 1/u_n$.

Renumérotation: Intuitivement, si on considère que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne $(u_0, u_1, u_2, \dots)$, alors par exemple $(u_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ désigne $(u_2, u_3, u_4, \dots)$ (que l'on aurait aussi pu noter $(u_n)_{n \in [2; +\infty[}$), tandis que $(u_{2n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ désigne $(u_3, u_5, u_7, \dots)$.

On reviendra sur cette notion en partie 1.4.

Remarque En pratique, pour la dilatation et la multiplication, on note souvent uv (au lieu de $u \times v$) et λu (au lieu de $\lambda \cdot u$). Ci-dessus, les notations $u \times v$ et $\lambda \cdot u$ sont utilisées afin de correspondre aux notations de l'appendice 1.D.

Propriété 1.1.17. Avec l'addition et la dilatation définies ci-dessus, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles forme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. De même l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes forme (pour cette addition et cette dilatation) un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

En considérant de plus la multiplication définie ci-dessus, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ forme une $\mathbb{R}$ -algèbre, tandis que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ forme une $\mathbb{C}$ -algèbre.

- Remarques**
- Les définitions des « espaces vectoriels » et des « algèbres » sont rappelées en appendice 1.D.
 - Cela permet d'identifier des sous algèbres : par exemple $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | u_0 = 0\}$ est une sous algèbre (donc munie d'une structure d'espace vectoriel, et même d'algèbre).

1.2 Convergence des suites réelles

1.2.a Rappels sur les limites

Limite d'une suite

Définition 1.2.1. Soit (u_n) une suite réelle, et $a \in \mathbb{R}$.

On dit que (u_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$ et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier m , tel que : $\forall n \in \llbracket m; +\infty \rrbracket, |u_n - a| < \varepsilon$.

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ si, pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe un entier m tel que : $\forall n \in \llbracket m; +\infty \rrbracket, u_n > M$.

On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ si, pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe un entier m tel que : $\forall n \in \llbracket m; +\infty \rrbracket, u_n < M$.

Au lieu de $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, on écrit parfois $\lim u_n = a$ ou même $u_n \rightarrow a$.

Remarque 1.2.2. L'ordre des quantificateurs (pour tout ε il existe m) signifie que m dépend de ε .

Enfin

- Pour $u_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, il n'est pas nécessaire d'avoir une inégalité stricte, il est équivalent de prendre comme définition : $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, |u_n - a| \leq \varepsilon$.
- Pour $u_n \rightarrow +\infty$, on peut se contenter de $M > 0$ et d'une inégalité large, c'est à dire qu'il est équivalent de demander $\forall M > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, u_n \geq M$.
- Pour $u_n \rightarrow -\infty$, il est équivalent de demander $\forall M < 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, u_n \leq M$.

La preuve est laissée en exercice

Définition 1.2.3. Une suite converge dans $\mathbb{R}$ si elle admet une limite réelle. Dans le cas contraire on dit qu'elle diverge.

On désigne par $\bar{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et il arrive parfois de dire qu'une suite converge dans $\bar{\mathbb{R}}$ si elle tend soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$ soit vers une limite finie $a \in \mathbb{R}$.

Quand on parle de **la nature** d'une suite, il s'agit d'indiquer si elle est convergente ou au contraire divergente.

Proposition 1.2.4.

- Si une suite (u_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$, alors elle est bornée, c'est à dire qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_n| \leq b$.
- Si une suite (u_n) tend vers $+\infty$, alors elle est minorée mais pas majorée.
- Si une suite (u_n) tend vers $-\infty$, alors elle est majorée mais pas minorée.

Démonstration.

- On utilise la définition de $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ avec $\varepsilon = 1$, et on obtient l'existence de $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m, a - 1 \leq u_n \leq a + 1$.

On pose alors $b = \max(|a| + 1, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{m-1}|)$, et on remarque que pour $n < m$, $|u_n| \leq b$ tandis que pour $n \geq m$, $|u_n| \leq |a| + 1 \leq b$, donc ce nombre b satisfait la propriété demandée.

- Si $u_n \rightarrow \infty$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m, u_n > 0$. Alors le nombre $\min(u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, 0)$ est un minorant de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Montrons maintenant que si (u_n) est majorée alors elle ne tend pas vers $+\infty$. On doit donc montrer que $\exists M \in \mathbb{R} : \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m : u_n \leq M$. On choisit pour cela $M = m + 1$, où m est un majorant de (u_n) . En posant $n = m$ on a bien la propriété $u_n \leq M$ de sorte que l'on a bien montré que $u_n \not\rightarrow \infty$.

- Si $u_n \rightarrow -\infty$, alors $-u_n \rightarrow \infty$ donc $(-u_n)$ est minorée mais pas majorée (d'après le point précédent), donc u_n est majorée mais pas minorée. $\square$

Proposition 1.2.5. Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite réelle est unique.

Démonstration. Soit (u_n) une suite réelle, et a et b deux réels tels que $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. On cherche à montrer qu'alors $a = b$:

Soit $\varepsilon > 0$, la définition de la limite (avec $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$) donne l'existence de deux entiers N_1 et N_2 tels que

$$\begin{cases} \forall n \geq N_1, |u_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n \geq N_2, |u_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

On pose alors $N = \max(N_1, N_2)$, et on a $|a - b| \leq |a - u_N| + |u_N - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

On a donc montré que $\forall \varepsilon > 0, |a - b| \leq \varepsilon$, donc $|a - b| = 0$, c'est à dire que $a = b$. $\square$

Opérations avec les limites

Proposition 1.2.6. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et supposons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b \in \mathbb{R}.$$

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n + \mu v_n) &= \lambda a + \mu b, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) &= ab. \end{aligned}$$

De plus, si $a \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \neq 0$ et on a de plus :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}.$$

Remarque 1.2.7. Par exemple si $u_n = 1 - \frac{5}{n}$, alors (u_n) est définie pour $n \geq 1$, tandis que la suite $(\frac{1}{u_n})$ est définie pour $n \neq 5$, et on devrait la noter $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq 6}$. Néanmoins, on a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 1$

Preuve de 1.2.6.

- *Linéarité* : Soit $\varepsilon > 0$. On applique les définitions de la limite aux suites (u_n) et (v_n) avec $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu| + 1}$, ce qui donne l'existence de

$$\begin{aligned} N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } & \quad \forall n \geq N_1, & \quad |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu| + 1} \\ \text{et } N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } & \quad \forall n \geq N_2, & \quad |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu| + 1}. \end{aligned}$$

On pose alors $N = \max(N_1, N_2)$, de sorte que pour $n \geq N$ on a :

$$|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda a + \mu b)| \leq |\lambda| |u_n - a| + |\mu| |v_n - b| \leq |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu| + 1} + |\mu| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu| + 1} < \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda a + \mu b$.

- *Limite de $u_n v_n$* : On note tout d'abord que la suite (v_n) est bornée d'après la propriété 1.2.4, donc il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. En posant $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M + |a| + 1}$, la définition de la limite donne l'existence de

$$\begin{aligned} N_1 \in \mathbb{N} : & \quad \forall n \geq N_1, & \quad |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{M + |a| + 1} \\ \text{et } N_2 \in \mathbb{N} : & \quad \forall n \geq N_2, & \quad |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{M + |a| + 1}. \end{aligned}$$

On pose alors $N = \max(N_1, N_2)$, de sorte que pour $n \geq m$ on a :

$$|u_n v_n - ab| = |(u_n - a)v_n + a(v_n - b)| \leq |u_n - a| |v_n| + |a| |v_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{M + |a| + 1} M + |a| \frac{\varepsilon}{M + |a| + 1} < \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = ab$.

- *Limite de $\frac{1}{u_n}$* : Si $a \neq 0$, on pose $\varepsilon_1 = \frac{|a|}{2}$ et la définition de la limite donne l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, |u_n - a| < \frac{|a|}{2}$.

Quand $n \geq N_1$ on a donc $|u_n| = |a + (u_n - a)| \geq |a| - |u_n - a| \geq \frac{|a|}{2} > 0$, donc la suite $\frac{1}{u_n}$ est bien définie à partir du rang N_1 .

Soit désormais $\varepsilon > 0$. On applique la définition de la limite avec $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \frac{a^2}{3}$ et on a l'existence de $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, |u_n - a| < \varepsilon \frac{a^2}{3}$.

On pose enfin $N = \max(N_1, N_2)$ et on note que pour tout $n \geq N$, $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - u_n|}{|a||u_n|} \leq \frac{\varepsilon \frac{a^2}{3}}{a^2/2} < \varepsilon$.

On a donc bien montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}$. □

Notation 1.2.8. Si la suite (u_n) tends vers 0, alors on note « $u_n = o(1)$ ».

Plus généralement, s'il existe deux suites (w_n) et (v_n) , telles que (w_n) tende vers 0 et qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n = w_n v_n$ (c'est à dire qu'il existe $N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N, +\infty \llbracket, u_n = w_n v_n$), alors on note $u_n = o(v_n)$. Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) est *négligeable devant* la suite (v_n) .

1.2.b Suites équivalentes

Théorème et définition 1.2.9. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. La notation « $u_n \sim v_n$ » (qui se lit « (u_n) est équivalente à (v_n) »), signifie qu'il existe une suite (ω_n) telle que :

- i) $u_n = \omega_n v_n$ à partir d'un certain rang (c'est à dire qu'il existe $N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N, +\infty \llbracket, u_n = \omega_n v_n$)
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n) = 1$.

Cette propriété définit une relation d'équivalence. De plus l'équivalent d'un produit s'obtient en multipliant les équivalents.

Exemple 1.2.10. Les suites définies par $u_n = n^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ et $v_n = (n^2 - 4) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ sont équivalentes. En posant $\omega_n = \frac{n^2}{n^2 - 4}$ on obtient i) pour $n \geq 3$ (tandis que ω_2 n'est pas défini), ainsi que ii).

On remarque sur cet exemple qu'on ne peut pas définir ω_n comme « $\frac{u_n}{v_n}$ », car v_n est nulle pour chaque n impair.

Preuve que 1.2.9 définit une relation d'équivalence.

- *Symétrie* : En posant $\omega_n = 1$ on obtient immédiatement que $u_n \sim u_n$.
- *Réflexivité* : Si deux suites (u_n) et (v_n) satisfont $u_n \sim v_n$, alors il existe une suite (ω_n) qui satisfait i) et ii). On applique alors la troisième propriété de 1.2.6 : il existe (x_n) qui tends vers 1 et vaut $\frac{1}{\omega_n}$ à partir d'un certain rang. Donc à partir de ce rang, $x_n u_n = \frac{1}{\omega_n} (\omega_n v_n) = v_n$. Donc $v_n \sim u_n$.
- *Transitivité* : Soient (u_n) , (v_n) et (x_n) trois suites telles que $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim x_n$. Il existe alors un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ et une suite $\omega_n \rightarrow 1$ tels que $\forall n \geq n_1 : u_n = \omega_n v_n$. De même il existe alors un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ et une suite $\tilde{\omega}_n \rightarrow 1$ tels que $\forall n \geq n_2 : v_n = \tilde{\omega}_n x_n$.

On pose alors $N = \max(n_1, n_2)$ et $a_n = \omega_n \tilde{\omega}_n$, de sorte que $a_n \rightarrow 1$ et $\forall n \geq N, u_n = a_n x_n$, donc $u_n \sim x_n$. □

Preuve que l'équivalent d'un produit s'obtient en multipliant les équivalents.

Soient (u_n) , (v_n) , (x_n) et (y_n) quatre suites telles que $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$, on cherche à montrer que $u_n v_n \sim x_n y_n$:

Comme $u_n \sim x_n$, il existe un rang N_1 et une suite (a_n) tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ et que $\forall n \in \llbracket N_1, +\infty \llbracket, u_n = a_n x_n$.

De plus, comme $v_n \sim y_n$, il existe un rang N_2 et une suite (b_n) tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ et que $\forall n \in \llbracket N_2; +\infty \rrbracket$, $v_n = b_n y_n$.

On pose $N = \max(N_1, N_2)$, et on constate que pour $n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$, on a à la fois $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, donc $u_n = a_n x_n$ et $v_n = b_n y_n$, d'où $u_n v_n = a_n b_n x_n y_n$.

Or la suite $(a_n b_n)$ tend vers 1, donc on a bien montré que $u_n v_n \sim x_n y_n$. $\square$

Proposition 1.2.11. Soit (u_n) une suite convergente vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$, et soit (v_n) équivalente à (u_n) . Alors (v_n) tend aussi vers a .

Démonstration. Tout d'abord, si $a \in \mathbb{R}$ alors v_n (qui est égal à partir d'un certain rang à $u_n \omega_n$, où ω_n est la suite obtenue à partir de la définition 1.2.9 de $v_n \sim u_n$) tend vers $a \times 1$ par limite d'un produit.

Supposons au contraire que $a = +\infty$ (resp $a = -\infty$), et posons $M > 0$ (resp $M < 0$). Comme $\omega_n \rightarrow 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|\omega_n - 1| \leq \frac{1}{2}$ (d'où $\omega_n \geq 1/2$). De plus il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $u_n > 2M$ (resp $u_n < 2M$). Enfin il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0$, $v_n = u_n \omega_n$.

On pose alors $m = \max(N_0, N_1, N_2)$, et on obtient que pour $n \geq m$, $v_n = \omega_n u_n > \frac{1}{2} 2M = M$ (resp $-v_n = \omega_n (-u_n) > \frac{1}{2} (-2M)$ c'est à dire $v_n < M$), d'où le résultat. $\square$

1.2.c Monotonie, adjacence

Théorème 1.2.12. Une suite réelle croissante est convergente si et seulement si elle est majorée. Dans ce cas elle converge vers sa borne supérieure. Sinon elle tend vers $+\infty$.

Une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée. Dans ce cas elle converge vers sa borne inférieure. Sinon elle tend vers $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite réelle croissante. Deux cas de figures sont possibles

- La suite est majorée, c'est à dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Dans ce cas l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non vide majoré, donc il admet une borne supérieure m .
Soit $\varepsilon > 0$. D'après 1.1.9 il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > m - \varepsilon$. Alors pour $n \geq N$ on a $u_n \geq u_N > m - \varepsilon$ et $u_n \leq m$ (car m est un majorant), donc $|u_n - m| = m - u_n < \varepsilon$.
On a bien montré que (u_n) converge vers sa borne supérieure m .
- Ou bien au contraire elle n'est pas majorée, c'est à dire que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$: $u_N > M$.
Par croissance on a alors $\forall n \geq N$, $u_n > M$, on a donc montré que $u_n \rightarrow +\infty$.

On pourrait répéter le même preuve pour les suites décroissantes en changeant le sens de chaque inégalité. Cela nécessiterait d'écrire l'analogue de la propriété 1.1.9 pour la borne inférieure.

À la place, on peut dire que si (u_n) est décroissante alors $(-u_n)$ est croissante, et il y a deux cas de figure (d'après ce qui précède) :

Dans un cas $(-u_n)$ est majorée (c'est à dire que (u_n) est minorée) et $-u_n \rightarrow \sup(-u_n)$, mais $\sup(-u_n) = -\inf(u_n)$ d'où $u_n \rightarrow \inf u_n$.

Dans l'autre cas, $-u_n$ n'est pas majorée (c'est à dire que u_n n'est pas minorée) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$, c'est à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. $\square$

Remarque 1.2.13. Soit (u_n) croissante majorée. Comme « (u_n) converge vers sa borne supérieure », on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_p \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

De même si (u_n) est décroissante minorée, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exemple 1.2.14. Soit $u_0 \in [-1, 1]$ et u_n définit par récurrence par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

On peut réécrire la relation de récurrence sous la forme $u_{n+1} = u_n + \frac{(1-u_n)^2}{2}$, ce qui indique que (u_n) est croissante. On a $u_0 \in [-1, 1]$, et de plus, si à un certain rang n on a $u_n \in [-1, 1]$ alors $0 \leq \frac{(1-u_n)^2}{2} \leq 1$ d'où $\frac{(1-u_n)^2}{2} \leq 1 - u_n$ d'où $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq u_n + 1 - u_n = 1$, donc $u_{n+1} \in [-1, 1]$.

Par récurrence, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1, 1]$, et cette suite croissante est majorée, donc elle converge vers une limite $a \in \mathbb{R}$.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a$ donc $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 1}{2}$ donc $a = \frac{a^2 + 1}{2}$. Ainsi $\frac{(a-1)^2}{2} = 0$, c'est à dire que $a = 1$; cette suite tend donc vers 1.

Définition 1.2.15. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si :

- i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante;
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

Proposition 1.2.16. Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La suite $(u_n - v_n)$ est croissante et tend vers 0. 0 est donc sa borne supérieure (d'après le théorème 1.2.12) donc c'est un majorant, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Dès lors, la suite (u_n) est croissante majorée (par toute valeur de (v_n) , par exemple v_1 est un majorant), donc elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors (v_n) admet la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, car $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + (v_n - u_n)$ (qui tend vers $\ell + 0$ par somme de limites). $\square$

Axiome de Cantor

Définition 1.2.17. Un intervalle fermé borné non vide (ou « segment de $\mathbb{R}$ ») est un intervalle $I = [a; b]$ pour deux réels $a < b$.

On note alors $\ell(I) = b - a$ la longueur de ce segment.

Une *suite décroissante d'intervalles emboîtés* (I_n) est une suite d'intervalles *fermés bornés non vides* $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tels que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(I_n) = 0 \end{cases}$$

Théorème 1.2.18 (Axiome de Cantor). Soit (I_n) une suite décroissante d'intervalles emboîtés. Alors il existe un $c \in \mathbb{R}$, et un seul, qui appartient à tous les I_n , c'est à dire :

$$\{c\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \min I_n$ et $b_n = \max I_n$ (d'où $I_n = [a_n; b_n]$).

L'inclusion $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$ indique que a_n est croissante et b_n décroissante, et comme $\ell(I_n) = b_n - a_n \rightarrow 0$, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Soit $c \in \mathbb{R}$ leur limite, dont on rappelle que $c = \sup a_n = \inf b_n$.

En tant que majorant des a_n et que minorant des b_n , c appartient à

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x \geq a_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x \leq b_n\}.$$

De plus, si un autre élément d appartient à $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$, alors c'est un majorant des a_n (donc $d \geq c$) et un minorant des b_n (donc $d \leq c$), d'où $d = c$. $\square$

Théorème 1.2.19. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est ni fini ni dénombrable, c'est à dire qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une surjection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, et montrons une contradiction (l'existence d'un élément $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas atteint par φ) :

On construit par récurrence une suite d'intervalles : On commence par poser $I_0 = [0, 1]$, puis on coupe I_0 en trois intervalles de même longueur, et on appelle I_1 un intervalle (parmi ces trois intervalles $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$) qui ne contient pas $\varphi(0)$ (il en existe forcément au moins un qui ne contient pas $\varphi(0)$ car au maximum, $\varphi(0)$ peut appartenir à deux des trois intervalles dans le cas extrême où $\varphi(0)$ serait le bord commun à deux intervalles). On recommence ensuite l'opération en coupant I_1 en trois intervalles de même longueur, et on appelle I_2 l'un de ces trois intervalles, qui ne contient pas $\varphi(1)$. etc

On obtient ainsi une suite décroissante d'intervalles emboîtés (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} \subset I_n$ et $\ell(I_n) = \frac{1}{3^n}$), donc il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$.

Il en découle la contradiction souhaitée : quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $x \neq \varphi(n)$ (car $x \in I_{n+1} \not\ni \varphi(n)$). $\square$

Limites supérieure et inférieure

Théorème et définition 1.2.20.

Soit (u_n) une suite réelle majorée. Alors la suite de terme général $M_n = \sup\{u_p \mid p \geq n\}$ est décroissante, et admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ que l'on note $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$. Si au contraire (u_n) n'est pas majorée on note $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

De même si une suite réelle (u_n) est minorée, alors la suite de terme général $m_n = \inf\{u_p \mid p \geq n\}$ est croissante, et admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que l'on note $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$. Si au contraire (u_n) n'est pas minorée on note $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = \{u_p \mid p \geq n\}$. On a alors $E_n \supset E_{n+1}$. Ainsi :

- Si la suite (u_n) est majorée, les E_n sont non vides majorés, donc $\sup E_n$ existe (dans $\mathbb{R}$), et de $E_n \supset E_{n+1}$ on déduit que $\sup E_n \geq \sup E_{n+1}$. Dès lors (M_n) est bien décroissante et admet donc une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
- De même si la suite (u_n) est minorée, les E_n sont non vides minorés, donc $\inf E_n$ existe (dans $\mathbb{R}$), et de $E_n \supset E_{n+1}$ on déduit que $\inf E_n \leq \inf E_{n+1}$. Dès lors (m_n) est bien croissante et admet donc une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. $\square$

Remarque 1.2.21. Lors que le contexte n'est pas ambigu, on appellera la suite (M_n) « suite des suprema »¹, et la suite (m_n) « suite des infema ». Le théorème 1.2.20 assure que ces deux suites convergent.

1. Quand un mot (qui vient du latin) latin se termine par “um” (comme supremum ou infemum), il est arrivé d'écrire son pluriel avec un “a”. On considère alors qu’“infema” est le pluriel de “infemum”, que “suprema” est le pluriel de “supremum”, etc. De même, en physique quantique le pluriel de *quantum* est souvent écrit *quanta*.

Proposition 1.2.22. Soit (u_n) une suite réelle. Alors :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

De plus (u_n) converge dans $\bar{\mathbb{R}}$ ssi $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$, et dans ce cas là, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Démonstration. L'inégalité $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ est automatique si (u_n) n'est pas majorée (car alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$) et si (u_n) n'est pas minorée (car alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$). Enfin, si (u_n) est bornée, alors à la fois $\sup\{u_p \mid p \geq n\}$ et $\inf\{u_p \mid p \geq n\}$ sont définis pour tout n et l'inégalité découle de $\forall n, \inf\{u_p \mid p \geq n\} \leq \sup\{u_p \mid p \geq n\}$.

Pour la deuxième affirmation, il y a deux implications à montrer

$\Rightarrow$: Si (u_n) tends vers $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, alors

- Si la suite est bornée, elle ne peut pas tendre vers $\pm\infty$, donc $\ell \in \mathbb{R}$.
Pour $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}; +\infty[, |u_n - \ell| \leq \epsilon$, c'est à dire que $\{u_p \mid p \geq N\} \subset [\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$.
Donc pour $n \geq N$, on a $\{u_p \mid p \geq n\} \subset [\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$, d'où $\ell - \epsilon \leq \inf\{u_p \mid p \geq n\} \leq \sup\{u_p \mid p \geq n\} \leq \ell + \epsilon$, ce qui montre la convergence de la suite des infémas et de la suite des supréma vers ℓ .
- Si $\ell = +\infty$, alors u_n n'est pas majorée donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$. En revanche elle est minorée et pour $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}; +\infty[, u_n \geq M$. Donc pour $n \geq N$, on a $\{u_p \mid p \geq n\} \subset [M; +\infty]$ d'où $\inf\{u_p \mid p \geq n\} \geq M$. On a donc montré que $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.
- Si $\ell = -\infty$, le même raisonnement donne $\limsup_{n \rightarrow -\infty} u_n = -\infty$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

$\Rightarrow$: Considérons une suite (u_n) telle que $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$, et désignons par ℓ leur limite commune.

- Si $\ell = -\infty$, alors $\sup\{u_p \mid p \geq n\} \rightarrow -\infty$, donc pour $M \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N, \sup\{u_p \mid p \geq n\} < M$. La propriété « $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ » découle alors de l'inégalité $u_n \leq \sup\{u_p \mid p \geq n\}$.
- De même, si $\ell = +\infty$, la propriété « $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ » découle de $u_n \geq \inf\{u_p \mid p \geq n\}$.
- Enfin, traitons le cas où $\ell \in \mathbb{R}$:

Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors (par convergence de la suite des supréma) $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, |\sup\{u_p \mid p \geq n\} - \ell| \leq \epsilon$, d'où en particulier $\sup\{u_p \mid p \geq N_1\} \leq \ell + \epsilon$ d'où $\forall n \geq N_1, u_n \leq \ell + \epsilon$. De même la convergence des infémas donne l'existence de $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, |\inf\{u_p \mid p \geq n\} - \ell| \leq \epsilon$, d'où en particulier $\inf\{u_p \mid p \geq N_2\} \geq \ell - \epsilon$ d'où $\forall n \geq N_2, u_n \geq \ell - \epsilon$. On pose alors $N = \max(N_1, N_2)$, et on a $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$, d'où le résultat. $\square$

1.3 Suites de Cauchy, espaces complets

On va désormais essayer de donner un sens précis à l'affirmation selon laquelle « il ne manque pas d'éléments à $\mathbb{R}$ », par opposition à $\mathbb{Q}$ auquel il manquait des éléments comme $\sqrt{2026}$.

Mathématiquement on dira que « $\mathbb{R}$ est complet », et pour donner un sens à cette affirmation il faut d'abord définir la notion de suite de Cauchy :

1.3.a Suites de Cauchy

Une difficulté avec la définition 1.2.1 est que pour montrer qu'une suite converge, il faut connaître sa limite (et montrer que les termes de la suite s'en rapprochent).

Au contraire une suite de Cauchy est une suite dont les termes se rapprochent les uns des autres :

Définition 1.3.1. Une suite (u_n) est *de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tous entiers p et q supérieurs à N , on ait :

$$|u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Exemple 1.3.2.

- La suite $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $\forall n \geq 1 + E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$, $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dès lors, quand p et q sont supérieurs à $1 + E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$, on a $\left|\frac{p-1}{p} - \frac{q-1}{q}\right| = \left|\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{1}{q}\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left|\frac{1}{p}\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$
- La suite $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - u_{n+1}| = 2n + 1 \geq 1$, donc en prenant $\varepsilon = 1$, $p = N$ et $q = N + 1$ on a « $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}, \exists p \geq N, q \geq N : |u_n - u_p| \geq \varepsilon$ » qui est la négation de « (u_n) est de Cauchy ».

Proposition 1.3.3.

- Si une suite converge dans $\mathbb{R}$, alors elle est de Cauchy.
- Si une suite est de Cauchy, alors elle est bornée.

La preuve est laissée en exercice.

Remarque : Cette proposition éclaire l'exemple 1.3.2 : la suite $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est de Cauchy car elle converge dans $\mathbb{R}$, tandis que la suite $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy parce qu'elle n'est pas bornée.

Définition 1.3.4. Une partie X de $\mathbb{R}$ est *complète* si pour toute suite de Cauchy (u_n) d'éléments de X , il existe $\ell \in X$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exemple 1.3.5. L'intervalle $]0; 1[$ n'est pas complet, car la suite définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$ est de Cauchy (car elle converge vers 1), à valeurs dans $]0; 1[$, mais n'admet pas de limite $\ell \in]0; 1[$: En effet si elle admettait une limite $\ell \in]0; 1[\subset \mathbb{R}$, l'unicité de la limite (propriété 1.2.5) impliquerait que $\ell = 1$, qui contredit $\ell \in]0; 1[$.

De même $\mathbb{Q}$ n'est pas complet car la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1 - u_n^2 / 2026}{4} \end{cases}$$

est à valeur dans $\mathbb{Q}$ mais converge vers $\sqrt{2026} \notin \mathbb{Q}$. (La preuve est laissée en exercice aux lecteur-ice-s, elle suit celle de l'exemple 1.2.14 : on montre que la suite est croissante, majorée, puis on trouve une relation sur sa limite).

Montrons enfin que $\mathbb{R}$ est complet.

Théorème 1.3.6. Une suite réelle (u_n) converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration. On a déjà vu que si une suite converge, alors elle est de Cauchy, on a donc uniquement besoin de montrer la réciproque :

Soit (u_n) une suite de Cauchy. Soit $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$, qui est réelle car (u_n) est bornée. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$:

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme (u_n) est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (p, q) \in \llbracket N_1; +\infty \rrbracket^2 : |u_p - u_q| \leq \varepsilon/3$.

Par convergence de la suite des suprema (voir remarque 1.2.21), il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_2$, $|\ell - \sup\{u_p \mid p \geq n\}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. En particulier en posant $N_3 = \max(N_1, N_2)$ et notant $S = \sup\{u_p \mid p \geq N_3\}$, on a $|\ell - S| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

D'après la caractérisation 1.1.9 du supremum S , il existe $N_4 \geq N_3$ tel que $u_{N_4} > S - \frac{\varepsilon}{3}$. On a de plus $u_{N_4} \leq S$. Donc $|u_{N_4} - S| = S - u_{N_4} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Dès lors, pour $n \geq N_4$, on a $|u_n - \ell| \leq \underbrace{|u_n - u_{N_4}|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|u_{N_4} - S|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|S - \ell|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$.

On a donc bien montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$. □

1.4 Suites extraites, valeurs d'adhérence

1.4.a Suites extraites

Définition 1.4.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée une *suite extraite*, ou sous suite, de la suite (u_n) . On note souvent $n_k = \varphi(k)$ et $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

Exemple 1.4.2. Soit (u_n) une suite réelle. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) des termes paires ou impaires de (u_n) sont des suites extraites de (u_n) . De même, la suite tronquée $(u_n)_{n \geq n_0}$, obtenue en fixant $n_0 \in \mathbb{N}$ et en posant $\varphi(n) = n_0 + n$, est une suite extraite de (u_n) .

Remarque 1.4.3. Toute application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfait $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Démonstration. C'est vrai pour $n = 0$ (car $\varphi(0) \in \mathbb{N}$), et ça se propage du rang $n \in \mathbb{N}$ au rang $n + 1$ (car la croissance stricte indique que $\varphi(n + 1) \geq \varphi(n) + 1$), donc par récurrence, c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Limites d'une suite extraite

Proposition 1.4.4. Soit (u_n) une suite réelle et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite. Alors :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Démonstration.

- L'inégalité $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)}$ découle de la proposition 1.2.22. De plus l'inégalité $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)}$ est automatique si (u_n) n'est pas minorée (car $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$) donc il suffit de la montrer quand (u_n) est minorée. De même il suffit de montrer $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ quand (u_n) est majorée.
- Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\{u_{\varphi(p)} \mid p \geq n\} \subset \{u_p \mid p \geq n\}$ (car $\forall p \in \mathbb{N}, \varphi(p) \geq p$). Lorsqu' u_n est majorée, on en déduit que $\sup\{u_{\varphi(p)} \mid p \geq n\} \leq \sup\{u_p \mid p \geq n\}$ et que donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$.
Et lorsqu' u_n est minorée, on en déduit de même que $\inf\{u_{\varphi(p)} \mid p \geq n\} \geq \inf\{u_p \mid p \geq n\}$ et que donc $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$. □

Corollaire 1.4.5. Si une suite réelle (u_n) converge vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers a .

Démonstration. Cela découle de la proposition 1.2.22. En effet, si (u_n) converge vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$, on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = a$. En utilisant 1.4.4, on déduit que toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ satisfait $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = a$, d'où on déduit que $(u_{\varphi(n)})$ converge aussi vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$ (d'après la proposition 1.2.22). □

1.4.b Valeur d'adhérence

Définition de valeur d'adhérence

Théorème et définition 1.4.6. Soit (u_n) une suite réelle et $a \in \mathbb{R}$. Les conditions ci dessous sont équivalentes :

- i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre infini de valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $|u_n - a| < \varepsilon$.
- ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : |u_n - a| < \varepsilon$.
- iii) Il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers a .

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que a est une valeur d'adhérence de (u_n) .

La définition se généralise à $\bar{\mathbb{R}}$: si $a = +\infty$ (resp $a = -\infty$) on remplace « $\varepsilon > 0$ » par $M \in \mathbb{R}$, et $|u_n - a| < \varepsilon$ par $u_n > M$ (resp $u_n < M$).

Démonstration. On va rédiger la preuve pour $a \in \mathbb{R}$, et on laisse les cas $a = +\infty$ et $a = -\infty$ en exercice aux lecteur-riche-s. Pour montrer l'équivalence entre les trois propriétés, on va montrer que i) $\Rightarrow$ ii), puis que ii) $\Rightarrow$ iii), et enfin que iii) $\Rightarrow$ i).

- Montrons que i) $\Rightarrow$ ii) : supposons que i) est satisfaite, et posons $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$.

Alors l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid |u_p - a| < \varepsilon\}$ est infini, et ne peut donc pas être inclus dans $\llbracket 0; N \rrbracket$, donc $\exists n \geq N : |u_n - a| < \varepsilon$.

- Montrons que ii) $\Rightarrow$ iii) : supposons que ii) est satisfaite, et construisons par récurrence une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ qui tend vers a . Pour cela on va même imposer que $\forall n \geq 1 : |u_{\varphi(n)} - a| < \frac{1}{n}$.

- On pose $\varphi(0) = 0$.
- Étant donné un rang $n \geq 1$, si on a déjà construit $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)$, alors d'après la propriété ii) (où l'on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et $N = \varphi(n-1) + 1$), il existe un nombre $m \in \llbracket \varphi(n-1) + 1; +\infty \rrbracket$ tel que $|u_m - a| < \frac{1}{n}$. On pose alors $\varphi(n) = m$.
- Cela construit par récurrence $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \geq 1 : |u_{\varphi(n)} - a| < \frac{1}{n}$. Cette suite extraite tend bien vers a , car pour $\varepsilon > 0$, on pose $N = 1 + E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (d'où $N > \frac{1}{\varepsilon}$) et on a $\forall n \geq N : |u_{\varphi(n)} - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

- Montrons que iii) $\Rightarrow$ i) : Supposons qu'une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tende vers a .

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$. On en déduit que $\forall n \in \{\varphi(N), \varphi(N+1), \varphi(N+2), \dots\}, |u_n - a| < \varepsilon$, d'où la propriété i) (car l'ensemble $\{\varphi(N), \varphi(N+1), \varphi(N+2), \dots\}$ est infini). □

Exemple 1.4.7. Soit $(u_n) = ((-1)^n)$. Alors la suite (u_{2n}) vaut constamment 1 tandis que (u_{2n+1}) vaut -1 . Donc 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de (u_n) .

Limite supérieure et limite inférieure comme valeurs d'adhérence

Proposition 1.4.8. La limite supérieure et limite inférieure sont des valeurs d'adhérence.

Remarque 1.4.9. Avec les propositions 1.4.8 et 1.4.4 on voit que la limite supérieure (resp la limite inférieure) est la plus grande (resp la plus petite) valeur d'adhérence.

C'est pourquoi la limite supérieure est parfois appelée « plus grande limite » et la limite inférieure « plus petite limite ».

Preuve de la proposition 1.4.8. Soit (u_n) la suite réelle en question et posons $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Montrons qu'on a la propriété ii) de la définition 1.4.6. Par simplicité on le rédige dans le cas où $a \in \mathbb{R}$ (sinon il faudrait remplacer tous les $|u_n - a| < \varepsilon$ par $u_n > M$ (si $a = +\infty$) ou par $u_n < M$ (si $a = -\infty$)).

Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$. Par convergence de la suite des suprema, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|a - \sup\{u_p \mid p \geq n\}| < \varepsilon$. En particulier on note $S = \sup\{u_p \mid p \geq N_1\}$, et on a donc $S < a + \varepsilon$. De plus, par décroissance de la suite des suprema (qui sont donc plus grand que leur limite), on a $S \geq a$ (donc $a \leq S < a + \varepsilon$).

D'après la propriété 1.1.9, il existe $N_2 \geq \max(N_1, N)$ tel que $S - \varepsilon < u_{N_2} \leq S$, donc $a - \varepsilon \leq S - \varepsilon < u_{N_2} \leq S < a + \varepsilon$ et donc $|u_{N_2} - a| < \varepsilon$, et on a donc bien montré la propriété ii) de la définition 1.4.6. Donc a est une valeur d'adhérence de (u_n) .

Enfin, on en déduit le cas de limite inférieure : $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-u_n)$ donc il existe une suite extraite $(-u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $-\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_n)$, et la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tend alors vers $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_n)$. $\square$

Corollaire 1.4.10. Une suite réelle (u_n) converge vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si a est sa seule valeur d'adhérence.

Démonstration. Tout d'abord, si $u_n \rightarrow a$, alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, donc a est la seule valeur d'adhérence (d'après 1.4.8 et 1.4.4).

Au contraire si (u_n) ne converge pas dans $\bar{\mathbb{R}}$, alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$ sont deux valeurs d'adhérences distinctes, donc (u_n) a alors plusieurs valeurs d'adhérence. $\square$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Nous terminons ce chapitre par l'un des résultats les plus connus à propos des suites.

Théorème 1.4.11. Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

Preuve utilisant ce qui précède. il existe une suite extraite qui converge vers $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n) \in \mathbb{R}$. $\square$

On donne aussi une preuve plus intéressante (car constructive) :

Preuve par dichotomie. Soit (u_n) une suite réelle bornée, a un minorant et b un majorant de (u_n) .

On va construire deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il y ait une infinité d'entiers p tels que $a_n \leq u_p \leq b_n$.

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

- Soit $n \geq 1$, supposons qu'on a déjà construit $(a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1})$ et $(b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{n-1})$ tels qu'il y ait une infinité d'entiers p tels que $a_{n-1} \leq u_p \leq b_{n-1}$.

On pose $A = \{p \in \mathbb{N} \mid u_p \in [a_{n-1}; \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}]\}$ et $B = \{p \in \mathbb{N} \mid u_p \in [\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}; b_{n-1}]\}$.

On note que $A \cup B$ est l'ensemble infini $\{p \in \mathbb{N} \mid a_{n-1} \leq u_p \leq b_{n-1}\}$ donc il y a au moins un des deux ensembles A et B qui est infini.

Si A est infini, on pose $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, sinon on pose $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ et $b_n = b_{n-1}$.

- Cela construit bien par récurrence deux suites a_n et b_n telles que
 - Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il y ait une infinité d'entiers p tels que $a_n \leq u_p \leq b_n$.
 - La suite (a_n) est croissante tandis que (b_n) est décroissante.
 - $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

Ces suites sont donc adjacentes et ont une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrons maintenant que ℓ est une valeur d'adhérence, en montrant qu'elle satisfait la condition i) de la définition 1.4.6 :

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N = 1 + E\left(\frac{\log \frac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2}\right)$ (qui satisfait $\frac{b-a}{2^N} < \varepsilon$). Alors il y a une infinité d'entiers p tels que $a_N \leq u_p \leq b_N$, et de plus $\ell \in [a_N; b_N]$ avec $b_N - a_N < \varepsilon$. Donc cette infinité d'entiers satisfait $|u_p - \ell| \leq b_N - a_N < \varepsilon$, ce qui donne la condition i) de la définition 1.4.6. $\square$

Appendices

1.A Quantificateurs

Exemple

$\forall$: L'affirmation « $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ » se lit « *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$* ». Cela signifie que quand le nombre x varie et parcourt $\mathbb{R}$, la propriété « $\exp(x) > 0$ » reste tout le temps vraie.

$\exists$: L'affirmation « $\exists z \in \mathbb{C} : \exp(z) = -1$ » se lit « *Il existe $z \in \mathbb{C}$, tel que $\exp(z) = -1$* ». Cela signifie que quand le nombre z varie et parcourt $\mathbb{C}$, il y a au moins une fois où la propriété « $\exp(z) = -1$ » est vraie (sur cet exemple, elle est même vraie à plusieurs reprises, par exemple lorsque $z = i\pi$, mais aussi lorsque $z = 3i\pi$, etc.

Différentes notations utilisées dans les démonstrations

Dans des démonstration, on remplacera le plus souvent les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ par des affirmations en toutes lettres. Par exemple dans la partie *Linéarité* de la preuve de 1.2.6 en page 16, on a écrit

Soit $\varepsilon > 0$. (...)
On pose alors $N = \dots$
Pour $n \geq N$ on a $|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda a + \mu b)| \leq \dots < \varepsilon$

Comme on commence par « Soit $\varepsilon > 0$ », tout ce qui suit est valable quel que soit $\varepsilon > 0$, cela revient à affirmer quelque chose qui commence par $\forall \varepsilon > 0$.

Ensuite « On pose alors $N = \dots$ » indique qu'il existe une valeur de N pour laquelle la suite de ce qu'on va écrire est valable (en l'occurrence, dans cette preuve, c'était lorsque $N = \max(N_1, N_2)$).

Enfin quand on écrit « Pour $n \geq N$ on a » on affirme quelque chose qui est vrai pour tout $n \geq N$.

Ainsi cette preuve indique concrètement que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda a + \mu b)| < \varepsilon$$

(ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda a + \mu b$).

Nécessité d'utiliser des quantificateurs

Même pour des calculs aussi simples que

$$2 \exp(x) = \exp(x + \ln(2)) > \exp(x)$$

il est nécessaire de préciser ce que désigne la variable x .

La personne qui lit notre copie doit savoir si on affirme que le calcul est vrai pour toutes les valeurs de x , ou bien uniquement pour certaines valeurs (affirme-t-on juste qu'il y a une valeur pour laquelle c'est vrai?)

Sur cet exemple, l'affirmation est vraie pour $x \in \mathbb{R}$, mais ne fait aucun sens si x est un nombre complexe arbitraire (car dans ce cas $\exp(x)$ est aussi complexe, et les inégalités n'ont aucun sens sur les nombres complexes).

C'est pourquoi vous devrez préciser sur votre copie ce que sont chacune des variables. Pour cet exemple, il faudrait écrire sur votre copie que

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } 2 \exp(x) = \exp(x + \ln(2)) > \exp(x)$$

C'est exactement comme quand on programme en python, si on calcule « $x+2$ » sans avoir défini « x », on a un message d'erreur :

```
1 Z=x+2
2 print(Z)
```

NameError: name 'x' is not defined

Variables muettes (ou temporaires)

Il y a une seule exception où il n'y a pas besoin d'avoir précisé ce qu'est la variable : lorsque la variable est « une variable muette ».

Par exemple quand on écrit $\sum_{i=1}^3 i^2$, il n'y a pas besoin d'avoir précisé préalablement ce qu'est « i ».

Ainsi, dans le code ci-dessous en python

```
1 i="hello"
2 print(sum(i**2 for i in [1,2,3]))
3 i=i+" world"
4 print(i)
```

14
hello world

le code a tout d'abord défini la variable i comme étant égale à "hello". Puis en deuxième ligne, pour exécuter « $\text{print}(\text{sum}(i**2 \text{ for } i \text{ in } [1,2,3]))$ », il a défini une variable i temporaire qui n'existe que pour le calcul de la somme, qui n'est pas impacté par la ligne précédente, et qui n'a pas d'impact sur la ligne suivante (parce que python sait que que le i de $\sum_{i=1}^3 i^2$ est une variable muette). Il affiche alors le nombre 14 (qui est égal à $1^2 + 2^2 + 3^2$). Puis la ligne $i=i+" \text{ world}"$ fait que la variable i (qui était jusqu'ici égale à "hello") devient égale à "hello world", que l'ordinateur affiche quand on finit par $\text{print}(i)$.

La façon de rédiger les maths répond à une rigueur syntaxique relativement similaire :

- Quand on écrit $\sum_{i=1}^3 i^2$, cela ne nécessite pas d'avoir défini préalablement i (et ça ignore tout ce qui a été dit précédemment sur la variable i).
- Quand on écrit $\sum_{i=1}^3 i^2$, cela ne définit pas la variable i , donc ça n'autorise pas à écrire en ligne suivante des égalités comme $i^2 = (i+1)(1-1) - 1$ (car on n'a pas précisé ce qu'est " i ").

Différence entre « Pour tout » et $\forall$

En python, quand on exécute une commande $i = \dots$, cela définit la variable i jusqu'à la prochaine fois où on aura une commande $i = \dots$ (la variable sera modifiée à ce moment là).

Et bien de même, dans un raisonnement mathématique, quand on écrit en toute lettre "Soit $x \in \dots$ " (ou "On pose $x = \dots$ " ou d'autres conditions comme "il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $\dots$ ") cela définit la variable x jusqu'à la prochaine fois où on l'écrira en toute lettre "Pour $x = \dots$ " (ou d'autres conditions en toutes lettres comme "il existe $x \in \mathbb{R}$ ").

En revanche si on utilise $\forall$ ou $\exists$, c'est exactement comme avec le symbole Σ : on définit alors une variable muette (ou temporaire) qui n'existe que dans cette formule là, et qu'on ne pourra pas utiliser dans les lignes suivantes.

Par exemple, dans la partie *Linéarité* de la preuve de 1.2.6 en page 16, on a écrit "Soit $\varepsilon > 0$ " car on va utiliser ce ε dans les lignes suivantes de la preuve. De même on a écrit en toutes lettres l'existence de N_1 et N_2 car on va aussi les utiliser dans les lignes suivantes de la preuve. En revanche le " $\forall n \geq N_1, |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu| + 1}$ " est écrit avec un " $\forall$ ", car la prochaine fois qu'on va utiliser la lettre " n " il ne satisfera plus $n \geq N_1$ (dans la ligne suivante ce sera $n \geq N_2$, puis $n \geq N$ dans la ligne d'après). Et comme on a utilisé un " $\forall$ ", les lignes suivantes auront besoin de préciser ce que désigne le symbole n (sauf s'il est à nouveau utilisé à l'intérieur d'un " $\forall$ " ou d'un " $\exists$ ").

Dans le doute, si vous ne savez pas encore si vous allez réutiliser la variable que vous définissez, vous pouvez écrire en toutes lettres à la place d'écrire " $\forall$ " ou " $\exists$ ", cela réduit le risque de faire des erreurs.

Ordre des quantificateurs

Quand on écrit par exemple que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x = y$$

cela signifie que pour chaque $x \in \mathbb{R}$ il existe un nombre $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = x$.

Comme on dit que "pour chaque $x \in \mathbb{R}$ il existe un y ", cela indique que y peut varier en fonction du nombre x (par exemple on peut choisir le nombre qui est égal à x , et constater ainsi que l'affirmation " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x = y$ " est bien correcte).

En revanche, si l'on écrit que " $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x = y$ " cela signifie qu'il existe un nombre y tel que pour tout x on ait $y = x$. Cette fois-ci ça signifie que c'est le même y qui convient pour toutes les valeurs de x , c'est à dire que y n'a pas le droit de dépendre de x . On se convainc aisément que l'affirmation " $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x = y$ " est fausse.

On notera que

- Il faut écrire les quantificateurs dans un ordre compréhensible (pas comme en ix) de l'exercice 5). On choisira simplement de toujours les écrire à gauche de l'affirmation (on écrira " $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ " et on n'écrira pas " $\exp(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ").
- On peut intervertir deux quantificateurs $\forall$ ou deux quantificateurs $\exists$, mais on ne peut pas intervertir un $\forall$ avec un $\exists$ (c'est à dire que " $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ " revient au même que " $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ ", tandis que " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ " ne revient pas au même que " $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}$ ").

Négation d'une affirmation qui contient des quantificateurs

La négation de "cette propriété est vraie quelle que soit la valeur de x " est "il existe au moins une valeur de x pour laquelle cette propriété est fausse".

En conséquence, quand on fait la négation d'une affirmation qui contient des quantificateurs,

- on remplace les $\forall$ par des $\exists$ (et inversement), sans changer l'ensemble auquel appartiennent les variables.
- on fait la négation de l'affirmation qui est à la fin des quantificateurs.

Par exemple, la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x = y$ » est « $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \neq y$ ».

De même, la négation de « $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x = y$ » est « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x \neq y$ ».

1.B Implications

Notations : différence entre “ $\Rightarrow$ ” et “donc”

Prnons par exemple la dernière phrase de l'exemple 1.2.14 : qu'est-ce que cela chagerait si on écrivait « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a \Rightarrow a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 1}{2}$ », au lieu d'écrire « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a$ donc $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 1}{2}$ » ?

- Quand on écrit $A \Rightarrow B$ on affirme que “ A implique B ”, c'est à dire qu'à chaque fois que A est vrai, B est vrai aussi.

À titre d'exemple on pourrait considérer l'implication (qui est correcte pour tout $n \in \mathbb{Z}$) : « $(n \equiv 0[4]) \Rightarrow ((-1)^n = 1)$ ». Cette affirmation n'empêche pas qu'il existe des entiers n tels que $n \not\equiv 0[4]$; elle dit juste que pour les nombres tels que $n \equiv 0[4]$, on a $(-1)^n = 1$.

Ainsi si on écrivait simplement « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a \Rightarrow a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 1}{2}$ » cela n'affirmerait pas que

« $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a$ » soit vraie, ni que « $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 1}{2}$ » soit vraie, mais uniquement que lorsque le premier est vrai, le deuxième l'est aussi.

- En revanche dans la preuve de l'exemple 1.2.14, on souhaite affirmer d'une part que « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a$ » est vraie, et d'autre part que ça permet de conclure que « $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 1}{2}$ ». C'est exactement ce que signifie le mot “donc”.

Quand on écrit “donc”, cela indique à la fois que les affirmations juste avant et juste après le “donc” sont vraies, et que la deuxième découle de la première.

- Si on veut affirmer qu'une première affirmation est vraie, et qu'elle est équivalente à une deuxième affirmation (cette deuxième est donc vraie aussi) alors on écrit “c'est à dire” à la place de donc.

Réciproque, contraposée et négation d'une implication

Pour une implication quelconque $A \Rightarrow B$, sa réciproque est l'implication $B \Rightarrow A$, tandis que sa contraposée est l'implication $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$.

De plus, il faut comme toujours définir les variables que l'on utilise. Ainsi, on doit par exemple préciser que c'est pour tout $n \in \mathbb{N}$ que l'on affirme l'implication « $(n \equiv 0[4]) \Rightarrow ((-1)^n = 1)$ ».

- La contraposée revient exactement au même que l'implication de départ. Par exemple pour l'implication « $(n \equiv 0[4]) \Rightarrow ((-1)^n = 1)$ », la contraposée est « $((-1)^n \neq 1) \Rightarrow (n \not\equiv 0[4])$ ».

Elle revient au même que l'implication de départ : affirmer que si $n \equiv 0[4]$ alors $(-1)^n = 1$, ça revient exactement au même que d'affirmer que si $(-1)^n \neq 1$ alors $n \not\equiv 0[4]$.

- Au contraire la réciproque est une affirmation vraiment différente de l'implication de départ. Sur cet exemple la réciproque serait « $((-1)^n = 1) \Rightarrow (n \equiv 0[4])$ », et si on précise de quelle variable on parle, elle dirait en fait que « $\forall n \in \mathbb{Z}, (((-1)^n = 1) \Rightarrow (n \equiv 0[4]))$ ». Sur cet exemple, l'affirmation de

départ était vraie, mais sa réciproque est fausse (par exemple, l'entier $n = 2$ satisfait $(-1)^n = 1$ mais ne satisfait pas « $n \equiv 0[4]$ »).

- La négation d'une implication nécessite de faire plus attention aux quantificateurs :
 - Formellement la négation de $A \Rightarrow B$ est « A et (non B) », c'est à dire que l'implication est contredite lorsque A est vrai sans que B ne soit vraie.
 - En pratique, on cherche la négation d'énoncés avec quantificateurs, comme « $\forall n \in \mathbb{Z}, ((n \equiv 0[4]) \Rightarrow ((-1)^n = 1))$ ». Alors sa négation est « $\exists n \in \mathbb{Z} : (n \equiv 0[4] \text{ et } (-1)^n \neq 1)$ ». Comme les affirmations que l'on considère sont généralement de la forme « $\forall \dots, (\dots \Rightarrow \dots)$ », leur négation commence par « $\exists$ ». Pour démontrer cette négation, il suffit donc de trouver une valeur où l'implication tombe en défaut. Une telle valeur s'appelle un *contre-exemple* et elle suffit à invalider un énoncé de la forme « $\forall \dots, (\dots \Rightarrow \dots)$ ».
- Parfois on peut réécrire les implications en écrivant des ensembles. Par exemple, « $\forall n \in \mathbb{Z}, ((n \equiv 0[4]) \Rightarrow ((-1)^n = 1))$ » peut se réécrire comme « $\forall n \in \mathbb{Z}, ((n \in 4\mathbb{Z}) \Rightarrow ((-1)^n = 1))$ » ou encore « $\forall n \in 4\mathbb{Z}, (-1)^n = 1$ ». Sous cette forme, il est d'autant plus facile de comprendre sa négation (que l'on peut écrire « $\exists n \in 4\mathbb{Z} : (-1)^n \neq 1$ »).

1.C Rationalité ou irrationalité de $\sqrt{n}$

Pour ces preuves on supposera uniquement que vous connaissez l'existence d'une unique « décomposition en facteurs premiers » de chaque entier naturel.

Lemme 1.C.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel.

Démonstration. Supposons que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ et montrons que dans ce cas $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

Comme $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, donc $n = \frac{a^2}{b^2}$.

On désigne par $\{p_i | 1 \leq i \leq k\}$ les facteurs premiers de a , par $\{p'_i | 1 \leq i \leq l\}$ les facteurs premiers de b , et par $\{\tilde{p}_i | 1 \leq i \leq m\}$ l'ensemble $\{p_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{p'_i | 1 \leq i \leq l\}$ qui regroupe les p_i et les p'_i (et les $\tilde{p}_i$ sont tous distincts). On désigne enfin par $a = \prod_{i=1}^m \tilde{p}_i^{n_i}$ et par $b = \prod_{i=1}^m \tilde{p}_i^{n'_i}$ les décompositions en facteurs premiers de a et de b . Cette notation signifie par exemple qu'on pose $n_i = 0$ si $\tilde{p}_i$ est un facteur premier de b mais pas un facteur premier de a , et cela permet d'avoir les mêmes nombres premiers $\tilde{p}_i$ dans les décomposition de a et de b . On obtient ainsi :

$$n = \frac{a^2}{b^2} = \prod_{i=1}^m \tilde{p}_i^{2(n_i - n'_i)}. \quad (1.1)$$

Il suffit désormais de montrer que comme $n \in \mathbb{N}$, chacune des puissances $2(n_i - n'_i)$ est positive (ou nulle).

En effet une fois cela montré, on aura $\sqrt{n} = \prod_{i=1}^m \tilde{p}_i^{(n_i - n'_i)} \in \mathbb{N}$.

Procédons par l'absurde en supposant que une (ou plusieurs) des puissances $2(n_i - n'_i)$ soient strictement négatives. Notons $A = \{i | n_i > n'_i\}$ et $B = \{i | n_i < n'_i\} \neq \emptyset$. On déduit de (1.1) que

$$n \prod_{i \in B} \tilde{p}_i^{2(n'_i - n_i)} = \prod_{i \in A} \tilde{p}_i^{2(n_i - n'_i)}. \quad (1.2)$$

B étant non vide, on peut prendre $i_0 \in B$, et obtenir une contradiction en notant que $\tilde{p}_{i_0}$ est un facteur premier de $n \prod_{i \in B} \tilde{p}_i^{2(n'_i - n_i)}$, mais pas de $\prod_{i \in A} \tilde{p}_i^{2(n_i - n'_i)}$ (qui sont deux entiers égaux, d'après (1.2)). $\square$

Corollaire 1.C.2. $\sqrt{2026}$ est irrationnel.

Démonstration. $\sqrt{2026}$ n'est pas entier car $45^2 < 2026 < 46^2$ d'où il découle que $45 < \sqrt{2026} < 46$. Donc $\sqrt{2026} \notin \mathbb{Q}$ d'après le 1.C.1. $\square$

1.D Espaces vectoriels, algèbres

Dans cette partie, la lettre K désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.D.1 (Espace vectoriel). Soient E un ensemble, muni d'une "addition" : $\begin{cases} E \times E \rightarrow E \\ (a, b) \mapsto a + b \end{cases}$ et d'une dilatation, qui multiplie un vecteur par un nombre : $\begin{cases} K \times E \rightarrow E \\ (\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a \end{cases}$

Cela constitue un espace vectoriel si toutes les conditions ci-dessous sont satisfaites :

- i) L'addition est commutative : $\forall (a, b) \in E^2, a + b = b + a$.
- ii) Elle est associative : $\forall (a, b, c) \in E^3, (a + b) + c = a + (b + c)$.
- iii) Il existe un vecteur nul 0 tel que $\forall a \in E, a + 0 = a$.
- iv) Tout vecteur admet un opposé : $\forall a \in E, \exists b \in E : a + b = 0$
- v) La dilatation est distributive par rapport aux additions de vecteurs et aux multiplications de nombres :
 $\forall \lambda \in K, \forall (a, b) \in E^2, \lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$ et $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall a \in E, (\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$.
- vi) la dilatation par le nombre 1 est l'identité : $\forall a \in E, 1 \cdot a = a$.

- Remarques**
- Si on a écrit cette définition pour $K = \mathbb{R}$, alors on dit que « E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ». Au contraire, si on a écrit cette définition pour $K = \mathbb{C}$, alors on dit que « E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ».
 - Dans cette définition, les points i) à iv) indiquent que l'addition munit E d'une structure de groupe abélien.
 - On peut alors déduire de v) et vi) que pour tout vecteur a , l'opposé du vecteur se calcule comme $(-1) \cdot a$, tandis que $0 \cdot a$ est le vecteur nul.

Démonstration.

- Preuve que pour tout $a \in E$, le produit $0 \cdot a$ est égal au vecteur nul :
Soit $a \in E$. On a alors $a = 1 \cdot a = (0 + 1) \cdot a = 0 \cdot a + 1 \cdot a = 0 \cdot a + a$.
Si on désigne par b l'opposé de a (défini en iv) et tel que $a + b = 0$, en ajoutant b à l'égalité « $a = 0 \cdot a + a$ » obtenue ci-avant, on déduit que $a + b = 0 \cdot a + a + b$, c'est à dire $0 = 0 \cdot a$.
- Preuve que l'opposé d'un vecteur a est égal $(-1) \cdot a$.
Soit $a \in E$. Désignons par b l'opposé de a (défini en iv) et tel que $a + b = 0$.
On a tout d'abord $0 = 0 \cdot a = ((-1) + 1) \cdot a = (-1) \cdot a + 1 \cdot a = (-1) \cdot a + a$. Dès lors, en ajoutant b à l'égalité « $0 = (-1) \cdot a + a$ » obtenue ci-avant, on déduit que $b = (-1) \cdot a + a + b$, c'est à dire $b = (-1) \cdot a$. $\square$

Remarque : La preuve ci-dessus peut sembler rébarbative pour montrer un résultat intuitif, mais il s'agit de vérifier que les affirmations « $0 \cdot a = 0$ » et « $(-1) \cdot a$ est l'opposé de a » découlent bien des propriétés i) à vi).

Théorème et définition 1.D.2 (Sous-espace vectoriel). Si un ensemble E forme un espace vectoriel pour une certaine définition de l'addition et de la multiplication, alors un sous espace vectoriel est un sous ensemble $F \subset E$ qui forme un espace vectoriel pour la même définition de l'addition et de la multiplication.

En pratique, il n'est pas nécessaire de vérifier pour cela toutes les conditions i) à v) de la définition 1.D.1. Au lieu de cela il est suffisant de vérifier les conditions ci-dessous :

- a) $F \neq \emptyset$, et $F \subset E$, où E forme un espace vectoriel (pour une certaine addition et multiplication).
- b) $\forall \lambda \in K, \forall (a, b) \in F^2, \lambda \cdot a + b \in F$ (pour la même addition et multiplication).

Démonstration. Soit $F \subset E$ qui satisfait a) et b) (en particulier, E est un espace vectoriel).

Pour montrer qu'il satisfait la définition 1.D.1, on doit d'abord s'assurer que l'on dispose bien d'une addition $\begin{cases} F \times F \rightarrow F \\ (a, b) \mapsto a + b \end{cases}$ et d'une dilatation $\begin{cases} K \times F \rightarrow F \\ (\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a \end{cases}$

Puis on devra ensuite montrer que chacune des propriétés i) à vi) de la définition 1.D.1 est satisfaite.

- *Définition de l'addition :* Quand $(a, b) \in F^2$, le vecteur $a + b$ est bien défini car a et b sont des éléments de E , et l'addition est bien définie sur E . Il suffit donc de montrer que $a + b \in F$, afin d'obtenir $\begin{cases} F \times F \rightarrow F \\ (a, b) \mapsto a + b \end{cases}$

Pour cela on note que $a + b = 1 \cdot a + b$, qui appartient à F d'après b) (où l'on a pris $\lambda = 1$).

- *Définition de la dilatation* De même pour la dilatation, ce qu'il faut montrer est que pour tout $\lambda \in K$ et $a \in F$, on ait $\lambda \cdot a \in F$.

Pour cela on remarque que quelque soient $\lambda \in K$ et $a \in F$, on a $\lambda \cdot a = (\lambda - 1) \cdot a + a$ qui appartient à F d'après d'après b) (que l'on a utilisé avec le nombre $\lambda - 1$ en prenant $b = a$).

- *propriétés i) à vi) de la définition 1.D.1 :*

- i) La propriété « $\forall (a, b) \in F^2, a + b = b + a$ » découle de fait que les éléments de F sont des éléments de E , et que E satisfait cette propriété.
- ii) Il en est de même pour « $\forall (a, b, c) \in F^3, (a + b) + c = a + (b + c)$ ».
- iii) Comme $F \neq \emptyset$ il existe un vecteur $b \in F$. Alors d'après b) on a $(-1)b + b \in F$. Or $(-1)b + b$ est le vecteur nul (comme on l'a vu ci-avant), qui satisfait « $\forall a \in E, a + 0 = a$ ».
On a donc « $\forall a \in F, a + 0 = a$ » (et on a montré que $0 \in F$).
- iv) On a déjà vu que l'opposé d'un vecteur a est $(-1) \cdot a$. Et si $a \in F$, alors d'après b) on a $F \ni (-2) \cdot a + a = (-1) \cdot a$, donc son opposé est bien dans F .
- v) Les propriétés « $\forall \lambda \in K, \forall (a, b) \in F^2, \lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$ »
et « $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall a \in F, (\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$ », découlent du fait $F \subset E$ et que la propriété est vraie dans E .
- vi) Il en va de même pour la propriété « $\forall a \in F, 1 \cdot a = a$ ».

□

Définition 1.D.3 (Algèbre). Si un espace vectoriel E est de plus muni d'une multiplication $\begin{cases} E^2 \rightarrow E \\ (a, b) \mapsto a \times b \end{cases}$ (où le produit de deux vecteurs et un vecteur), et si cette multiplication est bilinéaire, alors on dit que (pour cette multiplication) il forme une algèbre

Remarques

- Dans cette définition, le fait que la multiplication soit bilinéaire signifie que les conditions ci-dessous soient satisfaites :
 - i) $\forall (a,b,c) \in E^3, a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
 - ii) $\forall (a,b,c) \in E^3, (a+b) \times c = a \times c + b \times c$
 - iii) $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (a,b) \in E^2, (\lambda \cdot a) \times (\mu \cdot b) = (\lambda \mu) \cdot (a \times b)$
- Si on a écrit cette définition pour $K = \mathbb{R}$, alors on dit que « E est une $\mathbb{R}$ -algèbre ». Au contraire, si on a écrit cette définition pour $K = \mathbb{C}$, alors on dit que « E est une $\mathbb{C}$ -algèbre ».

Théorème et définition 1.D.4 (Sous-algèbre). Si un ensemble E forme une algèbre pour une certaine définition de l'addition, de la dilatation, et de la multiplication, alors une sous-algèbre est un sous ensemble $F \subset E$ qui forme une algèbre pour la même définition de l'addition et de la multiplication.

En pratique, il n'est pas nécessaire de vérifier pour cela toutes les conditions des définitions 1.D.1 et 1.D.3. Au lieu de cela il est suffisant de vérifier les conditions ci-dessous :

- a) F est un sous espace vectoriel de E .
- b) $\forall (a,b) \in F^2, a \times b \in F$.

Démonstration. Soit $F \subset E$ qui satisfait a) et b) (de la définition 1.D.4).

Pour montrer qu'il satisfait la définition 1.D.3, on doit d'abord s'assurer que l'on dispose bien d'une multiplication $\begin{cases} F^2 \rightarrow F \\ (a,b) \mapsto a \times b \end{cases}$

Puis on devra ensuite vérifier que la multiplication est bien bilinéaire.

- *Définition de la multiplication :* Quand $(a,b) \in F^2$, le vecteur $a \times b$ est bien défini car a et b sont dans E , et car la multiplication est bien définie dans E . De plus la propriété b) assure que $a \times b \in F$.
- *Bilinéarité :* Les trois propriétés
« $\forall (a,b,c) \in F^3, a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ », « $\forall (a,b,c) \in F^3, (a+b) \times c = a \times c + b \times c$ », et
« $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (a,b) \in F^2, (\lambda \cdot a) \times (\mu \cdot b) = (\lambda \mu) \cdot (a \times b)$ » sont satisfaites car les éléments de F sont des éléments de E et car la propriété est vraie pour les éléments de E (car E est une algèbre). $\square$

Algèbre des suites

Preuve de la propriété 1.1.17. Vérifions tout d'abord que l'ensemble des suites forme un espace vectoriel, pour l'addition et la multiplication définies en paragraphe 1.1.c. On vérifie pour cela chacune des conditions de la définition 1.D.1 :

- i) Étant données deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour montrer que les suites $u+v$ et $v+u$ sont égales, on calcule leur $n^{\text{ème}}$ élément (pour chaque $n \in \mathbb{N}$) :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $(u+v)_n = u_n + v_n = v_n + u_n = (v+u)_n$.
Donc $u+v = v+u$.
- ii) De même, étant données trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :
 $\forall n \in \mathbb{N}, ((u+v)+w)_n = (u+v)_n + w_n = u_n + v_n + w_n = u_n + (v+w)_n = (u+(v+w))_n$, d'où l'égalité
« $(u+v)+w = u+(v+w)$ ».

- iii) Désignons par 0 la suite nulle (dont tous les éléments sont nuls). Alors pour n'importe quelle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, (u + 0)_n = u_n + 0 = u_n, \text{ d'où l'égalité } \ll u + 0 = u \gg.$$
- iv) Étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on désigne par (v_n) son opposé défini par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -u_n$. Alors, on a
- $$\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n = u_n - u_n = 0, \text{ d'où l'égalité } \ll u + v = 0 \gg.$$
- On a bien montré que pour toute suite (u_n) , il existe une autre suite (v_n) , telle que $u + v = 0$.
- v) Étant données deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et deux nombres λ et μ , on a :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda \cdot (u + v))_n = \lambda(u + v)_n = \lambda(u_n + v_n) = \lambda u_n + \lambda v_n = (\lambda \cdot u)_n + (\lambda \cdot v)_n = (\lambda \cdot u + \lambda \cdot v)_n, \text{ d'où l'égalité } \ll \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \gg.$$
- De plus on a
- $$\forall n \in \mathbb{N}, ((\lambda + \mu) \cdot u)_n = (\lambda + \mu)u_n = \lambda u_n + \mu u_n = (\lambda \cdot u)_n + (\mu \cdot u)_n = (\lambda \cdot u + \mu \cdot u)_n, \text{ d'où l'égalité } \ll (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \gg.$$
- vi) Étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a
- $$\forall n \in \mathbb{N}, (1 \cdot u)_n = 1 u_n = u_n, \text{ d'où l'égalité } \ll 1 \cdot u = u \gg.$$

Ainsi on a bien montré que les suites forment un espace vectoriel. Pour vérifier que c'est une algèbre (définition 1.D.3 il faut vérifier que la multiplication des suites est bien bilinéaire :

- i) Étant données trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, (u \times (v + w))_n = u_n(v + w)_n = u_n(v_n + w_n) = u_n v_n + u_n w_n = (u \times v + u \times w)_n, \text{ d'où l'égalité } \ll u \times (v + w) = u \times v + u \times w \gg.$$
- ii) De même, étant données trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, ((u + v) \times w)_n = (u + v)_n w_n = (u_n + v_n) w_n = u_n w_n + v_n w_n = (u \times w + v \times w)_n, \text{ d'où l'égalité } \ll (u + v) \times w = u \times w + v \times w \gg.$$
- iii) Enfin, étant données deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et deux nombres λ et μ , on a :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, ((\lambda \cdot u) \times (\mu \cdot v))_n = (\lambda \cdot u)_n (\mu \cdot v)_n = \lambda u_n \mu v_n = \lambda \mu u_n v_n = (\lambda \mu)(u \times v)_n = ((\lambda \mu) \cdot (u \times v))_n, \text{ d'où l'égalité } \ll (\lambda \cdot u) \times (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot (u \times v) \gg. \quad \square$$

preuve que $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_0 = 0\}$ a une structure de sous algèbre.

Désignons par F l'ensemble $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_0 = 0\}$, et montrons que (pour l'addition, la multiplication et la dilatation définies en paragraphe 1.1.c) il forme une sous algèbre de l'ensemble de toutes les suites.

On vérifie pour cela les deux conditions de la définition 1.D.4 :

- *Sous espace vectoriel* Pour vérifier que c'est un sous espace vectoriel on doit vérifier les conditions indiquées en 1.D.2 :
 - $F \neq \emptyset$ car par exemple, la suite nulle appartient à F (la suite nulle satisfait bien $u_0 = 0$).
 - F est un sous ensemble de l'ensemble des suites : F est l'ensemble des suites (u_n) telles que $u_0 = 0$ donc les éléments de F sont bien des suites. De plus on a vu que l'ensemble des suites forme un espace vectoriel (c'est même une algèbre).
 - Soient $\lambda \in K$, et $(u, v) \in F^2$, montrons qu'alors $\lambda \cdot u + v \in F$. Il faut pour cela vérifier que $(\lambda \cdot u + v)_0 = 0$.
Or $(\lambda \cdot u + v)_0 = (\lambda \cdot u)_0 + v_0 = \lambda u_0 + v_0$, ce qui est égal à zéro car $u_0 = v_0 = 0$ (qui découle de l'appartenance à F).
- Prouvons enfin que $\ll \forall (u, v) \in F^2, u \times v \in F \gg$
Soient deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui appartiennent à F (c'est à dire que $u_0 = v_0 = 0$), alors on a $(u \times v)_0 = u_0 v_0 = 0$, d'où $u \times v \in F$. $\square$

1.E Constructions de $\mathbb{R}$

On a montré dans les parties précédentes certaines propriétés de $\mathbb{R}$, en s'appuyant sur les postulats 1.1.1, 1.1.11 et 1.1.12, que l'on a pas démontré. On ne les détaille pas ici, mais il existe plusieurs façons de construire $\mathbb{R}$ de telle sorte que ces "postulats" puissent être prouvés plutôt qu'admis :

- Une possibilité est de définir les réels comme des ensembles de rationnels, par exemple le nombre réel $\sqrt{2026}$ serait identifié à l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ ou } x^2 \leq 2026\}$ (dont $\sqrt{2026}$ est la borne supérieure). Cette construction est due à Richard Dedekind, et est connue sous le nom de « Coupure de Dedekind ».

Avec cette construction, on peut montrer directement les postulats 1.1.1, 1.1.11 et 1.1.12 d'où découle le reste du chapitre.

- Une autre possibilité est de construire $\mathbb{R}$ de façon à ce qu'il satisfasse le théorème 1.3.6. Cette construction est par exemple détaillée dans le livre de Marie-Cécile Darracq et Jean-Étienne Rombaldi (LMD Maths, 2020).

Dans cette construction $\mathbb{R}$ est défini comme le « complété de $\mathbb{Q}$ », c'est à dire le plus petit espace complet qui contienne $\mathbb{Q}$. C'est une façon mathématique de dire que $\mathbb{R}$ est constitué de toutes les limites de suites rationnelles.

Avec cette construction, on a directement le théorème 1.3.6, et cela demande plus de travail de montrer la propriété 1.1.11 (dans dans le livre de Marie-Cécile Darracq et Jean-Étienne Rombaldi, c'est le théorème 2.20, en fin de chapitre 2 (alors que $\mathbb{R}$ est construit dans le chapitre 1).

1.F Démonstrations omises dans le texte principal

De nombreuses preuves ont été laissées en exercices aux lecteur/lectrices.

Elles sont néanmoins rédigées ci-dessous :

Preuve du 1.1.15. On remarque simplement que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$n - 1 < x \leq n \Leftrightarrow -n \leq -x < -n + 1 \Leftrightarrow -n = E(-x) \quad (1.3)$$

Il en découle que pour x fixé, il y a un n et un seul qui satisfait $n - 1 < x \leq n$: c'est le nombre $-E(-x)$. $\square$

Preuve que la propriété 1.1.12 implique la formulation « $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > x$ » (de la remarque 1.1.13).

Si on applique la propriété 1.1.12, au nombre $\frac{x}{\varepsilon}$, on obtient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{x}{\varepsilon}$, ce qui implique que $n\varepsilon > x$. $\square$

Remarque 1.2.2 : preuve qu'on peut remplacer les " $< \varepsilon$ " par " $\leq \varepsilon$ ".

- Il est clair que si $u_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, |u_n - a| \leq \varepsilon$
(car $|u_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon$).

Réciproquement, supposons que $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, |u_n - a| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$, et appliquons la propriété à $\varepsilon/2$ (car $\varepsilon/2 > 0$) : il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, on a $|u_n - a| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Donc on a bien $u_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$.

- De même il est clair que si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $\forall M > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, u_n \geq M$.

Réciproquement, supposons que $\forall M > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, u_n \geq M$, et montrons que $u_n \rightarrow +\infty$. Soit $m \in \mathbb{R}$, on pose $M = |m| + 1$ et on a l'existence de $m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, u_n \geq M > m$, d'où $u_n \rightarrow +\infty$.

- Pour $u_n \rightarrow -\infty$, la preuve est exactement la même. $\square$

Preuve de la propriété 1.3.3.

- Soit (u_n) une suite qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.
En prenant $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$ dans la définition 1.2.1, on a l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Dès lors, si deux entiers p et q sont supérieurs à N , on a $|u_p - u_q| \leq |u_p - a| + |u_q - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, donc la suite (u_n) est bien de Cauchy.
- Soit (u_n) une suite de Cauchy. En posant $\varepsilon = 1$, il existe N , tel que $\forall (p, q) \in \llbracket N, +\infty \rrbracket^2, |u_p - u_q| < 1$.
On pose alors $M = \max(|u_1|, |u_2|, \dots, |u_N|, |u_{N+1}| + 1)$; pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, montrons que $|u_n| \leq M$:
 - Si $n \leq N$, $|u_n|$ est un des éléments dont on a pris le max, donc $|u_n| \leq M$.
 - Sinon $|u_{N+1} - u_n| < 1$ donc $|u_n| \leq |u_{N+1}| + 1$ d'où le résultat. $\square$

Preuve pour l'exemple 1.3.5.

On considère la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1 - u_n^2/2026}{4} \end{cases}$$

et on considère un rang $n \geq 1$ où $u_n \in \mathbb{Q}^+$ et $u_n^2 \leq 2026$ (ce qui est le cas au rang $n = 1$).

Alors $u_n \leq 2026$ et

$$\begin{aligned} 2026 - u_{n+1}^2 &= 2026 - u_n^2 - u_n \frac{1 - u_n^2/2026}{2} - \frac{(1 - u_n^2/2026)^2}{16} \\ &= \underbrace{(2026 - u_n^2)}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{u_n}{2026} - \frac{1 - u_n^2/2026}{16 \times 2026}\right)}_{\geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16} > 0} \end{aligned}$$

Donc au rang $n + 1$ on a à nouveau $u_{n+1}^2 \leq 2026$ et $u_{n+1} \in \mathbb{Q}^+$ (car $\underbrace{u_n}_{\in \mathbb{Q}^+} + \underbrace{\frac{1 - u_n^2/2026}{4}}_{\in \mathbb{Q}^+} \in \mathbb{Q}^+$). Par récurrence,

c'est donc le cas pour tout $n \geq 1$.

Donc la suite u_n est croissante et majorée par 2026. Elle admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, cette limite satisfait $\ell = \ell + \frac{1 - \ell^2/2026}{4}$ d'où $\ell = \sqrt{2026}$. $\square$

Preuve du théorème 1.4.6 lorsque $a \in \{-\infty, +\infty\}$.

On considère le cas où $a = +\infty$ (resp $a = -\infty$).

On doit alors montrer l'équivalence entre

- Pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un nombre infini de valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $u_n > M$ (resp $u_n < M$).
- $\forall M \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : u_n > M$ (resp $u_n < M$).
- Il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers a .

- Montrons que i) $\Rightarrow$ ii) : supposons que i) est satisfaite, et posons $M \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$.

Alors l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid u_p > M\}$ (resp $\{p \in \mathbb{N} \mid u_p < M\}$) est infini, et ne peut donc pas être inclus dans $\llbracket 0; N \rrbracket$, donc $\exists n \geq N : u_n > M$ (resp $u_n < M$).

- Montrons que ii) $\Rightarrow$ iii) : supposons que ii) est satisfaite, et construisons par récurrence une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ qui tend vers a . Pour cela on va même imposer que $\forall n \geq 1 : u_{\varphi(n)} > n$ (resp $u_{\varphi(n)} < -n$).

- On pose $\varphi(0) = 0$.
 - Étant donné un rang $n \geq 1$, si on a déjà construit $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)$, alors d'après la propriété ii) (où l'on prend $M = n$ (resp $M = -n$) et $N = \varphi(n-1) + 1$), il existe un nombre $m \in \llbracket \varphi(n-1) + 1; +\infty[$ tel que $u_m > n$ (resp $u_m < -n$). On pose alors $\varphi(n) = m$.
 - Cela construit par récurrence $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \geq 1 : u_n > n$ (resp $u_n < -n$).
- Cette suite extraite tend bien vers a , car pour $M \in \mathbb{R}$, si l'on pose $N = 1 + E(|M|)$ (de sorte que $N > |M|$ donc $N > M$ et $-N < M$) alors on a $\forall n \geq N : u_{\varphi(n)} > n \geq N > M$ (resp $u_{\varphi(n)} < -n \leq -N < M$).
- Montrons que iii) $\Rightarrow$ i) : Supposons qu'une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tende vers a .
- Pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_{\varphi(n)} > M$ (resp $u_{\varphi(n)} < M$). On en déduit que $\forall n \in \{\varphi(N), \varphi(N+1), \varphi(N+2), \dots\}, u_n > M$ (resp $u_n < M$), d'où la propriété i) (car l'ensemble $\{\varphi(N), \varphi(N+1), \varphi(N+2), \dots\}$ est infini). $\square$

Chapitre 2

Séries réelles et complexes

Ce chapitre portera sur des sommes infinies, réelles ou complexes. Comme on va manipuler des limites de nombres complexes, on commence par généraliser au cas complexe certains résultats du chapitre 1. Si iels ne sont pas familier·e·s avec l'inégalité triangulaire $|a + b| \leq |a| + |b|$, les lect·eur·rice·s sont encouragé·e·s à lire l'appendice 2.A.2.

2.1 Suites complexes

Théorème et définition 2.1.1. Soit (u_n) une suite complexe et $z \in \mathbb{C}$. On dit que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z$ si les conditions équivalentes ci-dessous sont satisfaites :

- i) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \quad |u_n - z| < \varepsilon.$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(z)$

Remarque : Dans ce cours, on ne généralise pas la notion de convergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ aux nombres complexes.

Preuve du théorème 2.1.1. La preuve repose sur les trois inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} |u_n - z| \leq |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(z)| & \text{(i1)} \\ |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(z)| \leq |u_n - z| & \text{(i2)} \\ |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(z)| \leq |u_n - z| & \text{(i3)} \end{cases}$$

Montrons, grâce à la première inégalité (i1) que ii) $\Rightarrow$ i) :

Soient (u_n) et z qui satisfont ii). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$, et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors $N = \max(N_1, N_2)$, et on obtient que pour tout $n \geq N$, $|u_n - z| \leq |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(z)| < \varepsilon$, d'où la propriété i).

De même la deuxième inégalité (i2) prouve que i) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(z)$, tandis que la troisième inégalité (i3) prouve que i) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(z)$, d'où i) $\Rightarrow$ ii). $\square$

Remarque 2.1.2. De même l'inégalité

$\forall n \in \mathbb{N}, ||u_n| - |z|| \leq |u_n - z|$ indique que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = z$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |z|$.

Théorème 2.1.3. $\mathbb{C}$ est complet, c'est à dire qu'une suite complexe (u_n) admet une limite dans $\mathbb{C}$ si et seulement si elle est de Cauchy, c'est à dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall (p, q) \in \mathbb{N}; +\infty \llbracket^2, |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Démonstration. Si une suite complexe est de Cauchy, alors d'après les inégalités (i2) et (i3), sa partie réelle et sa partie imaginaire sont de Cauchy, donc convergent vers des limites $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 \in \mathbb{R}$ (car $\mathbb{R}$ est complet), donc la suite tend vers $l_1 + i l_2$ (d'après la caractérisation ii) dans la définition 2.1.1).

Réciproquement si une suite complexe converge, alors elle est de Cauchy (par la proposition 1.3.3 qui se généralise immédiatement aux nombres complexes). $\square$

Proposition 2.1.4. Le théorème 1.2.6 est encore valable dans $\mathbb{C}$, c'est à dire que si (u_n) et (v_n) sont deux suites avec $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{C}$ et $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \in \mathbb{C}$, alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda a + \mu b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = ab.$$

De plus, si $a \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \neq 0$ et on a de plus :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}.$$

Démonstration. La première affirmation découle de l'identité (valable pour tout $n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} \lambda u_n + \mu v_n = & \operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(u_n) + \operatorname{Re}(\mu)\operatorname{Re}(v_n) - \operatorname{Im}(\mu)\operatorname{Im}(v_n) \\ & + i(\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Im}(u_n) + \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Re}(u_n) + \operatorname{Re}(\mu)\operatorname{Im}(v_n) + \operatorname{Im}(\mu)\operatorname{Re}(v_n)) \end{aligned}$$

dont la partie réelle tends vers $\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(a) - \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(a) + \operatorname{Re}(\mu)\operatorname{Re}(b) - \operatorname{Im}(\mu)\operatorname{Im}(b) = \operatorname{Re}(\lambda a + \mu b)$ et la partie imaginaire vers $\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Im}(a) + \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Re}(a) + \operatorname{Re}(\mu)\operatorname{Im}(b) + \operatorname{Im}(\mu)\operatorname{Re}(b) = \operatorname{Im}(\lambda a + \mu b)$.

La deuxième affirmation s'obtient de même à partir de l'identité (valable pour tout $n \in \mathbb{N}$) :

$$u_n v_n = \operatorname{Re}(u_n)\operatorname{Re}(v_n) - \operatorname{Im}(u_n)\operatorname{Im}(v_n) + i(\operatorname{Re}(u_n)\operatorname{Im}(v_n) + \operatorname{Im}(u_n)\operatorname{Re}(v_n)).$$

Enfin, la troisième affirmation s'obtient de même à partir de l'identité (valable à partir d'un certain rang, de sorte que $|u_n|^2 \neq 0$) : $\frac{1}{u_n} = \frac{\operatorname{Re}(u_n)}{|u_n|^2} - i \frac{\operatorname{Im}(u_n)}{|u_n|^2}$. $\square$

2.2 Convergence de séries

Définition 2.2.1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle ou complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle « sommes partielles » les nombres

$$s_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{m=0}^n u_m.$$

La suite (s_n) s'appelle la *série de terme général* u_n , ou la *série* $\sum u_n$.

Définition 2.2.2. On dit que la série réelle (respectivement complexe) $\sum u_n$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ (resp vers $a \in \mathbb{C}$) si la suite (s_n) des sommes partielles converge vers a (c'est à dire que $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^n u_m$). Dans ce cas on note :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = a$$

et on dit aussi que $\sum u_n$ est « de nature convergente », et que a est « la somme » de la série $\sum u_n$.

Si s_n n'a pas de limite dans $\mathbb{R}$ (resp dans $\mathbb{C}$), alors on dit que $\sum u_n$ diverge, ou qu'elle est « de nature divergente ».

Remarque 2.2.3. Comme on le discutera en TD, les théorèmes et définitions de ce chapitre ne dépendent pas du fait que les termes commencent au rang 0, ou 1, ou à un rang quelconque.

Exemple 2.2.4. Somme télescopique :

La série de terme général $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge vers 1 car pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Ce type de sommes de la forme $\sum_k (u_k - u_{k+1})$ s'appelle des “*sommes télescopiques*”.

Exemple 2.2.5. Série géométrique : Pour $r \in \mathbb{C}$, la série géométrique de terme général $u_n = r^n$ converge ssi $|r| < 1$. En effet, si $r \neq 1$ on a

$$\begin{aligned} (1-r) \sum_{k=0}^n r^k &= \sum_{k=0}^n (r^k - r^{k+1}) = 1 - r^{n+1} \\ \text{d'où} \quad \sum_{k=0}^n r^k &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

qui converge si et seulement si $|r| < 1$.

De plus si $r = 1$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = n$ qui diverge vers $+\infty$.

Proposition 2.2.6. Si une série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Démonstration. Avec les notations de la définition 2.2.1, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = s_n - s_{n-1}$, qui tend vers 0 car $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1}$. $\square$

Remarque 2.2.7. Il n'y a pas de réciproque, le terme général u_n peut tendre vers 0 sans que la série converge. C'est le cas de la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$: on a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, mais on a aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ donc $\sum_{k=0}^n u_k = \sqrt{n+1}$ qui diverge.

Définition 2.2.8. On dit qu'une série $\sum u_n$ « *diverge grossièrement* » si le terme général (u_n) ne tends pas vers 0.

Proposition 2.2.9 (Critère de Cauchy). La série complexe $\sum u_n$ converge si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \llbracket N; +\infty \llbracket$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on ait :

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Démonstration. Avec les notations de la définition 2.2.1, le théorème 2.1.3 indique que (s_n) converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N} : \forall (a, b) \in \llbracket N; +\infty \llbracket^2, |s_a - s_b| < \varepsilon$.

Montrons donc que (pour $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$), la condition « $\forall (a, b) \in \llbracket N; +\infty \llbracket^2, |s_a - s_b| < \varepsilon$ » (que l'on notera $A(N, \varepsilon)$) est équivalente à la condition « $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$ » (que l'on notera $B(N, \varepsilon)$).

On note tout d'abord que pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $|s_a - s_b| = \begin{cases} |u_{a+1} + u_{a+2} + \dots + u_b| & \text{si } b \geq a \\ |u_{b+1} + u_{b+2} + \dots + u_a| & \text{si } b < a \end{cases}$

Donc si $A(N, \varepsilon)$ est vraie, alors pour $n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$, et $p \in \mathbb{N}$ on pose $a = n$ et $b = n + p$, ils sont tous deux dans $\llbracket N; +\infty \rrbracket$ donc $\varepsilon > |s_a - s_b| = |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}|$, d'où $B(N, \varepsilon)$.

De même si $B(N, \varepsilon)$ est vraie, alors pour $(a, b) \in \llbracket N; +\infty \rrbracket^2$ on pose $n = \min(a, b)$ et $p = |a - b|$ et on a $n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$, et $p \in \mathbb{N}$, donc $\varepsilon > |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| = |s_a - s_b|$. $\square$

Proposition 2.2.10. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries complexes, avec $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = a \in \mathbb{C}$. Alors :

- i) si $\sum v_n$ converge et sa somme vaut $b \in \mathbb{C}$ alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et sa somme vaut $a + b$;
- ii) si $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge;
- iii) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\sum \lambda u_n$ converge vers λa .

La preuve de ce théorème, qui munit les séries d'une structure d'espace vectoriel, est élémentaire et est laissée en exercice. On verra qu'en revanche il est plus difficile d'obtenir un résultat pour les produits de séries.

2.3 Séries réelles; positivité

Le résultat suivant est évident mais important.

Proposition 2.3.1. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est convergente, par définition. Mais celle-ci est une suite réelle croissante (car $u_n \geq 0$), elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée. $\square$

Proposition 2.3.2. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$

- i) Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

- ii) Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration.

- i) Si $\sum v_n$ converge alors les sommes partielles $(\sum_{k=0}^n v_k)$ sont bornées. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k$, donc d'une part les sommes partielles $(\sum_{k=0}^n u_k)$ sont majorées donc (par positivité) $\sum u_n$ converge, et d'autre part par passage à la limite, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
- ii) Cela découle du point précédent par contraposée : « $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge » est exactement la même affirmation que « $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge ». $\square$

Remarque 2.3.3. Si la condition $u_n \leq v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang, alors on n'a pas forcément $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$, mais les conclusions sur la convergence ou la divergence restent valides.

Proposition 2.3.4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives équivalentes. Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Démonstration.

- Montrons tout d'abord que sous ces hypothèses, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi.

Comme $u_n \sim v_n$, il existe une suite (ω_n) qui tend vers 1, et un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N_0; +\infty \llbracket$, $u_n = \omega_n v_n$. En prenant $\varepsilon = 1$, la propriété $\omega_n \rightarrow 1$ nous donne l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket$, on ait $|\omega_n - 1| \leq 1$ donc $\omega_n \leq 2$.

Dès lors en posant $N_2 = \max(N_0, N_1)$, On obtient que pour $n \in \llbracket N_2; +\infty \llbracket$,

$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{N_2-1} u_k + \sum_{k=N_2}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{N_2-1} u_k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ donc ces sommes partielles sont est majorées. Donc (par positivité) $\sum u_n$ converge.

- En appliquant ce résultat aux suites (v_n) et (u_n) (en ayant juste interverti le rôle de (u_n) et (v_n) , et en utilisant que $v_n \sim u_n$, on obtient que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ aussi.

On a donc bien que les deux suites sont de même nature (soit toutes les deux convergent, soit aucune des deux ne converge). $\square$

Remarque 2.3.5. Les suites $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right)$ et $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ sont équivalentes, mais les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne sont pas de même nature (voir exercice 44, question xiii)).

Définition 2.3.6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \geq 1}$, où l'on rappelle que $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est égale à $(\exp(-\alpha \ln(n)))$.

La série $\sum u_n$ s'appelle alors « la série de Riemann d'exposant α ».

Remarque 2.3.7.

- Son terme général n'est défini qu'à partir du rang $n = 1$. Il est sous-entendu qu'on doit alors adapter la définition 2.2.1 en posant (pour $n \in \mathbb{N}^*$), $s_n = \sum_{m=1}^n u_m$.
- Comme les premiers termes n'ont pas d'impact sur la convergence de la série (voir exercice 49), on parle quand même de « la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ », même si cette notation imprécise n'indique pas à quel terme on commence.

Théorème 2.3.8. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

- Considérons d'abord le cas où $\alpha = 1$, et montrons qu'alors elle diverge :

Soit $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}} = \frac{1}{2}$. Donc en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (et $n = N$ et $p = n$), on a la négation de du critère 2.2.9, d'où la divergence.

- Pour $\alpha < 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0$, donc $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après la proposition 2.3.2.
- Pour $\alpha > 1$, on va comparer la série $\sum \frac{1}{(n)^\alpha}$ (dont on cherche à étudier la nature), à la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ (qui converge comme somme télescopique où $\frac{1}{n^{\alpha-1}} \rightarrow 0$), ou à une série dont le terme général est équivalent à celui-ci.
 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque tout d'abord que $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{(n(n+1))^{\alpha-1}}$. Au numérateur, on peut utiliser le théorème des accroissements finis : il existe $c \in [n, n+1]$: tel que $(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1} = (\alpha-1)c^{\alpha-2}$, ce qui est compris entre $(\alpha-1)n^{\alpha-2}$ et $(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-2}$, donc est équivalent à $(\alpha-1)n^{\alpha-2}$.
 On a donc $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \sim (\alpha-1) \frac{(n)^{\alpha-2}}{n^{2\alpha-2}} = \frac{(\alpha-1)}{(n)^\alpha}$, d'où la convergence de la série $\sum \frac{(\alpha-1)}{(n)^\alpha}$ (d'après 2.3.4), d'où découle enfin la convergence de $\sum \frac{1}{(n)^\alpha}$ (d'après le iii) de 2.2.10). $\square$

Remarques :

- pour le cas où $\alpha = 1$, on aurait aussi pu montrer la divergence par le même type de méthode : en comparant à la série télescopique $\sum \ln(n+1) - \ln(n)$.
- dans les cas où la série converge, on aurait aussi pu montrer la convergence en suivant la preuve de l'exercice 53.

La série de Bertrand est un raffinement de la série de Riemann. Étant donnés deux réels α et β , on pose cette fois ci :

$$\forall n \in \mathbb{N}[2; +\infty[: u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

Dès lors, la série $\sum u_n$ s'appelle la série de Bertrand associée à (α, β) .

Théorème 2.3.9. La nature de la série de Bertrand associée à (α, β) est :

- Divergente si $\alpha < 1$.
- Divergente si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$.
- Convergente si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$
- Convergente si $\alpha > 1$

Démonstration.

- Commençons par le cas où la convergence est la plus difficile à montrer : quand $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. On procède comme pour le cas où $\alpha > 1$ dans la preuve du théorème 2.3.8 : par comparaison avec une série télescopique :
 - Soit $(v_n)_{n \geq 2} = \left(\frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}} \right)_{n \geq 2}$. Les sommes partielles de cette série télescopique sont (pour $n \geq 2$), $\sum_{i=2}^n v_i = \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}}$, qui convergent car $\beta > 1$.
 - Pour $n \in \mathbb{N}[2; +\infty[$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c \in [n, n+1]$ tel que $v_n = \frac{\beta-1}{c \ln(c)^\beta} \in \left[\frac{\beta-1}{(n+1) \ln(n+1)^\beta}, \frac{\beta-1}{n \ln(n)^\beta} \right]$.
 Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Donc $\ln(n+1) \sim \ln n$ et donc l'encadrement qu'on a obtenu nous donne $v_n \sim \frac{\beta-1}{n \ln(n)^\beta}$.
 - Comme $\sum v_n$ converge, on déduit par comparaison de séries positive que $\sum \frac{\beta-1}{n \ln(n)^\beta}$ converge, puis que $\sum \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ converge.

- De même, quand $\beta = 1$ (toujours avec $\alpha = 1$), on procède par comparaison avec une série télescopique :
 - Soit $(v_n)_{n \geq 2} = (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n))_{n \geq 2}$. Les sommes partielles de cette série télescopique sont (pour $n \geq 2$), $\sum_{i=2}^n v_i = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$ qui divergent.
 - Pour $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c \in [n, n+1]$ tel que $v_n = \frac{1}{c \ln c} \in \left[\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}, \frac{1}{n \ln(n)} \right]$.
Donc $v_n \sim \frac{1}{n \ln(n)}$.
 - Comme $\sum v_n$ diverge, on déduit par comparaison de séries positive que $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta < 1$, alors $\underbrace{\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}}_{\ln(n)^{1-\beta}} \bigg/ \frac{1}{n \ln(n)}$ tends vers $+\infty$. Donc il existe un rang à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n \ln(n)}$. Or $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge, donc par comparaison de séries positives, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge aussi.
- Si $\alpha < 1$, alors $\underbrace{\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}}_{n^{1-\alpha} \ln(n)^{1-\beta}} \bigg/ \frac{1}{n \ln(n)}$ tends aussi vers $+\infty$ (par “croissance comparée”, voir exercice 25), donc on obtient de même la divergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.
- Enfin, si $\alpha > 1$, alors $\underbrace{\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}}_{\ln(n)^{2-\beta} / n^{\alpha-1}} \bigg/ \frac{1}{n \ln(n)^2}$ tends vers 0 (par “croissance comparée”, voir exercice 25), donc il existe un rang à partir duquel on a $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \leq \frac{1}{n \ln(n)^2}$. Or $\sum \frac{1}{n \ln(n)^2}$ converge, donc par comparaison de séries positives, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge. $\square$

Règles de convergence

Nous allons établir deux autres cas classiques où la convergence des séries positives est connue : la règle de Cauchy et celle de d'Alembert

Proposition 2.3.10 (Règle de Cauchy). Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit :

$$b = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \in [0, +\infty].$$

1. Si $b < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $b > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

1. Si $b < 1$, on pose $c = \frac{b+1}{2}$ de sorte que $b < c < 1$.

Alors comme la suite des $(\sup\{\sqrt[k]{u_k} \mid k \geq n\})_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers b , elle est inférieure à c à partir d'un certain rang N .

Pour $n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$, on a $\sqrt[n]{u_n} \leq c$ donc $u_n \leq c^n$. Or $c < 1$, donc d'après l'exemple 2.2.5 $\sum c^n$ converge, donc $\sum u_n$ aussi.

2. Montrons la contraposée de $(b > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge})$, à savoir $(\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow b \leq 1)$.

Supposons que $\sum u_n$ converge. Alors u_n tends vers 0, donc u_n est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < M$. Dès lors, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt[n]{u_n} \leq M^{1/n}$ or $M^n = \exp \frac{\ln M}{n}$ tends vers 1. Donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \leq 1$. $\square$

Proposition 2.3.11 (Règle de d'Alembert). Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, et supposons $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

1. Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Dans les autres cas, (notamment si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$), cette règle ne permet pas de conclure.

Démonstration.

1. Posons $\ell = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $\ell < 1$, on choisit un $\varepsilon \in]0, 1 - \ell[$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$), et d'après la convergence des sup vers ℓ , il existe $n_0 \in \mathbb{N} : \sup\{\frac{u_{p+1}}{u_p} \mid p \geq n_0\} < \ell + \varepsilon < 1$. Dès lors, $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq \frac{u_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n-n_0}} (\ell + \varepsilon)^{n_0}$, d'où la convergence de $\sum u_n$ (par 2.3.2 et 2.2.5).
2. Posons $\ell = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $\ell > 1$, on choisit un $\varepsilon \in]0, \ell - 1[$ (par exemple $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2}$), et d'après la convergence des inf vers ℓ , il existe $n_0 \in \mathbb{N} : \inf\{\frac{u_{p+1}}{u_p} \mid p \geq n_0\} > \ell - \varepsilon > 1$. Dès lors, $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq \frac{u_{n_0}}{(\ell - \varepsilon)^{n-n_0}} (\ell - \varepsilon)^{n_0}$, d'où la divergence grossière de $\sum u_n$. $\square$

Produit de séries positives

Théorème 2.3.12 (Produit de Cauchy). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives convergentes. Soit (w_n) la suite de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$. Alors $\sum w_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right).$$

Démonstration.

- Montrons tout d'abord que la suite $(\sum_{p=0}^n w_p)$ est majorée par $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right)$:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n w_p &= \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p u_k v_{p-k} = \sum_{0 \leq k \leq p \leq n} u_k v_{p-k} = \sum_{k=0}^n \sum_{p=k}^n u_k v_{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^n u_k \sum_{l=0}^{n-k} v_l \leq \sum_{k=0}^n u_k \sum_{l=0}^{\infty} v_l \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} v_l \right) \end{aligned}$$

Donc $\sum w_n$ converge et sa limite est inférieure ou égale à $\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} v_l \right)$.

- De plus, on a $\sum_{p=0}^{2n} w_k = \sum_{k=0}^{2n} u_k \sum_{l=0}^{2n-k} v_l \geq \sum_{k=0}^n u_k \sum_{l=0}^n v_l$ qui tend vers $\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} v_l\right)$. Donc sa limite satisfait $\sum_{n=0}^{\infty} w_n \geq \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$, d'où le résultat. $\square$

Séries alternées

Théorème 2.3.13 (Série alternée). Soit (u_n) une suite positive décroissante qui tend vers 0.

Alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k$ et $w_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k$. Les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes car

$$v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0, \quad w_{n+1} - w_n = -u_{2n+1} + u_{2n+2} \leq 0, \quad \text{et} \quad v_n - w_n = u_{2n+1} \rightarrow 0.$$

Posons ℓ leur limite commune et montrons que $\left(\sum_{k=0}^n (-1)^k u_k\right)$ tend vers ℓ :

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux entiers N_1 et N_2 tels que $\forall n \geq N_1, |v_n - \ell| < \varepsilon$ et $\forall n \geq N_2, |w_n - \ell| < \varepsilon$. On pose alors $N = \max(2N_1 + 1; 2N_2)$. Pour $n \geq N$, on a alors

- Si n est paire, on a $n = 2p$ pour un entier $p \geq N_2$. Donc $|w_p - \ell| < \varepsilon$, c'est à dire $\left|\sum_{k=0}^n (-1)^k u_k - \ell\right| < \varepsilon$.
- Si n est impaire, on a $n = 2p + 1$ pour un entier $p \geq N_1$. Donc $|v_p - \ell| < \varepsilon$, c'est à dire $\left|\sum_{k=0}^n (-1)^k u_k - \ell\right| < \varepsilon$. $\square$

2.4 Convergence absolue

Définition 2.4.1. On dit que la série complexe $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 2.4.2. Si une série complexe $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge. De plus on a alors $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Démonstration.

- Le Critère de Cauchy 2.2.9 est satisfait par la série $\sum |u_n|$ car elle converge. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}; +\infty, \forall p \in \mathbb{N} : \varepsilon > |u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}| \geq |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}|$, donc la série $\sum u_n$ satisfait aussi le Critère de Cauchy 2.2.9 et donc elle converge.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|s_n|$ satisfait $|s_n| = \left|\sum_{k=0}^n u_k\right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Donc sa limite $\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right|$ est elle aussi inférieure ou égale à $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. $\square$

Proposition 2.4.3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries complexes absolument convergentes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$. Alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Démonstration.

- La convergence de $\sum |u_n|$ et de $\sum |v_n|$ donnent (par le théorème 2.3.12) la convergence de $\sum x_n$ où $x_n = \sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}|$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leq x_n$, d'où la convergence de $\sum |w_n|$ (par la proposition 2.3.2).
- De plus $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| \right)$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n x_k - \left(\sum_{k=0}^n |u_k| \right) \left(\sum_{k=0}^n |v_k| \right) \right) = 0$.
Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n x_k - \left(\sum_{k=0}^n |u_k| \right) \left(\sum_{k=0}^n |v_k| \right) = \sum_{k=0}^n |u_k| \sum_{l=0}^{n-k} |v_l| - \sum_{k=0}^n |u_k| \sum_{l=0}^n |v_l| = - \sum_{k=0}^n |u_k| \sum_{n-k < l \leq n} |v_l|$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n x_k - \left(\sum_{k=0}^n |u_k| \right) \left(\sum_{k=0}^n |v_k| \right) \right| &= \sum_{k=0}^n |u_k| \sum_{n-k < l \leq n} |v_l| \\ &\geq \left| \sum_{k=0}^n u_k \sum_{n-k < l \leq n} v_l \right| = \left| \sum_{k=0}^n w_k - \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) \left(\sum_{k=0}^n v_k \right) \right| \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n w_k - \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) \left(\sum_{k=0}^n v_k \right) \right) = 0. \quad \square$$

Définition 2.4.4. Une série complexe est *semiconvergente* si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 2.4.5. La série harmonique alternée :

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$$

est semiconvergente : elle converge d'après 2.3.13, mais n'est pas absolument convergente d'après 2.3.8.

Sommations par paquets, changements d'ordre

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, et soit $\sum u_n$ une série complexe. On considère alors la suite (v_n) définie de la manière suivante :

$$v_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} u_k, \quad v_n = \sum_{k=1+\varphi(n-1)}^{\varphi(n)} u_k, \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (2.1)$$

La série $\sum v_n$ correspond à une somme par blocs des termes u_n , l'intervalle des indices intervenant dans chaque bloc étant fixé par φ .

Proposition 2.4.6. Soit $\sum u_n$ une série complexe, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, et définissons la série $\sum v_n$ comme dans (2.1).

- i) Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

ii) Si $u_n \geq 0$ pour tout n , et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration.

1. On note s_n la somme $u_0 + \dots + u_n$. On a :

$$v_0 + \dots + v_n = u_0 + \dots + u_{\varphi(n)} = s_{\varphi(n)}.$$

Donc si (s_n) converge, la suite extraite $(s_{\varphi(n)})$ converge aussi vers la même limite.

2. Sous ces hypothèses, on a pour $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) \geq n$ et $u_n \geq 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq s_{\varphi(n)}$. Or si $(s_{\varphi(n)})$ converge, forcément $(s_{\varphi(n)})$ est bornée, donc (s_n) aussi. Alors (s_n) converge d'après 2.3.1. $\square$

Remarque 2.4.7. La positivité de (u_n) est cruciale pour la propriété ii). Par exemple, si on prend $(u_n) = ((-1)^n)$, et $(\varphi_n) = (2n)$, alors $\sum v_n$ converge (c'est la série nulle), mais $\sum u_n$ diverge (car (u_n) ne tend pas vers 0).

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Étant donnée une série complexe $\sum u_n$, on considère la série $\sum u_{\sigma(n)}$, obtenue par changement de l'ordre des termes de $\sum u_n$ suivant la permutation σ .

Définition 2.4.8. On dit que u_n est *commutativement convergente* si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.

Théorème 2.4.9. Une série complexe $\sum u_n$ est commutativement convergente si et seulement si elle converge absolument. Dans ce cas, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}.$$

Démonstration.

• Montrons que si $\sum u_n$ converge absolument alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_n - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(n)} = 0$

(ce qui montre que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$) :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$

et $B_n = \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\} \setminus \{0, 1, \dots, n\}$, de sorte que

$\sum_{k=0}^n u_n - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(n)} = \sum_{k \in A_n} u_k - \sum_{k \in B_n} u_k$. En posant $p_n = \min(A_n \cup B_n)$ et $q_n = \max(A_n \cup B_n)$ on a donc

$$\left| \sum_{k=0}^n u_n - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(n)} \right| \leq \sum_{k \in A_n \cup B_n} |u_k| \leq \sum_{p_n \leq k \leq q_n} |u_k|$$

Ce qui suggère d'utiliser le critère de Cauchy 2.2.9, comme on sait que $\sum |u_n|$ converge.

Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \llbracket N_1; +\infty \rrbracket$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

On pose alors $N_2 = \max(\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(N_1))$ et $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour $n \geq N_3$, l'ensemble $\{0, 1, \dots, N_1\}$ est dans $\{0, 1, \dots, n\} \cap \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$, donc il est disjoint de A_n et B_n , c'est à dire que $p_n \geq N_1 + 1$. On a donc que pour tout $n \geq N_3$,

$$\left| \sum_{k=0}^n u_n - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(n)} \right| \leq \sum_{p_n \leq k \leq q_n} |u_k| < \varepsilon, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_n - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(n)} = 0.$$

- Montrons que si une série réelle est commutativement convergente, alors est absolument convergente. On procède par contraposée, en montrant que si $\sum |u_n|$ diverge, alors $\sum u_n$ n'est pas commutativement convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n^+ = \max(0, u_n)$ et $u_n^- = \max(0, -u_n)$. Cela signifie que pour n fixé on a $u_n = u_n^+ - u_n^-$, où l'un des deux nombres (parmi u_n^+ et u_n^-) est nul tandis que l'autre vaut $|u_n|$ (en particulier, $u_n^+ \geq 0$ et $u_n^- \geq 0$).

Comme la série de terme général $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ diverge, l'une des séries $\sum u_n^+$ ou $\sum u_n^-$ diverge.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^+ = +\infty$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^- < \infty$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ donc $\sum u_n$ ne peut pas être commutativement

convergente (elle ne converge pas pour la permutation identité). De même si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^+ < \infty$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^- =$

$+\infty$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = -\infty$ donc $\sum u_n$ n'est pas commutativement convergente.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^+$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^-$ divergent toutes deux (vers $+\infty$), alors on construit une permutation σ et une suite extraite φ telle que $\sum u_{\varphi(\sigma(n))}$ diverge vers $+\infty$ (ce qui prouve que $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge) :

On numérote par $\{p_0, p_1, \dots\}$ l'ensemble $\{p \mid u_p \geq 0\}$ et par $\{q_0, q_1, \dots\}$ l'ensemble $\{q \mid u_q < 0\}$ (avec $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots$ et $q_0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots$), et on pose

- $\sigma(0) = p_0$ et $\varphi(0) = 0$.
- Supposons qu'on a déjà construit $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(k)$, et $\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(\varphi(k))$ tels que $\sum_{i=0}^{\varphi(k)} u_{\sigma(i)} \geq k$ et que $\{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(\varphi(k))\} = \{p_0, p_1, \dots, p_a\} \cup \{q_0, q_1, \dots, q_b\}$.

On pose alors $\sigma(\varphi(k) + 1) = q_{b+1}$, et on considère la suite $\left(\sum_{i=0}^{\varphi(k)+1} u_{\sigma(i)} + \sum_{m=1}^r u_{p_{a+m}} \right)_{r \geq 1}$. C'est une suite croissante (car les u_{p_i} sont positifs), qui tend vers $+\infty$ (car $\sum u_n^+$ diverge), donc il existe un rang r_0 à partir duquel elle est plus grande que $k + 1$.

On pose alors $\sigma(\varphi(k) + 2) = p_{a+1}$, $\sigma(\varphi(k) + 3) = p_{a+2}$, $\dots$, $\sigma(\varphi(k) + 1 + r_0) = p_{a+r_0}$. On pose enfin $\varphi(k + 1) = \varphi(k) + 1 + r_0$.

On remarque que les hypothèses que l'on faites sont encore valable pour $k + 1$ (ce qui permet de continuer de construire σ et φ par récurrence) : $\sum_{i=0}^{\varphi(k+1)} u_{\sigma(i)} \geq k + 1$ et que $\{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(\varphi(k + 1))\} = \{p_0, p_1, \dots, p_{a+r_0}\} \cup \{q_0, q_1, \dots, q_{b+1}\}$.

Ainsi, une fois construits tous les $\sigma(n)$ et $\varphi(n)$, la propriété $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{\varphi(k)} u_{\sigma(i)} \geq k$ indique qu'une sous

suite de $(\sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)})_n$ tends vers ∞ , donc $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge.

- Si une série complexe converge commutativement, alors ses parties réelle et imaginaire convergent commutativement, donc d'après ce qu'on vient de montrer ses parties réelle et imaginaire convergent absolument, donc la série converge absolument. $\square$

Exemple 2.4.10. Exemple de série convergente qui n'est pas commutativement convergente :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose d'une part

- $u_{2n} = \ln(n + 2) - \ln(n + 1)$
- $u_{2n+1} = -(\ln(n + 2) - \ln(n + 1))$

Ce qui signifie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la série alternée $((-1)^n (\ln(E(\frac{n}{2}) + 2) - \ln(E(\frac{n}{2}) + 1)))_{n \in \mathbb{N}}$.

D'autre part on définit une permutation σ telle que $\sigma(n)$ soit impair uniquement si $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ (ce qui est assez rare et représenté en vert sur la table ci-dessous) et soit pair le reste du temps (avec des valeurs croissantes au sein des valeurs paires comme des valeurs impaires), c'est à dire qu'elle prend les valeurs indiquées ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
$\sigma(n)$	1	3	0	2	5	4	6	8	10	7	12	14	16	18	20	22	9	24	...

On peut montrer que cette permutation σ est définie par (pour $n \in \mathbb{N}$) :

- $\sigma(n^2) = 2n + 1$
- et si $\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$, $\sigma(n) = 2(n - E(\sqrt{n}) - 1)$.

Par le critère des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge. Pour montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge, on montre que la sous suite $\left(\sum_{k=0}^{n^2} u_{\sigma(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tends vers $+\infty$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n^2} u_{\sigma(k)} &= \sum_{k=0}^{n^2-n-1} (\ln(k+2) - \ln(k+1)) - \sum_{k=0}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1)) = \ln(n^2 - n + 1) - \ln(n + 2) \\ &= \ln(n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})) - \ln(n(1 + \frac{2}{n})) = 2\ln n + \ln(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) - \ln n - \ln(1 + \frac{2}{n}) \end{aligned}$$

qui tends vers $+\infty$ (car $2\ln n - \ln n$ tends vers $+\infty$ tandis que les autres termes tendent vers 0).

Appendices

2.A Rappels sur l'inégalité triangulaire

Proposition 2.A.1. Pour tout $a \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$|\operatorname{Re}(a)| \leq |a|, \quad |\operatorname{Im}(a)| \leq |a|, \quad |a| \leq |\operatorname{Re}(a)| + |\operatorname{Im}(a)|$$

Démonstration. Si $a = x + i y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la première inégalité $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ découle de $x^2 \leq x^2 + y^2$ et de la positivité. La deuxième inégalité se montre pareil.

La dernière inégalité découle du théorème ci-dessous¹ (qui indique que $|x + i y| \leq |x| + |i y|$). $\square$

Proposition 2.A.2. Pour tous $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Démonstration. Pour tous $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b) \overline{(a + b)} = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) \\ &\leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a\bar{b}| = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

D'où découle la deuxième inégalité, par positivité de $|a + b|$ et $|a| + |b|$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on peut d'une part appliquer ce résultat avec $a = x + y$ et $b = -y$ ce qui donne $|x| = |a + b| \leq |a| + |b| = |x + y| + |y|$ (c'est à dire $|x + y| \geq |x| - |y|$) et d'autre part avec $a = x + y$ et $b = -x$ ce qui donne $|y| = |a + b| \leq |a| + |b| = |x + y| + |x|$ (c'est à dire $|x + y| \geq |y| - |x|$). Cela donne donc $|x + y| \geq ||x| - |y||$, ce qui est la première inégalité à montrer. $\square$

2.B Démonstrations omises dans le texte principal

Preuve de la propriété 2.2.10.

i) Sous ces hypothèses, on note $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $t_n = \sum_{k=0}^n v_k$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = b$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n (u_k + v_k)}_{s_n + t_n} = a + b.$$

1. Comme la preuve de 2.A.2 n'utilise pas la troisième inégalité de 2.A.1, ce n'est pas un problème d'utiliser 2.A.2 pour la prouver

ii) C'est la contraposée de « si $\sum(u_n + v_n)$ converge alors $\sum \underbrace{(-u_n + (u_n + v_n))}_{v_n}$ converge ».

iii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\forall n \in N, \sum_{k=0}^n \lambda u_k = \lambda s_n$; cela tend vers λa . □

Preuve de la remarque 2.3.5. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente d'après 2.3.13.

De plus, pour $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, la différence entre les termes des deux suites est

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n (\sqrt{n} - \sqrt{n} - (-1)^n)}{(\sqrt{n} + (-1)^n) \sqrt{n}} = \frac{1}{(\sqrt{n} + (-1)^n) \sqrt{n}}$$

Donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est de terme général positif, équivalent à $(\frac{1}{n})$, donc elle diverge (d'après 2.3.4). Donc la série $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right)$ est divergente (comme somme d'une série divergente et d'une série convergente). □

Chapitre 3

Séries entières

Dans ce chapitre on généralisera la notion de polynôme à des sommes infinies de termes, généralement complexes. On rappelle que pour les polynômes, le symbole X a un sens très particulier : par exemple la notation $X^2 + 1$ désigne le polynôme dont les coefficients sont $(1,0,1)$, et on peut par exemple y associer la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{cases}$. Quand on fait cela, x désigne un réel arbitraire alors que X est le symbole formel utilisé pour définir les polynômes.

Dans ce chapitre, le symbole z sera l'analogie de X . On tâchera donc de désigner les nombre complexes par d'autres lettres que z , par exemple w .

Mais on commencera tout d'abord par étudier de manière générale les séries de fonctions, c'est à dire que les termes que l'on additionne seront désormais des fonctions :

3.1 Séries de fonctions

3.1.a Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 3.1.1. Pour $r > 0$ et $w_0 \in \mathbb{C}$, on désigne par $D(w_0, r)$ (resp $\bar{D}(w_0, r)$, resp $\mathcal{C}(w_0, r)$) le disque ouvert (resp le disque fermé, resp le cercle) de centre w_0 et de rayon r , c'est à dire $D(w_0, r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| < r\}$
(resp $\bar{D}(w_0, r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| \leq r\}$, resp $\mathcal{C}(w_0, r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| = r\}$).

Définition 3.1.2. Soit $P \subset \mathbb{C}$ non vide, Soit une fonction $f : P \rightarrow \mathbb{C}$, et soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de P dans $\mathbb{C}$.

- On dit que (f_n) converge simplement sur P vers f si, pour tout $w \in P$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = f(w).$$

- On dit que (f_n) converge uniformément sur P vers f si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_{w \in P} |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon$.

Remarque 3.1.3.

- Quand on écrit $\sup_{w \in P} |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon$, on affirme deux choses : d'une part que l'ensemble $\{|f_n(w) - f(w)| \mid w \in P\}$ est majoré (donc admet une borne supérieure), et d'autre part que sa borne supérieure est inférieure à ε .
- La convergence simple s'écrit $\forall w \in P, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon$, tandis que la convergence uniforme s'écrit $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall w \in P, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon$.
La seule différence est l'ordre des quantificateurs : pour la convergence simple N peut dépendre du point w où on étudie la convergence, alors que la convergence uniforme affirme que N ne dépend pas de w .

Exemple 3.1.4. Soit $P =]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$. Alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

En revanche, (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle car, pour $\varepsilon = 1/2$, quelque soit $N \in \mathbb{N}$, en prenant $x_0 = 2^{-\frac{1}{N+1}} \in P$ on constate que $f_{N+1}(x_0) = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$.

Par contre, si on pose $P = D(0, 1/2)$, alors on a $\sup_{w \in P} |f_n(w)| = \frac{1}{2^n}$ et (f_n) converge uniformément sur P vers la fonction nulle.

Lemme 3.1.5. Si (f_n) converge uniformément vers f dans P , alors (f_n) converge simplement vers f dans P .

Démonstration. Supposons que (f_n) converge uniformément vers f dans P .

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_{w \in P} |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon$. Dès lors, quelque soit $w \in P$ on a $\forall n \geq N, |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon$, ce qui indique la convergence simple. $\square$

3.1.b Continuité de la limite uniforme

Une des raisons majeurs pour étudier la convergence uniforme est le théorème 3.1.9 qui affirmera qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. Avant d'énoncer ce théorème nous avons d'abord besoin de rappeler la définition d'une fonction continue :

Soit $w_0 \in \mathbb{C}$. Soit P une partie de $\mathbb{C}$ et $f : P \rightarrow \mathbb{C}$ une application.

Définition 3.1.6. On dit que f est *définie au voisinage* de w_0 si le domaine de définition P de f satisfait : $\forall r > 0, D(w_0, r) \cap P \neq \emptyset$.

Ceci équivaut à dire que w_0 est une limite d'éléments de P (c'est à dire que w_0 est dans l'adhérence de P).

Définition 3.1.7. Soit $f : P \rightarrow \mathbb{C}$ définie au voisinage de $w_0 \in \mathbb{C}$ et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f *tend vers* ℓ en w_0 , et on note $\lim_{w \rightarrow w_0} f(w) = \ell$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\forall w \in P \cap D(w_0, \delta), |f(w) - \ell| < \varepsilon.$$

Théorème et définition 3.1.8. Si f admet une limite en un point $w_0 \in P$, alors cette limite est $f(w_0)$ et on dit que f est continue en w_0 .

Démonstration. Sous cette hypothèse la limite est $f(w_0)$ car quelque soit $\delta > 0$, $w_0 \in P \cap D(w_0, \delta)$, donc $\forall \varepsilon > 0, |f(w_0) - \ell| < \varepsilon$. $\square$

Théorème 3.1.9. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes ou réelles, définies sur une partie P de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$ et soit w_0 dans l'adhérence de P . Supposons que (f_n) converge vers f , uniformément sur P , et que chaque f_n admet une limite finie en w_0 .

Alors f admet une limite finie en w_0 et $\lim_{w \rightarrow w_0} f(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{w \rightarrow w_0} f_n(w)$.

Remarque 3.1.10. En particulier, le théorème 3.1.9 indique qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Démonstration. Sous ces hypothèses, on note $\ell_n = \lim_{w \rightarrow w_0} f_n(w)$.

Montrons tout d'abord que la suite (ℓ_n) converge. Pour cela on va montrer qu'elle est de Cauchy : Soit $\varepsilon > 0$, comme (f_n) converge uniformément vers f , il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, $\sup_{w \in P} |f_n(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Soient n et p dans $\llbracket N_1, +\infty \rrbracket$, alors quelque soit $w \in P$ on a $|f_n(w) - f_p(w)| \leq |f_n(w) - f(w)| + |f(w) - f_p(w)| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$, d'où l'on déduit l'inégalité suivante : $|\ell_n - \ell_p| = \lim_{w \rightarrow w_0} |f_n(w) - f_p(w)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, ce qui montre que la suite (ℓ_n) est de Cauchy, donc qu'elle converge dans $\mathbb{C}$.

Montrons désormais que $\lim_{w \rightarrow w_0} f(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n$: Soit $\varepsilon > 0$. On définit comme précédemment $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, $\sup_{w \in P} |f_n(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (qui existe car (f_n) converge uniformément vers f). De plus, comme on a montré que la suite (ℓ_n) converge dans $\mathbb{C}$, on note $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n$, et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N_2, +\infty \rrbracket$, $|\ell_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$. Enfin, on pose $N_3 = \max(N_1, N_2)$ et comme $\lim_{w \rightarrow w_0} f_{N_3}(w) = \ell_{N_3}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall w \in P \cap D(w_0, \delta)$, $|f_{N_3}(w) - \ell_{N_3}| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Dès lors, pour $w \in P \cap D(w_0, \delta)$, on a $|f(w) - \ell| \leq |f(w) - f_{N_3}(w)| + |f_{N_3}(w) - \ell_{N_3}| + |\ell_{N_3} - \ell| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, ce qui montre bien que $\lim_{w \rightarrow w_0} f(w) = \ell$. $\square$

Remarque 3.1.11. Si la limite n'est pas uniforme, une limite de fonctions continues peut ne pas être continue. Par exemple, sur $P = [0, 1]$, les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ sont continues et convergent simplement vers la fonction f telle que $f(1) = 1$ et $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) = 0$. Cette fonction f est discontinue.

Continuité uniforme

Définition 3.1.12. Soit $P \subset \mathbb{C}$ non vide, et $f : P \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est *uniformément continue* sur P si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in P, \quad \forall y \in P \cap D(x, \delta) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Théorème 3.1.13 (Théorème de Heine). Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue (sur $[a, b]$), alors elle est uniformément continue (sur $[a, b]$).

Démonstration. On procède par contraposée : on montre que si f n'est pas uniformément continue, alors elle n'est pas continue.

Soit donc une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ qui n'est pas uniformément continue, c'est à dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in [a, b]$ et $y \in [a, b] \cap]x - \delta, x + \delta[$ tels que $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

En particulier, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ et $y_n \in [a, b] \cap]x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n}[$ tels que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, et cela définit deux suites (x_n) et (y_n) à valeur dans $[a, b]$.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (1.4.11), la suite (x_n) admet donc une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ qui tend vers une limite ℓ . Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-\frac{1}{\varphi(n)} \leq y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} \leq \frac{1}{\varphi(n)}$ donc $y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}$ tends vers 0, donc $(y_{\varphi(n)})$ tend aussi vers ℓ .

Or parmi les deux suites $(f(x_{\varphi(n)}))$ et $(f(y_{\varphi(n)}))$, il y en a au moins une des deux qui ne tends pas vers $f(\ell)$ (sinon $(f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}))$ tendrait vers zéro, ce qui contredirait l'inégalité $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$).

On a donc une suite qui tends vers ℓ , dont l'image par f ne tends pas vers $f(\ell)$, donc f n'est pas continue (voir l'exercice juste avant le théorème 3.1.9). $\square$

3.1.c Critère de Cauchy uniforme

Définition 3.1.14. On dit que (f_n) est *uniformément de Cauchy* sur $P \neq \emptyset$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tous entiers p et q supérieurs à N , on ait :

$$\sup_{w \in P} |f_p(w) - f_q(w)| < \varepsilon$$

Remarque 3.1.15.

Quand on écrit $\sup_{w \in P} |f_p(w) - f_q(w)| < \varepsilon$, on affirme deux choses : d'une part que l'ensemble $\{|f_p(w) - f_q(w)| \mid w \in P\}$ est majoré (donc admet une borne supérieure), et d'autre part que cette borne supérieure est inférieure à ε .

Théorème 3.1.16. Une suite de fonctions définies sur une partie non vide P de $\mathbb{C}$ est uniformément de Cauchy si et seulement si elle est uniformément convergente.

Démonstration. Soit (f_n) une suite uniformément convergente vers f dans P . Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N, \infty \llbracket : \sup_{w \in P} |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soient p et q dans $\llbracket N, \infty \llbracket$, et posons $w_0 \in P$. On a alors

$$\begin{aligned} |f_p(w_0) - f_q(w_0)| &\leq |f_p(w_0) - f(w_0)| + |f(w_0) - f_q(w_0)| \\ &\leq \sup_{w \in P} |f_p(w) - f(w)| + \sup_{w \in P} |f(w) - f_q(w)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $w_0 \in P$, on déduit que l'ensemble $\{|f_p(w) - f_q(w)| \mid w \in P\}$ est majoré (donc admet une borne supérieure), et $\sup_{w \in P} |f_p(w) - f_q(w)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Donc la suite est uniformément de Cauchy.

Réciproquement, soit (f_n) uniformément de Cauchy sur P .

Soit $w_0 \in P$, montrons que la suite $(f_n(w_0))$ admet une limite, c'est à dire qu'elle est de Cauchy :

Soit $\varepsilon > 0$, comme (f_n) uniformément de Cauchy, il existe entier N_1 tel que, pour tous entiers p et q supérieurs à N_1 , on ait : $\sup_{w \in P} |f_p(w) - f_q(w)| < \varepsilon$. Dès lors on a aussi $|f_p(w_0) - f_q(w_0)| < \varepsilon$, donc la suite $(f_n(w_0))$ est bien de Cauchy.

On définit alors $f(w_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w_0)$, et comme on a montré son existence pour n'importe quel $w_0 \in P$, cela définit une fonction f sur P tout entier.

Montrons maintenant que la suite (f_n) converge uniformément vers f :

Soit $\varepsilon > 0$, et N_2 défini comme précédemment mais pour $\varepsilon/2$:

$$\forall (p, q) \in \llbracket N_1, \infty \llbracket, \sup_{w \in P} |f_p(w) - f_q(w)| < \varepsilon/2.$$

$$\text{Soit } w_0 \in P, \text{ et } k \in \llbracket N_1, \infty \llbracket. \text{ Pour } n \in \llbracket N_1, \infty \llbracket, \text{ on a } |f_k(w_0) - f_n(w_0)| \leq \sup_{w \in P} |f_p(w) - f_q(w)| < \varepsilon/2$$

$$\text{Or } |f_k(w_0) - f(w_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_k(w_0) - f_n(w_0)|, \text{ donc } |f_k(w_0) - f(w_0)| \leq \varepsilon/2.$$

Ayant obtenu cette inégalité pour tout $w_0 \in P$, on déduit que l'ensemble $\left\{ \left| f_k(w) - f(w) \right| \mid w \in P \right\}$ est majoré par $\varepsilon/2$. D'où $\sup_{w \in P} |f_k(w) - f(w)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, ce qui montre bien la convergence uniforme demandée. $\square$

Si, à la place de suites de fonctions, on considère des séries de fonctions (le terme général de la série est une fonction et les sommes partielles sont des fonctions), on parle de convergence simple (resp uniforme) de la série si la suite des sommes partielles converge simplement (resp uniformément).

Le critère de Cauchy uniforme se réécrit alors de la façon suivante :

Lemme 3.1.17. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $P \subset \mathbb{C}$ (où $P \neq \emptyset$). Alors $\sum f_n$ est uniformément convergente sur P si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\sup_{w \in P} |f_{n+1}(w) + \cdots + f_{n+p}(w)| < \varepsilon.$$

Démonstration. La preuve est exactement la même que la preuve de 2.2.9 :

Le théorème 3.1.16 indique que la suite (s_n) des sommes partielles converge uniformément si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N} : \forall (a, b) \in \llbracket N; +\infty \rrbracket^2, \sup_{w \in P} |s_a(w) - s_b(w)| < \varepsilon$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, montrons que la condition « $\forall (a, b) \in \llbracket N; +\infty \rrbracket^2, \sup_{w \in P} |s_a(w) - s_b(w)| < \varepsilon$ » (que l'on notera $A(N, \varepsilon)$) est équivalente à « $\forall n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket, \forall p \in \mathbb{N}, \sup_{w \in P} |f_{n+1}(w) + \cdots + f_{n+p}(w)| < \varepsilon$ » (que l'on notera $B(N, \varepsilon)$).

On note tout d'abord que pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $w \in P$,

$$|s_a(w) - s_b(w)| = \begin{cases} |f_{a+1}(w) + f_{a+2}(w) + \cdots + f_b(w)| & \text{si } b \geq a \\ |f_{b+1}(w) + f_{b+2}(w) + \cdots + f_a(w)| & \text{si } b < a \end{cases}$$

Donc si $A(N, \varepsilon)$ est vraie, alors pour $n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$, et $p \in \mathbb{N}$ on pose $a = n$ et $b = n + p$, ils sont tous deux dans $\llbracket N; +\infty \rrbracket$ donc $\varepsilon > \sup_{w \in P} |s_a(w) - s_b(w)| = \sup_{w \in P} |f_{n+1}(w) + \cdots + f_{n+p}(w)|$, d'où $B(N, \varepsilon)$.

De même si $B(N, \varepsilon)$ est vraie, alors pour $(a, b) \in \llbracket N; +\infty \rrbracket^2$ on pose $n = \min(a, b)$ et $p = |a - b|$ et on a $n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$, et $p \in \mathbb{N}$, donc $\varepsilon > \sup_{w \in P} |f_{n+1}(w) + \cdots + f_{n+p}(w)| = \sup_{w \in P} |s_a(w) - s_b(w)|$, d'où $A(N, \varepsilon)$. $\square$

3.1.d Convergence normale

Définition 3.1.18. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur P si la série $\sum \sup_{w \in P} |f_n(w)|$ converge.

Remarque 3.1.19.

- Cette définition suppose que $P \subset \mathbb{C}$ n'est pas vide (sans quoi aucun des $\sup_{w \in P} |f_n(w)|$ n'existerait). Dans la suite de ce chapitre, cette condition ($P \neq \emptyset$) sera sous-entendue même si elle n'est pas écrite explicitement.
- Quand on écrit "la série $\sum \sup_{w \in P} |f_n(w)|$ converge" cela signifie d'une part que la suite $\left(\sup_{w \in P} |f_n(w)| \right)_{n \geq N}$ est bien définie à partir d'un certain rang (qu'on a noté N), c'est à dire que

pour chaque $n \in \mathbb{N}; +\infty$, l'ensemble $\left\{ |f_n(w)| \mid w \in P \right\}$ est majoré. Et d'autre part cela signifie que de plus la série $\sum_{w \in P} |f_n(w)|$ converge.

- La convergence normale implique la convergence absolue en tout point $w \in P$ (car $\forall n, |f_n(w)| \leq \sup_{w \in P} |f_n(w)|$, ce qui permet d'appliquer la proposition 2.3.2).

Proposition 3.1.20. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions normalement convergente dans une partie $P \subset \mathbb{C}$ non vide. Alors $\sum f_n$ converge uniformément dans P .

Démonstration. Il suffit de montrer que $\sum f_n$ satisfait le critère 3.1.17.

Pour cela on remarque tout d'abord que pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $w_0 \in P$, on a

$$|f_{n+1}(w_0) + \dots + f_{n+p}(w_0)| \leq |f_{n+1}(w_0)| + \dots + |f_{n+p}(w_0)| \leq \sup_{w \in P} |f_{n+1}(w)| + \dots + \sup_{w \in P} |f_{n+p}(w)|.$$

Ceci étant vrai pour tout $w_0 \in P$, on en déduit que l'ensemble $\left\{ |f_{n+1}(w)| + \dots + |f_{n+p}(w)| \mid w \in P \right\}$ est majoré et que $\sup_{w \in P} |f_{n+1}(w) + \dots + f_{n+p}(w)| \leq \sup_{w \in P} |f_{n+1}(w)| + \dots + \sup_{w \in P} |f_{n+p}(w)|$.

Dès lors, on va utiliser le critère de Cauchy 2.2.9 sur la série $\sum \sup_{w \in P} |f_n(w)|$:

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}; +\infty$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sup_{w \in P} |f_{n+1}(w)| + \dots + \sup_{w \in P} |f_{n+p}(w)| < \varepsilon.$$

Dès lors, on a aussi $\sup_{w \in P} |f_{n+1}(w) + \dots + f_{n+p}(w)| < \varepsilon$, de sorte que la série $\sum f_n$ satisfait le critère 3.1.17. $\square$

Norme uniforme On va désormais justifier le terme “convergence normale” en introduisant une norme liée à cette notion de convergence.

Toutefois, cette norme ne sera définie que pour les fonctions bornées.

Définition 3.1.21. Soit $f : P \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée sur $P \subset \mathbb{C}$ non vide. On appelle “norme infinie” de la fonction f le réel

$$\|f\|_\infty = \sup_{w \in P} |f(w)|.$$

Par abus de notation, si la fonction f n'est pas bornée, on note $\|f\|_\infty = +\infty$.

Proposition 3.1.22. L'ensemble des fonctions bornées sur P est un espace vectoriel, et si on le note $\mathcal{B}$

alors l'application $\begin{cases} \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \mapsto \|f\|_\infty \end{cases}$ satisfait $\begin{cases} \forall f \in \mathcal{B} : (\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0) \\ \forall (\lambda, f) \in \mathbb{C} \times \mathcal{B} : \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty \\ \forall (f, g) \in \mathcal{B}^2 : \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{cases}$

On dit alors que $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de P dans $\mathbb{C}$:

- La fonction nulle est bornée donc $\mathcal{B} \neq \emptyset$.
- Soient $(f, g) \in \mathcal{B}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme f et g sont bornées, on a pour tout $x \in P$: $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ et $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$. On en déduit $|f(x) + \lambda g(x)| \leq \|f\|_\infty + |\lambda| \|g\|_\infty$, donc $f + \lambda g$ est bornée par $\|f\|_\infty + |\lambda| \|g\|_\infty$, donc $f + \lambda g \in \mathcal{B}$ et $\|f + \lambda g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + |\lambda| \|g\|_\infty$.

Donc $\mathcal{B}$ est bien un espace vectoriel.

Ensuite, si une fonction f satisfait $\|f\|_\infty = 0$, alors $\sup_{w \in P} |f(w)| = 0$, c'est à dire que f est la fonction nulle.

Enfin, les deux dernières propriétés correspondent au cas où $g = 0$ (resp $\lambda = 0$) dans la propriété $\|f + \lambda g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + |\lambda| \|g\|_\infty$ que l'on a déjà montrée pour tous $(f, g) \in \mathcal{B}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Remarque 3.1.23. Vous verrez dans d'autres cours que cette notion de norme autorise de définir des limites de la même façon qu'au premier chapitre sauf qu'on remplace la valeur absolue par la norme infinie. La notion de limite que l'on obtiendrait alors est la limite uniforme définie en 3.1.2.

L'affirmation 3.1.17 indique que l'espace vectoriel des fonctions bornées sur P , quand on le muni de la norme infinie, est un espace complet.

3.2 Définition et convergence des séries entières

Définition 3.2.1. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre complexes. La *série entière* de terme général $a_n z^n$ est la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles :

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

On note cette série entière $\sum a_n z^n$.

Dans cette définition, on a utilisé le symbole z sans préciser ce qu'est « z ». À ce titre cette expression $\sum_{k=0}^n a_k z^k$ est purement formelle, mais si l'on considérait par exemple z comme un nombre complexe, on pourrait voir les séries entières comme des séries de fonctions sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.2.2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $w \in \mathbb{C}$.

On dit que $\sum a_n z^n$ *converge (simplement)* en w si la série complexe $\sum a_n w^n$ converge. La limite de la série complexe $\sum a_n w^n$ s'appelle alors « la *limite simple* de $\sum a_n z^n$ au point w ».

Si on désigne par A l'ensemble des points w où $\sum a_n z^n$ converge simplement, l'application ci-dessous

$$\begin{cases} A \rightarrow \mathbb{C} \\ w \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \end{cases} \quad (3.1)$$

s'appelle la somme de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemple 3.2.3. La série entière $\sum a_n z^n$ converge simplement en $1/2$ (car la série $\sum (\frac{1}{2})^n$ converge).

Au contraire, elle diverge en $\frac{3}{2}$ (car la série $\sum (\frac{3}{2})^n$ diverge).

Définition 3.2.4. On dit que $\sum a_n z^n$ *converge absolument* en un point $w \in \mathbb{C}$ si la série $\sum |a_n w^n|$ est convergente.

Remarque 3.2.5. D'après la proposition 2.4.2, si $\sum a_n z^n$ converge absolument en $w \in \mathbb{C}$, alors elle converge aussi simplement en w .

Définition 3.2.6. On dit que la série entière $\sum a_n z^n$ *converge normalement* sur une partie P de $\mathbb{C}$ s'il existe un rang à partir duquel les $\sup_{w \in P} |a_n w^n|$ existent, et la série $\sum \sup_{w \in P} |a_n w^n|$ converge.

Théorème et définition 3.2.7. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Les égalités suivantes définissent toutes le même nombre $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, qu'on appelle le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$:

- a) $R = \max \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \mid \forall \ell \in]0, r[, \sum a_n z^n \text{ converge normalement sur } \bar{D}(0, \ell) \right\}$
- b) $R = \sup \left\{ |w| \mid w \in \mathbb{C} \text{ tel que } \sum a_n w^n \text{ converge} \right\}$, ou $+\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré.
- c) $R = \sup \left\{ |w| \mid w \in \mathbb{C} \text{ tel que } (a_n w^n) \text{ est bornée} \right\}$, ou $+\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré.
- d) $R = \inf \left\{ |w| \mid w \in \mathbb{C} \text{ tel que } \sum a_n w^n \text{ diverge} \right\}$, ou $+\infty$ si cet ensemble est vide.
- e) $R = \min \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \mid \forall w \in \mathbb{C} : (|w| > r \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n w^n| = +\infty) \right\}$

Démonstration. On désignera par E_a) l'ensemble défini en a) et par $R_a) = \max E_a)$ le nombre R défini en a), de même $E_b)$ est l'ensemble introduit en b) et $R_b) = \sup E_b)$, etc.

- Montrons tout d'abord qu'en a) le max existe bien.

$0 \in E_a)$ donc $E_a) \neq \emptyset$. Si $+\infty \in E_a)$, alors $+\infty = \max E_a)$. Sinon il existe $\ell_0 \in]0, r[$ tel que $\sum a_n z^n$ ne converge pas normalement sur $\bar{D}(0, \ell_0)$, et dès lors $E_a)$ est majoré par ℓ donc admet un sup. Soit $R_a) = \sup E_a)$, montrons que $R_a) \in E_a)$ (donc $R_a) = \max E_a)$) : (on veut donc montrer que pour tout $\forall \ell \in]0, R_a)[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0, \ell)$)

Soit $\ell \in]0, R_a)[$. On pose $\varepsilon = R_a) - \ell$, par définition de $R_a) = \sup E_a)$ il existe $r_1 \in E_a)$ tel que $r_1 > R_a) - \varepsilon = \ell$, et $r_1 \in E_a)$ indique que $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0, \ell)$.

- Montrons ensuite qu'en e) le min existe bien.

$+\infty \in E_b)$ donc $E_b)$ n'est pas vide. Si $E_b) = \{+\infty\}$ alors $+\infty$ est son minimum. Sinon, $E_b) \setminus \{+\infty\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, qui admet donc un inféum, que l'on note $R_b)$. Montrons que $R_b) \in E_b)$ (et que c'est donc un min) : (on veut donc montrer que $|w| > R_b) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n w^n| = +\infty$)

Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| > R_b)$. On pose $\varepsilon = |w| - R_b)$, et par définition de « $R_b) = \inf E_b)$ », il existe $r \in E_b) : r < R_b) + \varepsilon = |w|$. Dès lors $r \in E_b)$ indique que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n w^n| = +\infty$

Montrons ensuite que $R_a) = R_b) = R_c) = R_d) = R_e)$:

- Pour $R_a) \leq R_b)$:

- Si $R_a) = 0$, alors l'inégalité découle de $0 \in E_a)$ (qui indique que $R_a) \geq 0$).
- Sinon on a $[0, R_a) \subset E_b)$ (parceque si $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0, \ell)$, alors $[0, \ell] \subset E_b)$, de sorte que la définition de $R_a)$ indique que $E_b) \supset \bigcup_{\ell \in]0, R_a)[} [0, \ell] = [0, R_a)$, ce qui donne $R_a) \leq R_b)$.

- $R_b) \leq R_c)$ découle de $E_b) \subset E_c)$ qui découle du fait que si une série converge, alors son terme général tends vers 0 donc est borné.

- Pour montrer que $R_c) \leq R_a)$, montrons que $E_c) \subset E_a)$.

Soit $x \in E_c)$. Alors la suite $(a_n x^n)$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| |x|^n < M$. On souhaite montrer que $x \in E_a)$, c'est à dire que pour tout $\ell \in]0, x[, \sum a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0, \ell)$, d'où l'inclusion souhaitée.

Soit donc $\ell \in]0, x[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{w \in \bar{D}(0, \ell)} |a_n w^n| = |a_n \ell^n| \leq |a_n| |x|^n \left(\frac{\ell}{x}\right)^n \leq M \left(\frac{\ell}{x}\right)^n$. Or

$M \left(\frac{\ell}{x}\right)^n$ est le terme général d'une série convergente, et ces deux séries sont positives, donc $\sum \sup_{w \in \bar{D}(0, \ell)} |a_n w^n|$ converge, ce qui est la convergence normale souhaitée.

- $R_d \leq R_b$ découle de $]R_b; +\infty[\subset E_d$.
- $R_a \leq R_d$ découle de la convergence sur $\bigcup_{\ell < R_a}$
- $R_e \leq R_c$ découle de $R_c \in E_e$ qui vient du fait que quand $|w| > R_c$ la suite $(a_n w^n)$ n'est pas bornée c'est à dire que la limite supérieure de son module est $+\infty$.
- $R_c \leq R_e$ s'obtient en montrant que pour tout $\varepsilon > 0$, $R_c - \varepsilon \leq R_e$, qui vient du fait que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n w^n| < \infty$ pour au moins un w de module $|w| > R_c - \varepsilon$ (ce w est celui qui découle de la définition du sup dans la définition de R_c). $\square$

Remarque 3.2.8. Selon le contexte, on utilisera l'une ou l'autre des définitions du rayon de convergence R . On retiendra en particulier que d'après a), $\sum a_n z^n$ converge sur le *disque ouvert de convergence* $D(0, R)$, et qu'elle converge normalement sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence (on dit qu'elle converge normalement sur tout compact du disque ouvert de convergence).

Quand $|w| > R$, e) indique qu'elle diverge grossièrement (c'est à dire que $(a_n w^n)$ ne tends pas vers zéro), car elle n'est pas bornée. Par contre lorsque $|w| = R$, on n'a pas d'affirmation générale pour indiquer si $\sum a_n w^n$ converge.

Corollaire 3.2.9 (Continuité d'une série entière). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$.

Alors la fonction $w \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ est continue sur $D(0, R)$.

On dit alors que la série entière $\sum a_n z^n$ est continue sur $D(0, R)$.

Démonstration. Pour tout $r \in]0, R[$, la convergence normale sur $D(0, r)$ (propriété a) du 3.2.7) indique que la limite est continue sur $D(0, r)$ (comme limite uniforme de fonctions polynomiales donc continues).

Soit $w_0 \in D(0, R)$. Il existe $r \in]0, R[$ tel que $w_0 \in D(0, r)$ (par exemple $r = \frac{|w_0| + R}{2}$), donc la limite $w \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ est continue en w_0 . Ceci étant vrai pour tout $w_0 \in D(0, R)$, elle est continue sur $D(0, R)$. $\square$

3.2.a Exemples

Exemple 3.2.10. La fonction $\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto z + z^2 \end{cases}$ est la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_1 = a_2 = 1$ et $a_0 = a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$.

Plus généralement, tout polynôme est une série entière $\sum a_n z^n$ telle que les a_n sont nuls à partir d'un certain rang.

D'après la caractérisation e), son rayon de convergence est $+\infty$.

Exemple 3.2.11. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge en tout $w \in \mathbb{C}$, d'après le critère de d'Alembert 2.3.11

(pour $w \neq 0$, et $n \in \mathbb{N}$, on a $\left| \frac{w^{n+1}}{(n+1)!} \right| \left| \frac{n!}{w^n} \right| = \left| \frac{w}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$).

Son rayon de convergence est donc $+\infty$ (d'après la caractérisation b), par exemple).

Sa somme infinie est l'exponentielle complexe :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Exemple 3.2.12. La série $\sum n! z^n$, ne converge qu'en $w = 0$, d'après le critère de d'Alembert

(car pour $w \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{w^{n+1}(n+1)!}{n! w^n} \right| = (n+1) |w| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$)

Son rayon de convergence est donc $R = 0$.

Exemple 3.2.13. La série entière géométrique est

$$\sum z^n.$$

Son rayon de convergence est 1, car sa somme converge uniquement aux points $w \in D(0,1)$.

Cette série ne converge en aucun point du cercle $\mathcal{C}(0,R)$.

Exemple 3.2.14. La notation :

$$\sum \frac{z^n}{n^2}$$

serait abusive puisque le terme général « $\frac{z^n}{n^2}$ » n'est pas défini quand $n = 0$. Si l'on veut être précis la série entière que l'on considère donc est $\sum a_n z^n$ où

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Elle a rayon de convergence 1, d'après la règle de d'Alembert (pour $w \neq 0$, $\left| \frac{w^{n+1}}{(n+1)^2} \right| \left| \frac{n^2}{w^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |w|$ donc la série converge absolument en tout $w \in D(0,1)$ et diverge grossièrement quand $|w| > 1$).

De plus $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc pour $w \in \mathcal{C}(0,1)$, $\sum \frac{w^n}{n^2}$ converge absolument.

Cette série converge en tout point du cercle $\mathcal{C}(0,R)$.

Exemple 3.2.15. La série harmonique est la série $\sum a_n z^n$ où $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ c'est à dire qu'on pourrait

vouloir la noter abusivement

$$\sum \frac{z^n}{n}$$

Elle a rayon de convergence 1, et elle converge au point $w = -1$, mais pas en $w = 1$. *Cette série converge en certain points du cercle $\mathcal{C}(0,R)$ mais pas en tous.*

Proposition 3.2.16 (Règle de D'Alembert). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et supposons que

$$\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)_n$$

ait une limite $L \in [0, +\infty]$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{L}$ (avec les convention $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$).

Démonstration. Soit $w \in \mathbb{C}$, on applique le critère de d'Alembert 2.3.11 à la série $\sum |a_n w^n|$:

- Lorsque $|w| < \frac{1}{L}$, $\frac{|a_{n+1} w^{n+1}|}{|a_n w^n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L|w| < 1$ donc $\sum a_n w^n$ converge absolument.

Donc $R \geq \frac{1}{L}$.

- Lorsque $|w| > \frac{1}{L}$, $\frac{|a_{n+1} w^{n+1}|}{|a_n w^n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L|w| > 1$ donc $\sum a_n w^n$ diverge grossièrement.

Donc $R \leq \frac{1}{L}$. □

3.2.b Expression en terme de limite supérieure

Théorème 3.2.17 (Formule d'Hadamard). Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ satisfait :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

avec les convention $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$.

Démonstration. Soient $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ et $w \in \mathbb{C}$, on applique la règle de Cauchy 2.3.10 à la série $\sum |a_n w^n|$:

- Lorsque $|w| < \frac{1}{L}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n w^n|^{\frac{1}{n}} = |w| L < 1$ donc $\sum a_n w^n$ converge absolument.
Donc $R \geq \frac{1}{L}$.
- Lorsque $|w| > \frac{1}{L}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n w^n|^{\frac{1}{n}} = |w| L > 1$ donc la suite $(|a_n w^n|)_n$ n'est pas bornée (si elle était bornée par M , on aurait $|a_n w^n|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ce qui contredirait le fait que cette limite supérieure est $|w| L > 1$). Donc $\sum a_n w^n$ diverge grossièrement.
Donc $R \leq \frac{1}{L}$. □

3.3 Dérivation des séries entières

Définition 3.3.1. Soit f une fonction à valeurs complexes, dont le domaine de définition contient un disque ouvert centré en w_0 . On dit que f est $\mathbb{C}$ -dérivable en w_0 si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}.$$

Si la dérivée existe, alors on la note :

$$f'(w_0).$$

Définition 3.3.2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle *série entière dérivée* :

$$\sum (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Remarque 3.3.3. Formellement (si on omet par exemple les question de convergence)), si on dérive chaque terme de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. La définition (3.3.2) est obtenue en renumérotant pour commencer à $n = 0$.

Théorème 3.3.4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

Alors la série dérivée $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ a aussi rayon de convergence R .

Démonstration.

- Montrons tout d'abord que le rayon de convergence de la série dérivée est inférieur ou égal à celui de $\sum a_n z^n$. Pour cela, on montre l'inclusion $\left\{ w \in \mathbb{C} \mid ((n+1) a_{n+1} w^n) \text{ est bornée.} \right\} \subset \left\{ w \in \mathbb{C} \mid (a_n w^n) \text{ est bornée.} \right\}$.
Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que la suite $((n+1) a_{n+1} w^n)$ soit bornée par un nombre M . Si $w = 0$, alors la suite $(a_n w^n)$ est bornée. Sinon, on a $\forall n \in \mathbb{N}, |a_{n+1} w^{n+1}| \leq (n+1) |a_{n+1} w^{n+1}| \leq \frac{M}{|w|}$, donc la suite $(a_n w^n)$ est bornée par $\max(|a_0|, \frac{M}{|w|})$. Cela donne bien l'inclusion souhaitée.
- Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Si $R = 0$, Ce qui précède indique que le rayon de la série dérivée est aussi égal à zéro. Sinon, montrons que pour tout $\varepsilon \in]0, R[$, le rayon de convergence de la série dérivée est supérieur ou égal à $R - \varepsilon$.
Soit $\varepsilon \in]0, R[$. Par la définition c) du rayon de convergence, il existe w tel que $|w| > R - \frac{\varepsilon}{2}$ et que la suite $(a_n w^n)$ soit bornée. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$|(n+1)a_{n+1}(R-\varepsilon)^n| = \left| \frac{(n+1)}{w} \left(\frac{R-\varepsilon}{w} \right)^n \right| |a_{n+1} w^{n+1}|$, où la suite $\left(\left| \frac{(n+1)}{w} \left(\frac{R-\varepsilon}{w} \right)^n \right| \right)$ tend vers 0 par croissance comparée (car $\left| \frac{R-\varepsilon}{w} \right| < 1$) donc est bornée, et la suite $(a_{n+1} w^{n+1})$ est bornée elle aussi, donc la suite $(|(n+1)a_{n+1}(R-\varepsilon)^n|)$ est bornée et d'après la définition c) du rayon de convergence, le rayon de convergence de la série dérivée est donc supérieur ou égal à $R - \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon \in]0, R[$, il est en fait supérieur ou égal à R , ce qui conclue la preuve. $\square$

Théorème 3.3.5. La fonction f définie par une série entière $\sum a_n z^n$ dans le disque de convergence $D(0, R)$ est $\mathbb{C}$ -dérivable et en tout point $w_0 \in D(0, R)$ on a :

$$f'(w_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} w_0^n$$

Démonstration. Soit $w_0 \in D(0, R)$. Pour $w \in D(0, R) \setminus \{w_0\}$, on a : $\frac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}$, où on a pu regrouper les termes en utilisant la convergence absolue à l'intérieur de $D(0, R)$.

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} = \sum_{k=1}^n w^{k-1} w_0^{n-k}$, donc $\frac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^n w^{k-1} w_0^{n-k}$. Pour montrer que cette fonction admet une limite quand $w \rightarrow w_0$, on va montrer qu'il y a convergence uniforme, et même convergence normale sur un disque qui contient w_0 .

Soit $\ell \in]|w_0|, R[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $w \in D(0, \ell)$, $\left| a_n \sum_{k=1}^n w^{k-1} w_0^{n-k} \right| \leq |a_n| \sum_{k=1}^n \ell^{k-1} \ell^{n-k} = |n a_n \ell^{n-1}|$, donc $\sup_{w \in D(0, \ell)} \left| a_n \sum_{k=1}^n w^{k-1} w_0^{n-k} \right| \leq |n a_n \ell^{n-1}|$. Or $\sum |n a_n \ell^{n-1}|$ converge par convergence normale de la série dérivée sur $D(0, \ell)$ (définition a) du rayon de convergence). D'où la convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^n w^{k-1} w_0^{n-k}$ quand $w \in D(0, \ell)$.

On en déduit (d'après le théorème 3.1.9), que quand w tends vers w_0 , $\frac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0}$ tends vers $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n w_0^{n-1}$, ce qui est le résultat souhaité. $\square$

Corollaire 3.3.6. Une fonction f définie comme somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ est indéfiniment $\mathbb{C}$ -dérivable sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

On a, pour tout $k \geq 0$ et tout $w \in D(0, R)$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(w) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) \cdots (n+1) a_{n+k} w^n, \\ f^{(k)}(0) &= k! a_k. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit f une fonction définie comme somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R .

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : « f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $D(0, R)$, où sa dérivée n -ème est donnée par $f^{(k)}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) \cdots (n+1) a_{n+k} w^n$ » : (on rappelle qu'être de classe $\mathcal{C}^n$ signifie être dérivable n fois avec une dérivée n -ième continue)

- $\mathcal{P}_1$ découle du théorème 3.3.5, en remarquant que la dérivée est continue sur $D(0, R)$ en tant que série entière de rayon R .

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. En appliquant le théorème 3.3.5 à la série entière $f^{(n)}$ (et en remarquant que $f^{(n+1)}$ est continue comme série entière) on obtient $\mathcal{P}_{n+1}$.

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre le théorème. $\square$

3.4 Développement en série entière en 0

Définition 3.4.1. Soit g une fonction de P dans $\mathbb{C}$, où $0 \in P \subset \mathbb{C}$. On dit que g est *développable en série entière sur un disque de rayon $r > 0$* s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que, pour tout $w \in D(0, r)$, on ait :

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

Exemple 3.4.2. La fonction $g(z) = \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur $D(0, 1)$, la série entière en question étant $\sum z^n$.

Définition 3.4.3. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$. On appelle alors *série de Taylor* de f la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

La proposition suivante dit qu'une fonction développable en série entière coïncide avec la somme de sa série de Taylor en un voisinage de 0.

Proposition 3.4.4. Soit g développable en série entière sur un disque $D(0, r)$, avec $r > 0$. Alors g est indéfiniment dérivable sur $D(0, r)$ et le développement est $\sum a_n z^n$ avec $a_n = g^{(n)}(0)/n!$.

Démonstration. Cela découle immédiatement du corollaire 3.3.6. $\square$

Remarque 3.4.5. Une fonction peut avoir une série de Taylor de Taylor qui converge, sans être égale à la limite de cette série de Taylor (elle n'est alors pas développable en série entière).

Par exemple la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall x \neq 0, g(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right). \end{cases}$

On verra dans l'exercice 79 que sa série de Taylor converge (vers 0), mais que la fonction de départ n'est la limite de cette série de Taylor sur aucun disque $D(0, r)$ (où $r > 0$).

3.4.a Séries de Taylor classiques

Exponentielle

La série entière exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a rayon de convergence infini. La fonction exponentielle $e^z = \exp(z)$ est définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n.$$

Logarithme

La série entière harmonique $\sum \frac{1}{n} z^n$ (série qui commence à $n = 1$, voir 3.2.15) a rayon de convergence 1. A l'intérieur du disque de convergence $D(0, 1)$ on a :

$$\ln(1 + w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} w^n.$$

Puissance

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On a, pour $w \in D(0,1)$:

$$(1+w)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+w)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} w^n.$$

Remarques

- Le facteur $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$ se note aussi $\binom{\alpha}{n}$, de sorte que (pour $w \in D(0,1)$),

$$(1+w)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} w^n.$$

- Ce développement permet de développer en série entière les fractions rationnelles, en commençant par les décomposer en éléments simples.

Sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus sont définies par les séries entières suivantes, de rayon de convergence infini.

$$\begin{aligned}\sin(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}, \\ \cos(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n}.\end{aligned}$$

Sinus et cosinus hyperboliques

Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont définies par les séries entières suivantes, de rayon de convergence infini.

$$\begin{aligned}\sinh(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} w^{2n+1}, \\ \cosh(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} w^{2n}.\end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses

Les développements en série entière des fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente ont rayon de convergence 1 :

$$\begin{aligned}\arcsin(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} w^{2n+1}, \\ \arccos(w) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} w^{2n+1}, \\ \operatorname{arsh}(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} w^{2n+1}, \\ \operatorname{artan}(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} w^{2n+1}, \\ \operatorname{arth}(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} w^{2n+1}.\end{aligned}$$

3.5 Opération sur les séries

3.5.a Combinaison linéaire et produit

Théorème 3.5.1. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ séries entières, et notons R_a et R_b leurs rayons de convergence.

- i) Pour λ et μ complexes, le rayon de convergence $R_{\lambda\mu}$ de la série entière

$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$$

satisfait $R_{\lambda\mu} \geq \min(R_a, R_b)$,

et sur le disque $D(0, \min(R_a, R_b))$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

- ii) Soit R_c le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$, où la suite (c_n) est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Alors $R_c \geq \min(R_a, R_b)$, et sur le disque $D(0, \min(R_a, R_b))$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right).$$

Démonstration. Sur le disque $D(0, \min(R_a, R_b))$ la convergence de la série, et l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ sont immédiates. Il en découle que $R_{\lambda\mu} \geq \min(R_a, R_b)$.

De même, sur ce même disque $D(0, \min(R_a, R_b))$ la convergence de $\sum c_n z^n$, et l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$ découlent de 2.4.3 (on rappelle qu'il y a convergence absolue sur le disque ouvert de convergence, cela découle de la convergence normale sur les disques fermés inclus dans $D(0, R)$). Il en découle que $R_c \geq \min(R_a, R_b)$. $\square$

3.5.b Suites doubles

Convergence uniforme de suites doubles

On a vu au théorème 3.1.9 que la convergence uniforme donne la continuité de la limite, et permet d'intervertir des limites (on avait $\lim_{w \rightarrow w_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{w \rightarrow w_0} f_n(w)$).

On va montrer ici un résultat analogue pour des suites doubles $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$. Pour cela on définit pour chaque entiers $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \\ p \mapsto u_{n,p} \end{cases}$.

Proposition 3.5.2. Soit $(u_{n,p})$ une suite double avec la notation ci-dessus ($f_n(p) = u_{n,p}$). Supposons que (f_n) soit uniformément convergente sur $\mathbb{N}$ (c'est à dire qu'elle admet une limite f telle que la suite $\left(\sup_{p \in \mathbb{N}} |f_n(p) - f(p)| \right)$ soit définie à partir d'un certain rang et tende vers 0), et que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la suite $(u_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ soit convergente. Alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n,p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} u_{n,p}.$$

Démonstration. Le preuve est la même qu'au théorème 3.1.9 :

On note $\ell_n = \lim_{p \rightarrow \infty} f_n(p)$.

- Montrons que la suite (ℓ_n) converge. Pour cela on va montrer qu'elle est de Cauchy : Soit $\varepsilon > 0$, comme (f_n) converge uniformément vers f , il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, $\sup_{p \in \mathbb{N}} |f_n(p) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Soient n et p dans $\llbracket N_1, +\infty \rrbracket$, alors quelque soit $q \in \mathbb{N}$ on a $|f_n(q) - f_p(q)| \leq |f_n(q) - f(q)| + |f(q) - f_p(q)| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$, d'où l'on déduit l'inégalité suivante : $|\ell_n - \ell_p| = \lim_{q \rightarrow \infty} |f_n(q) - f_p(q)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, ce qui montre que la suite (ℓ_n) est de Cauchy, donc qu'elle converge dans $\mathbb{C}$.

- Montrons désormais que $\lim_{p \rightarrow \infty} f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n$: Soit $\varepsilon > 0$. On définit comme précédemment $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, $\sup_{q \in \mathbb{N}} |f_n(q) - f(q)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (qui existe car (f_n) converge uniformément vers f). De plus, comme on a montré que la suite (ℓ_n) converge dans $\mathbb{C}$, on note $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n$, et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N_2, +\infty \rrbracket$, $|\ell_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$. Enfin, on pose $N_3 = \max(N_1, N_2)$ et comme $\lim_{p \rightarrow \infty} f_{N_3}(p) = \ell_{N_3}$, il existe $N_4 > 0$ tel que $\forall p \in \llbracket N_4, +\infty \rrbracket$, $|f_{N_3}(p) - \ell_{N_3}| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Dès lors, pour $p \in \llbracket N_4, +\infty \rrbracket$, on a

$$|f(p) - \ell| \leq |f(p) - f_{N_3}(p)| + |f_{N_3}(p) - \ell_{N_3}| + |\ell_{N_3} - \ell| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ ce qui montre bien que } \lim_{p \rightarrow \infty} f(p) = \ell. \quad \square$$

Remarque 3.5.3. En proposition 3.5.2, la suite double permettait notamment de considérer la convergence de deux suites distinctes :

- Pour p fixé, la suite $(u_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$, c'est à dire la suite $(u_{0,p}, u_{1,p}, u_{2,p}, \dots)$. Dans les notations de la proposition 3.5.2, la convergence de cette suite correspond à la convergence simple de la suite (f_n) .
- Pour n fixé, la suite $(u_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$, c'est à dire la suite $(u_{n,0}, u_{n,1}, u_{n,2}, \dots)$. C'est cette suite qui apparaît dans la dernière condition à la fin de l'énoncé de la proposition 3.5.2.

Le théorème suivant portera sur des séries, et comme chaque suite permet de définir une série, on peut aussi définir deux séries à partir de cette suite double :

- Pour p fixé, la série $\sum u_{n,p}$ désigne par convention (pour être cohérent avec les notations du chapitre 2) la série dont les sommes partielles sont (pour $N \in \mathbb{N}$) les $\sum_{n=0}^N u_{n,p}$. Si on veut éviter toute ambiguïté, on peut noter cette série « $\sum_n u_{n,p}$ ».
- Pour n fixé, on peut considérer la série dont les sommes partielles sont (pour $N \in \mathbb{N}$) les $\sum_{p=0}^N u_{n,p}$. Dans la suite, cette série sera notée « $\sum_p u_{n,p}$ ».

Fubini discret

Le nom “Théorème de Fubini” est généralement associé à un théorème sur les intégrales, mais comme les séries sont une version discrète des intégrales, on appelle “Théorème de Fubini discret” le théorème suivant sur les séries :

Théorème 3.5.4 (Théorème de Fubini discret). Soit $(u_{n,p})$ une suite complexe double. Supposons que :

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_p u_{n,p}$ est absolument convergente;
- ii) la série $\sum_n \sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|$ est convergente.

Alors on a la formule d’inversion :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}.$$

Démonstration. On introduit une notation pour les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad s_{n,p} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^p u_{i,k}$$

Comme c’est une somme finie, on a aussi $s_{n,p} = \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^n u_{i,k}$.

Montrons que la suite double $(s_{n,p})$ satisfait les hypothèses de la proposition 3.5.2 :

- La convergence uniforme découle de la convergence normale : Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\left| \sum_{k=0}^p u_{n,k} \right| \leq \sum_{k=0}^p |u_{n,k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}|$. Donc $\sup_{p \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^p u_{n,k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}|$ dont la somme converge. On a donc convergence normale, donc uniforme.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, comme chacune des séries $\sum_p u_{0,p}, \sum_p u_{1,p}, \dots, \sum_p u_{n,p}$ est convergente, leur somme finie $\sum_{p=0}^n \sum_{i=0}^p u_{i,p}$ converge, c’est à dire que $s_{n,p}$ admet une limite quand $p \rightarrow \infty$.

Donc d’après la proposition 3.5.2 on a $\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} s_{n,p}$, c’est à dire

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}. \quad \square$$

Remarque 3.5.5. L’échange entre somme et limite n’est plus valide en général si la convergence est simple mais pas uniforme. Par exemple, on peut considérer :

$$u_{n,p} = \frac{n}{n+p+1} - \frac{n+1}{n+p+2} = \frac{n-p-1}{(n+p+1)(n+p+2)}.$$

D'une part cette somme est télescopique et (pour $p \in \mathbb{N}$), $\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{p+1} - \frac{n+1}{n+p+2} = -1$, d'où $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,p} = 1$.

D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{p \rightarrow \infty} u_{n,p} = 0$, d'où il découle que $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{p \rightarrow \infty} u_{n,p} = 0$.

3.5.c Composition de séries

Le théorème de Fubini discret permet d'étudier la composition de séries entières, ce qui revient à remplacer la variable d'une série entière par la fonction somme d'une deuxième série entière. Il en résulte (sous certaines hypothèses portant sur les rayons de convergence) une fonction qui est encore la somme d'une série entière.

Théorème 3.5.6. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ séries entières, de rayon de convergence $R_a > 0$ et $R_b > 0$, et notons respectivement f et g les fonctions somme des deux séries. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $0 < \alpha < R_b$, tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \alpha^n < R_a.$$

Alors il existe une série entière $\sum c_n z^n$, de rayon de convergence $R_c \geq \alpha$, telle que pour tout $w \in D(0, \alpha)$ on ait :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n = f(g(w)).$$

Démonstration. Soit $w \in \mathbb{C}$, avec $|w| \leq \alpha$. On a $|w| < R_b$ donc $g(w)$ est défini. On pose :

$$G(w) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| |w|^n.$$

Ceci est bien défini aussi. Notre hypothèse est $G(\alpha) < R_a$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à $g(w)^n$, qui (par convergence absolue) peut être exprimé comme somme de la série obtenue comme produit de n fois la série $\sum b_p w^p$ avec elle-même, autrement dit :

$$g(w)^n = \sum_{p=0}^{\infty} d_{n,p} w^p \quad \text{où} \quad \begin{cases} d_{0,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \geq 1 \end{cases} \\ \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1,p} = \sum_{k=0}^p d_{n,k} b_{n,p-k} \end{cases} \quad \text{c'est à dire } d_{n,p} = \sum_{i_1 + \dots + i_n = p} b_{i_1} \dots b_{i_n}$$

$$\text{En notant } u_{n,p} = a_n d_{n,p} w^p, \text{ on a } f(g(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n d_{n,p} w^p = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}.$$

On souhaite montrer que $f(g(w)) = \sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n d_{n,p} w^p}_{c_n}$, ce qui définirait c_n satisfaisant la condition

demandée.

Vérifions pour cela qu'on est dans les conditions du théorème 3.5.4 : On note pour cela $D_{n,p} = \sum_{i_1 + \dots + i_n = p} |b_{i_1}| \dots |b_{i_n}|$, de sorte que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}| = \sum_{p=0}^{\infty} |a_n d_{n,p} w^p| \leq \sum_{p=0}^{\infty} |a_n| D_{n,p} |w|^p \leq |a_n| \sum_{p=0}^{\infty} |a_n| D_{n,p} \alpha^p = |a_n| G(\alpha)^n$. Cela montre d'une part la convergence absolue de $\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}$ (car les

somme $\sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|$ n'est pas $+\infty$), et d'autre part la convergence de $\sum_n \sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|$ ($\sum_n |a_n| G(\alpha)^n$ converge car $G(\alpha) < R_a$). Donc on peut bien appliquer le théorème 3.5.4, qui donne $f(g(w)) = \sum_{p=0}^{\infty} c_n w^p$, où les c_n sont définis par $c_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_n d_{n,p}$. Comme cette somme converge pour tout $w \in D(0\alpha)$, le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ est donc $R_c \geq \alpha$, ce qui conclue la preuve. $\square$

3.6 La fonction exponentielle complexe

Considérons la série entière exponentielle, de rayon de convergence infini :

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème 3.6.1. La fonction exponentielle complexe prend valeurs dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ nous avons :

$$e^{z+w} = e^z e^w, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

De plus, la fonction $\exp$ est indéfiniment $\mathbb{C}$ -dérivable sur $\mathbb{C}$ et pour tout $k \geq 1$ sa dérivée d'ordre k est la fonction $\exp$ elle même.

Démonstration. Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Calculons $e^z e^w$:

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w} \end{aligned}$$

où on a utilisé la convergence absolue (on est à l'intérieur du disque ouvert de convergence) pour manipuler les séries doubles.

Ceci étant vrai pour n'importe quel $z, w \in \mathbb{C}$, on peut prendre $w = -z$ et remarquer $e^0 = 1$ pour avoir $e^z e^{-z} = 1$ donc $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

La dérivabilité est claire puisque notre série converge sur $\mathbb{C}$, et la dérivée coïncide avec $\exp$ simplement en regardant les coefficients de la série dérivée. $\square$

Remarque 3.6.2. En utilisant de plus les définitions des fonctions $\cos : x \mapsto \operatorname{Re}(e^{ix})$ et $\sin : x \mapsto \operatorname{Im}(e^{ix})$, on peut retrouver des formules de trigonométrie, par exemple

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(x+y) &= \operatorname{Re}(e^{i(x+y)}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

Index

Adjacence (suites adjacentes)	p. 19
Algèbre	p. 33
Axiome d'Archimède	p. 13
Bolzano-Weierstrass (théorème)	p. 25
Borne supérieure	p. 11
Borné	p. 11
Cauchy	
règle de Cauchy	p. 45
suites de Cauchy	p. 22
critère de Cauchy	p. 41
critère de Cauchy uniforme	p. 58
complet	p. 22
continuité	p. 56
continuité uniforme	p. 57
convergence	
absolue	p. 47, 61
commutative	p. 49
normale	p. 59, 61
simple	p. 55
uniforme	p. 55
Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$	p. 13
$\mathbb{C}$ -dérivabilité	p. 65
divergence grossière	p. 41
Équivalence (suites équivalentes)	p. 17
Espace vectoriel	p. 32
exponentielle	p. 63, 73
Fubini discret (Théorème)	p. 71
Heine (théorème)	p. 57
Limite	p. 14
supérieure/inférieure	p. 20
Majoré	p. 11
Nature	

d'une suite	p. 15
d'une série	p. 40
norme infinie $\ \cdots\ _\infty$	p. 60
Produit de Cauchy	p. 46, 47, 69
Propriété de la borne supérieure	p. 12
Rayon de convergence	p. 62
Formule d'Hadamard	p. 64
Règle de d'Alembert	p. 64
Séries	
critères de convergence	
Règle de Cauchy	p. 45
Règle de d'Alembert	p. 46
Série alternée	p. 47
géométriques	p. 41
nature	p. 40
série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$	p. 44
série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$	p. 43
sommes partielles	p. 40
télescopiques	p. 41
Série entière	p. 61
dérivée	p. 65
développement en série entière	p. 67
Suite	p. 10
adjacente	p. 19
complexe	p. 39
de Cauchy	p. 22
dominée	p. 11
double	p. 70
équivalente	p. 17
extraite (sous-suite)	p. 23
nature : convergente/divergente	p. 15
négligeable	p. 17
Supremum (=Borne supérieure)	p. 11
Valeur d'adhérence	p. 24