

Exercices de Math3A

Rappels: Ensembles, fonctions et quantificateurs

A) Exercices classiques ou application du cours

Exercice 1 : Sous-ensemble

Soit $X \subset Y \subset \mathbb{R}$.

1. Démontrer que si Y est majoré, alors X est majoré.
2. Démontrer que si Y est minoré, alors X est minoré.
3. Dédurre que si Y est borné, alors X est borné.
4. Si Y admet une borne supérieure, X en admet-il forcément aussi une ?
5. Démontrer que si X et Y admettent tous deux une borne supérieure, alors $\sup X \leq \sup Y$.

Exercice 2 : Bornes supérieures et inférieures

Cet exercice vise à identifier les bornes supérieure et inférieure (lorsqu'elles existent) de plusieurs ensembles :

1. Soient un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, et un nombre $m \in \mathbb{R}$.
 - (a) Écrire avec des quantificateurs la condition « m est un majorant de A » et sa négation « m n'est pas un majorant de A ».
 - (b) Lorsque $A = [-3, \sqrt{2}[$, démontrer que l'ensemble des majorants de A est $[\sqrt{2}; +\infty[$. En déduire que $\sqrt{2} = \sup A$. *Indication : On pourra utiliser la contraposée de « tout majorant est dans $[\sqrt{2}; +\infty[$ ».*
 - (c) De même, déterminer l'ensemble des minorants de $A = [-3, \sqrt{2}[$, et sa borne inférieure.
 - (d) Déterminer l'ensemble des majorants de $[-1; +\infty[$. Cet ensemble admet-il une borne supérieure ?
 - (a) Pour un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs la condition « A est un minoré » et sa négation « A n'est pas minoré ».
 - (b) Démontrer que l'ensemble $] -\infty; 1[$ n'est pas minoré. En déduire qu'il n'a pas de borne inférieure.
2. Utiliser la caractérisation de la borne supérieure (proposition 1.1.9 du cours) pour montrer que $1 = \sup] -\infty; 1[$.

Exercice 3 : Ensemble centré

(en CM)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble tel que $\forall x \in E, -x \in E$.

1. Montrer que $\{|x| \mid x \in E\} = E \cap \mathbb{R}^+$.
2. Si E est majoré, montrer que E est borné.
3. Si $\sup(E)$ existe, calculer $\sup(E) + \inf(E)$.

Exercice 4 : Notations

(en CM)

- Majorants (définition 1.1.2 des notes de cours)
 - Serait-ce une bonne idée d'introduire la notation « $1 = \text{maj}([0,1])$ » pour affirmer que « 1 est un majorant de $[0,1]$ » ?
On pourra noter que cela donnerait les égalités $1 = \text{maj}([0,1])$, $2 = \text{maj}([0,1])$, et $2 = \text{maj}([0,2])$ mais l'inégalité $1 \neq \text{maj}([0,2])$.
 - En quoi la notation « $1 \in \text{maj}([0,1])$ » serait-elle une notation plus pertinente pour affirmer que « 1 est un majorant de $[0,1]$ » ? Dans ce cas que signifierait « $\text{maj}([0,1])$ » ?
 - Quelle propriété fait qu'il est pertinent d'utiliser les symbole « $=$ » pour la borne supérieure (lorsqu'elle existe) alors que ce symbole ne serait pas pertinent pour les majorants ?
- Suite dominée par une autre suite (définition 1.1.5 des notes de cours)
 - On pose $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n-5)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n-4}{n+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Montrer que $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, que $a_n = \mathcal{O}(c_n)$ et que $b_n = \mathcal{O}(c_n)$ mais qu'en revanche (b_n) n'est pas dominée par (c_n) (c'est à dire que l'affirmation « $b_n = \mathcal{O}(c_n)$ » est fausse).
 - La notation « $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ » (vue en cours) est-elle si pertinente, ou aurait-il été plus pertinent de le noter par exemple « $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$ » ?

Exercice 5 : Définitions

corrigé en ligne

Dans cet exercice, E désigne un sous ensemble de $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés ci-dessous, indiquer si elle traduit le fait que E soit majoré / minoré / borné / etc.

- $\forall e \in E, \exists m \in \mathbb{R} : m \leq e$
- $\exists e \in E : \forall m \in \mathbb{R}, m \leq e$
- $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m \leq e$
- $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m < e$
- $\forall m \in \mathbb{R}, \exists e \in E : m \leq e$
- $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m \leq |e|$
- $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m \geq |e|$
- $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m \geq e$
- $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq e, \forall e \in E$

Exercice 6 : Inclusions

corrigé en ligne

Soient A , B , et C trois ensembles.

- Écrire avec des quantificateurs les affirmations $A \cap B \subset C$ et $A \cap B \not\subset C$.
- Écrire sous forme d'inclusion entre ensembles les affirmations $\forall x \in A, (x \in B \text{ ou } x \in C)$ et $\exists x \in A : (x \notin B \text{ et } x \notin C)$.

Exercice 7 : Bornes supérieures et inférieures

corrigé en ligne

Calculer, lorsqu'elle(s) existe(nt), la borne supérieure et la borne inférieure sur $\mathbb{R}$ des ensembles suivants. Préciser si elle(s) sont atteinte(s) sur l'ensemble.

- $A =]-\pi; -\pi/4]$
- $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$
- $A = \{\tan x \mid x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\}$
- $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$
- $A = \{\exp(-n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

B) Autres démonstrations**Exercice 8 : Borne supérieure d'une union**

Soient E un ensemble non vide, et pour chaque $e \in E$, soit A_e un sous ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si l'un des deux ensembles $\bigcup_{e \in E} A_e$ et $\{\sup(A_e) \mid e \in E\}$ est majoré, alors l'autre ensemble est majoré aussi et on a

$$\sup\left(\bigcup_{e \in E} A_e\right) = \sup(\{\sup(A_e) \mid e \in E\}).$$

2. En déduire la borne supérieure (si elle existe) de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{2n}{2n+1}; \frac{2n+1}{2n+2}\right]$

Exercice 9 : Algèbre des suites bornées

(en CM)

1. Suites majorées
 - a) Pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles, écrire avec des quantificateurs chacune des conditions « La suite (u_n) est majorée » et « La suite (u_n) n'est pas majorée ».
 - b) Montrer (en se référant à la question a) que la suite $(-\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée tandis que la suite $(\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
 - c) En déduire que l'ensemble des suites majorées ne forme pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (pour les additions et dilatations usuelles, définies en partie 1.1.c du cours).
2. Suites bornées
 - a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.
Montrer que la suite (u_n) est bornée si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A$.
 - b) Soient un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, et deux suites réelles bornées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Montrer que la suite $\lambda u + v$ est elle-même bornée. *Indication : d'après la question précédente, il suffit de trouver un nombre $A_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda u_n + v_n| \leq A_3$.*
 - c) En déduire que l'ensemble des suites réelles bornées forme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 - d) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées. Montrer que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle-même bornée.
 - e) En déduire que l'ensemble des suites réelles bornées forme une $\mathbb{R}$ -algèbre.
 - f) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Peut-on affirmer que « la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée » ?

Exercice 10 : Complémentaire d'ensemble

corrigé en ligne

Soit Ω et E deux ensembles, et pour chaque $e \in E$, soit A_e un sous ensemble de Ω . On rappelle que $\bigcup_{e \in E} A_e = \{x \in \Omega \mid \exists e \in E : x \in A_e\}$ et que $\bigcap_{e \in E} A_e = \{x \in \Omega \mid \forall e \in E : x \in A_e\}$.

De plus, pour tout sous-ensemble A de Ω , on note $\bar{A} = \Omega \setminus A$ son complémentaire.

1. En utilisant cette notation avec des quantificateurs, démontrer que le complémentaire de $\bigcup_{e \in E} A_e$ est $\bigcap_{e \in E} \bar{A}_e$, et que le complémentaire de $\bigcap_{e \in E} A_e$ est $\bigcup_{e \in E} \bar{A}_e$.
2. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^2$, en déduire le complémentaire de $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \left(\bigcup_{y \in [x; +\infty[} \{(x, y)\} \right)$.
3. Donnez une expression plus lisible de $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \left(\bigcup_{y \in [x; +\infty[} \{(x, y)\} \right)$ afin de vérifier votre résultat de la question précédente.

Exercice 11 : Sous-ensemble où une fonction est croissante

corrigé en ligne

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$.

Si A est un sous ensemble de A , on dit que « f est croissante sur A » si la restriction de f à A est croissante, c'est à dire si $\forall x \in A, \forall y \in A, (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.

1. Soient $a < b < c$ trois réels, et soit f une fonction réelle définie sur $[a, c]$.
Montrer que si f est croissante sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors elle est croissante sur $[a, c]$.
2. Soient $a < b$ deux réels, et soit f une fonction réelle définie sur $[a, b]$.
Montrer que si une fonction f , définie sur $[a, b]$, est croissante sur $]a, b]$ et satisfait $\forall x \in]a, b], f(x) \geq f(a)$, alors elle est croissante sur $[a, b]$.

Exercice 12 : Partie bornée de $\mathbb{R}$

corrigé en ligne

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Exprimer en terme de quantificateurs l'affirmation selon laquelle « E n'est pas bornée ».
2. En déduire que « E n'est pas bornée » est équivalent à « $1 \in \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E}]0; \frac{|x|}{\rho}]$ ».
3. De même, montrer que « E est bornée » est équivalent à « $\{0\} = \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E} \left[-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}\right]$ ».

C) Exemples à ne pas suivre

Exercice 13 : Suite de l'exercice 8

▲ cet exercice utilise des notions du Chapitre 1

À l'issue de l'exercice 8, on demande à un·e étudiant·e de montrer que 2 est la borne supérieure de l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2 - e^{-3n}; 2 - e^{-(3n+2)}]$. Cet étudiant·e donne la réponse suivante :

$$\begin{aligned} \sup(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2 - e^{-3n}; 2 - e^{-(3n+2)}]) &= \sup\{2 - e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ d'après exercice 8} \\ &= 2 - \sup\{e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= 2 \text{ car } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(3n+2)} = 0 \end{aligned}$$

1. (a) Que penser d'une preuve qui commence par « $\sup(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2 - e^{-3n}; 2 - e^{-(3n+2)}]) = 2$ » puis qui calcule la valeur de ce supremum ?
 - (b) Commençons par vérifier l'égalité « $\sup\{2 - e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\} = 2 - \sup\{e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ » :
 - i. Par "passage à la limite" dans une inégalité, montrer que tous les majorants de $\{2 - e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont supérieurs-ou-égaux à 2. En déduire la valeur (et l'existence de) $\sup\{2 - e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 - ii. Montrer que l'ensemble $\{e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ admet un maximum. En déduire la valeur (et l'existence de) $\sup\{e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 - iii. Conclure : que penser de l'égalité « $\sup\{2 - e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\} = 2 - \sup\{e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ » ?
Remarque : ce n'est pas au programme, mais l'égalité $\sup\{2 - e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\} = 2 - \inf\{e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ aurait été correcte. Intuitivement, quand « on sort le signe "-" de l'ensemble », les multiplications par (-1) changent le sens des inégalités et intervertissent sup et inf.
 - (c) Considérons maintenant la dernière égalité, où l'étudiant·e affirme que « $\sup\{e^{-(3n+2)} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$, car $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(3n+2)} = 0$ ».
- i. En s'inspirant de la question 1(b)i démontrer le théorème suivant :
 Si (u_n) est une suite croissante, qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \ell$.
 - ii. Cela permet-il de déduire l'égalité annoncée par cet·te étudiant·e ?
2. Si on vous pose la même question qu'à cet étudiant·e (montrer, à l'issue de l'exercice 8, que 2 est la borne supérieure de l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2 - e^{-3n}; 2 - e^{-(3n+2)}]$), comment rédigeriez-vous votre copie ?

Exercice 14 : Complémentaire d'unions et d'intersections

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[= [n; +\infty[$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer de deux manières le complémentaire de $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[$, et vérifiez que vous obtenez deux fois la même réponse.

Sa réponse est ci-dessous :

1. Pour $t \in [n; +\infty[$, on pose $x = (t+n)/2$ (ce qui nous assure que $t \leq x \leq n$). Alors, pour tout $y \leq x$, on a $t \in [y; +\infty[$.
 On a donc bien montré que $\exists x \geq n : \forall y \leq x, t \in [y; +\infty[$
2.
 - Première méthode : Comme $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[= [n; +\infty[$, son complémentaire est $] -\infty; n[$.
 - Deuxième méthode : On prend le complémentaire des unions et intersections :
 Le complémentaire de $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[= [n; +\infty[$ est $\bigcup_{x < n} \bigcap_{y > x}] -\infty; y[$. Mais comme $\bigcap_{y > x}] -\infty; y[=] -\infty; x[$, son union sur $x < n$ donne bien $] -\infty; n[$, comme avec la première méthode.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante ? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes ?

Chapitre 1: suites réelles – limites

A) Exercices classiques ou application du cours

Exercice 15 : Exemples de limites

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes, qui sont définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ (et que l'on notera $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$).

- | | | |
|--|-----------------------------------|---|
| i) $\frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n)}$ | ii) $\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ | iii) $\frac{1}{n - \sqrt{(n+a)(n+b)}}$ |
| iv) $n \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ | v) $e^{(1+i\pi)n}$ | vi) $(n + \cos(n))^2 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$ |

Exercice 16 : Suites adjacentes

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a \leq b$. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites réelles définies par :

- i) $u_0 = a$ et $v_0 = b$.
- ii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$
- iii) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

- Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (donc qu'elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$).
- Montrer que la combinaison linéaire $\left(\frac{2u_n + 3v_n}{5}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 17 : Formulations équivalentes de la définition d'une limite (en CM)

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que les quatre affirmations ci-dessous sont équivalentes entre elles :

- i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, |u_n - \ell| < \varepsilon$
- ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, |u_n - \ell| < \varepsilon$
- iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Exercice 18 : Définition de la limite (en CM)

En vous appuyant uniquement sur la définition 1.2.1 de la limite, montrer que $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{5}{n}} = 1$.

Exercice 19 : Composée de limites (en CM)

Soient (u_n) une suite réelle et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ (c'est à dire que $\forall n \in \mathbb{N}, k_n \in \mathbb{N}$).

Montrer que si la suite (u_n) tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, tandis que $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = \ell$.

Exercice 20 : Suites négligeables (en CM)

On pose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1 - \frac{5}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n - 4)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrer que $u_n = o(w_n)$ et que $v_n = o(w_n)$. A-t-on donc $u_n = v_n$?

Exercice 21 : Valeurs d'adhérence (en CM)

Montrer que 1 et -1 sont les seules valeurs d'adhérence de la suite $((-1)^n)$.

Exercice 22 : Exemples de limites corrigé en ligne

Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ (et qu'on pourra noter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$).

- i) $\ln \left(\frac{(3n+2)^2}{5n - \frac{2}{n}} \right)$
- ii) $\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{12}{n\pi}\right)}$
- iii) $n^2 \tan\left(\frac{1}{n}\right) - n$
- iv) $\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(1+n)}{\ln(n)+1}$
- v) $\frac{5^n - \pi^n + 7}{4^n}$
- vi) $\frac{2n+1}{\sqrt{4n^4 + 2n + 1} - 2n^2}$

Exercice 23 : Suite définie par récurrence corrigé en ligne

Étant donné $u_0 \in \mathbb{R}$, on considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Admet-elle une limite ? (si oui, quel est cette limite ?)

Exercice 24 : Monotonie corrigé en ligne

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2}) \dots (1+\sqrt{n})}$$

est-elle monotone ? Est-elle convergente ? Si oui, quel est sa limite ?

Exercice 25 : Croissance comparée corrigé en ligne

Pour α et $\beta \in \mathbb{R}$, on cherche à déterminer si la suite $\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right)_{n \geq 2}$ converge (et quelle est sa limite).

- Lorsque α et β sont strictement positifs, étudier la fonction $f : \begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \end{cases}$.

En déduire que la suite $\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right)_{n \geq 2}$ est majorée.

- En déduire que quand $\alpha > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$. *Indication : quand $\beta > 0$, on pourra décomposer $(\ln n)^\beta n^\alpha$ sous la forme $\frac{(\ln n)^\beta}{n^{\alpha/2}} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$.*

- En déduire que quand $\alpha < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^\beta n^\alpha = +\infty$.

B) Autres démonstrations**Exercice 26 : Tendre ou ne pas tendre vers 0**

1. a) Donner un exemple de suite réelle (u_n) qui n'admet pas de limite (ni réelle, ni infinie).
 b) Une des affirmations « $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ » et « $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ » est-elle vraie pour cette suite u_n ?
 c) En déduire que « $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ » n'est pas la négation de « $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ».
2. a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telle que $\lim u_n \neq 0$ et $\lim v_n = 0$. Montrer que $u_n + v_n \sim u_n$.
 b) Si on remplace la condition « $\lim u_n \neq 0$ » par « u_n ne tends pas vers 0 », montrer que le résultat de la question précédente n'est pas forcément vrai. *Indication : on construire un contre exemple, c'est à dire une suite u_n qui ne tend pas vers 0 et une suite $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ telles que $u_n + v_n$ ne soit pas équivalent à u_n .*

Exercice 27 : Sous-suites

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que les sous-suites (u_{2n}) , (u_{3n}) et (u_{2n+1}) convergent dans $\mathbb{R}$. Montrer que (u_n) converge dans $\mathbb{R}$.

Indication : On pourra commencer par montrer que les sous-suites ont toutes la même limite, en leur trouvant des sous-suite communes

Exercice 28 : Obtention des valeurs d'adhérence

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont on va étudier les valeurs d'adhérence :

1. Soient $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ deux sous suites convergentes, qui tendent respectivement vers ℓ et ℓ' .

On suppose de plus que l'ensemble $E_0 = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{\psi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini (comme il est de plus inclus dans $\mathbb{N}$, cela veut dire qu'il existe une suite strictement croissante (x_n) telle que $E_0 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

Montrer qu'on a alors $\ell = \ell'$.

Indication : on pourra construire une sous-suite commune aux deux sous-suites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$.

2. Supposons que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, et désignons leur limites par ℓ et ℓ' . Montrer que si $\ell \neq \ell'$ alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n) est $\{\ell, \ell'\}$ tandis que si $\ell = \ell'$, c'est $\{\ell\}$.

Indication : Étant donnée une sous suite convergente $(u_{\varphi(n)})$, on pourra utiliser la question 1 pour montrer qu'elle tend soit vers ℓ soit vers ℓ' .

3. Montrer qu'en revanche, pour les sous-suites (u_{3n}) et (u_{3n+1}) , ce résultat n'est pas toujours vrai.

Indication : On pourra par exemple s'intéresser à la suite $(\cos(\frac{2}{3}(n+1)\pi))_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Supposons qu'il existe deux sous-suites convergentes $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, de limites respectives ℓ et ℓ' , telles que $\{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Montrer qu'alors, l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n) est $\{\ell, \ell'\}$ (ou $\{\ell\}$ si $\ell = \ell'$).

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe k sous-suites convergentes $(u_{\varphi_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{\varphi_2(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, $\dots$, $(u_{\varphi_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, de limites respectives $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$.

Supposons que $\bigcup_{i \in \llbracket 1; k \rrbracket} \{\varphi_i(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$.

Montrer que dans ce cas, l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n) est $\{\ell_i \mid i \in \llbracket 1; k \rrbracket\}$.

À titre d'exemple, on définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \begin{cases} 4 + \frac{1}{n+1} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} : n = 3k \\ (-1)^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Déterminer l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.
7. En déduire sa limite inférieure et sa limite supérieure.

Exercice 29 : Convergence

Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}$$

Montrer que (u_n) converge.

Exercice 30 : Suites équivalentes (définition)

(en CM)

On s'intéresse dans cet exercice à la notion de suites équivalentes. En notant « $u_n \sim v_n$ » lorsque les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes, on aimerait que :

A) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x \right) \Leftrightarrow (u_n \sim x) \right)$.

Remarque : dans la partie droite de l'équivalence, on a désigné par x la suite constante qui prend la valeur x .

B) Étant données quatre suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
Si $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$, alors $(u_n v_n) \sim (x_n y_n)$

C) et que cela définisse « une relation d'équivalence » c'est à dire qu'elle soit

i) Reflexive : pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $u_n \sim u_n$.

ii) Symétrique : pour toutes suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telles que $u_n \sim v_n$, on a $v_n \sim u_n$

iii) Transitive : pour trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$

1. On considère par exemple les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ b_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

(a) Justifier qu'au vu des propriétés A) à C), on voudrait avoir $a_n \sim b_n$.

(b) Peut-on définir des suites $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n/a_n)_{n \in \mathbb{N}}$? L'affirmation « $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ » aurait-elle le moindre sens?

(c) En déduire que si on définissait « $u_n \sim v_n$ » par la condition « $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ », alors ça ne fournit pas une définition satisfaisante.

En cours, on a donc donné la définition 1.2.9, et on a démontré qu'elle satisfait bien les conditions B) et C). C'est cette définition qu'on utilise dans la suite de l'exercice.

2. Démontrer qu'on a alors la propriété A).

3. (a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors $u_n \sim v_n$.

(b) Montrer que la réciproque est fautive : trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que « $u_n \sim v_n$ » mais telles que l'on n'ait pas « $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ ».

Exercice 31 : Théorème des gendarmes

(en CM)

1. Soient (x_n) , (y_n) et (z_n) trois suites réelles telles que
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n \leq z_n \end{cases}$$

On cherche à démontrer que dans ce cas on a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$ (c'est à dire qu'on démontre le théorème de gendarmes).

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |y_n - 1| \leq |x_n - 1| + |z_n - 1|$.

(b) En déduire qu'on a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$.

2. On considère désormais un résultat analogue avec des équivalents à la place de limites :

Soient (a_n) , (b_n) , (u_n) et (v_n) quatre suites réelles telles que
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_n \leq b_n \\ a_n \sim v_n \\ b_n \sim v_n \end{cases}$$

Montrer que $u_n \sim v_n$.

Exercice 32 : Ensembles dénombrables

(en CM)

Pour chacun des ensembles ci-dessous indiquez s'il est fini, s'il est dénombrable, ou s'il est indénombrable :

- | | | | |
|------------------------------------|--------------------|--|------------------------------|
| i) $\mathbb{R}$ | ii) $\mathbb{Q}$ | iii) $[2; 3]$ | iv) $]3; 4[\cup \mathbb{Z}$ |
| v) $\{x^3 \mid x \in \mathbb{Q}\}$ | vi) $\mathbb{N}^3$ | vii) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 2026\}$ | |

Exercice 33 : Suites adjacentes

corrigé en ligne

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a \leq b$. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites réelles définies par :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies, et qu'elles sont adjacentes (donc qu'elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$).

2. Montrer que la moyenne géométrique $(\sqrt{u_n v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

3. En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 34 : Croissance comparée

corrigé en ligne

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle pour laquelle il existe $k \in [0, 1[$, et un rang N tels que pour tout $m \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$, on ait $|u_{m+1}| \leq k|u_m|$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. En fonction des valeurs de a et b , déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^a \times b^n$.

Exercice 35 : Approximation décimale

corrigé en ligne

On rappelle que les premières décimales de $\sqrt{2}$ sont : $\sqrt{2} \simeq 1,4142135 \dots$.
On définit la suite réelle (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 10^{-n} E\left(10^n \sqrt{2}\right)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x (parfois aussi notée $E(x)$).

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 . Que constatez-vous ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \sqrt{2} - u_n \leq 10^{-n}$.
5. En déduire que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 36 : Limite supérieure d'une puissance

corrigé en ligne

Soit (u_n) une suite à valeurs positives, et soit $\alpha > 0$.

1. Montrer que $\limsup (u_n^\alpha) \geq (\limsup u_n)^\alpha$. *Indication : on pourra par exemple utiliser que la limite supérieure de (u_n) est la plus grande de ses valeurs d'adhérence.*
2. Montrer que $\limsup (u_n^\alpha) \leq (\limsup u_n)^\alpha$, et conclure que $\limsup (u_n^\alpha) = (\limsup u_n)^\alpha$.
3. De même, peut-on montrer que pour toute suite (u_n) à valeurs positives, on a « $\limsup \sin(u_n) = \sin(\limsup u_n)$ » ?

Exercice 37 : Suite convergente

corrigé en ligne

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

2. Dédurre que (u_n) est une suite décroissante et minorée. En déduire qu'elle converge.
3. Retrouver qu' (u_n) converge en montrant qu'elle est de Cauchy. (Indication : si $1 \leq p \leq q$, $0 \leq u_q - u_p \leq 1/p$ pour tout $p \geq 1$).

C) Exemples à ne pas suivre**Exercice 38 : Exemples de limites**

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes

$$\text{i) } \frac{-2n+4}{5n^2+12} \quad \text{ii) } \frac{\exp(n^2+1)}{\exp(n^2)} \quad \text{iii) } (-1)^n \exp\left(2 - \frac{3}{n}\right)$$

Sa réponse est ci-dessous :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n+4}{5n^2+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-2+4/n)}{n^2(5+12/n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{-2+4/n}{5+12/n^2} = +\infty \times \frac{-2}{5} = -\infty \\ 2. \quad & n^2 + 1 \sim n^2, \text{ donc } \exp(n^2 + 1) \sim \exp(n^2) \text{ donc } \frac{\exp(n^2+1)}{\exp(n^2)} \text{ tends vers } 1. \\ 3. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \exp\left(2 - \frac{3}{n}\right) = (-1)^n \exp\left(\lim\left(2 - \frac{3}{n}\right)\right) = \begin{cases} e^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -e^2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante ? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes ?

Exercice 39 : Suites équivalentes

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un nombre de $\mathbb{R}^*$. Par abus de notation, la suite constante $(\ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi notée ℓ . Montrer que les deux affirmations « $u_n \sim \ell$ » et « $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ » sont équivalentes entre elles.
2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites équivalentes. Montrer qu'il existe un rang à partir duquel les suites (u_n) et (v_n) s'annulent aux mêmes moments (c'est à dire $\exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p : (u_n = 0 \Leftrightarrow v_n = 0)$).
3. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = n^3 \sin(n\frac{\pi}{3}) + \frac{4}{n+1} \\ v_n = n^3 \sin(n\frac{\pi}{3}) \end{cases}$ sont elles équivalentes ?

Sa réponse est ci-dessous :

1. La définition des suites équivalentes est $(u_n \sim \ell) \Leftrightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\ell} = 1)$, qui est équivalent à $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$.
2. S'il y a des moments où $u_n = 0 \neq v_n$ alors on a $\frac{u_n}{v_n} = 0$ qui ne peut pas tendre vers 1 (contradiction).
De même, s'il y a des moments où $v_n = 0 \neq u_n$ alors on a $\frac{u_n}{v_n} = \infty$ qui ne peut pas tendre vers 1 (contradiction).
Donc les deux suites s'annulent en fait au mêmes moments.
3. Oui, elles sont équivalentes, comme on le voit en calculant leur rapport :
$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^3 \sin(n\frac{\pi}{3}) + \frac{4}{n+1}}{n^3 \sin(n\frac{\pi}{3})} = 1 + \frac{4/(n^3 \sin(n\frac{\pi}{3}))}{n+1},$$
 et ça tends vers 1 parce que $\frac{4/(n^3 \sin(n\frac{\pi}{3}))}{n+1}$ tend vers 0 (on le voit en notant que $|\sin(n\frac{\pi}{3})| \leq 1$, donc $|\frac{4/(n^3 \sin(n\frac{\pi}{3}))}{n+1}| \leq \frac{4}{n^3(n+1)}$ qui tends vers 0).

- i) Montrer que la réponse de l'étudiant·e à la première et à la troisième question sont fausses. Quant à elle, la réponse à la deuxième question répond-elle un tant soit peu aux exigences de rigueur d'une rédaction mathématique ?
- ii) Répondez au même énoncé auquel l'étudiant·e a répondu, mais en écrivant une réponse correcte avec une rédaction rigoureuse.

Exercice 40 : Preuve que $\frac{1}{2} = 0$

(en CM)

On considère le raisonnement ci-dessous, qui semble prouver que $\frac{1}{2} = 0$:

Soit $\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$.

- D'une part** • On sait que $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, et que $x - \frac{\pi}{2}$ tends vers $+\infty$ quand x tends vers $+\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) = \ell$.
- De plus $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, or $\cos^2(x) + \sin^2(x)$ tends vers $2\ell^2$ donc $2\ell^2 = 1$.
 - Donc $\ell^2 = \frac{1}{2}$.
- D'autre part** • On sait que $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, et que $x + \pi$ tends vers $+\infty$ quand x tends vers $+\infty$. Donc $\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x + \pi) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\cos(x) = -\ell$.
- Comme $\ell = -\ell$, on déduit que $\ell = 0$, donc $\ell^2 = 0$.

Conclusion On a $\ell^2 = \frac{1}{2}$ et $\ell^2 = 0$, donc $0 = \frac{1}{2}$.

1. Cette « preuve que $\frac{1}{2} = 0$ » commence par sous-entendre une hypothèse qui n'est ni écrite explicitement, ni justifiée. Quelle est cette hypothèse ?
2. Démontrer que cette hypothèse (qui était sous-entendue au début de la preuve) est fausse.
Vous pourrez pour cela réécrire la même argumentation sous forme d'une preuve par l'absurde.

Exercice 41 : Sous suites des termes pairs et impairs

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

- i) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On désigne par A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite extraite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, et par B l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite extraite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
Montrer que $A \cup B$ est l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (u_n) .
- ii) Déterminer les limites supérieures et inférieures pour les suites :

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1+(-1)^p}{p}\right)^p & \text{si } n = 2p \\ \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

Sa réponse est ci-dessous :

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

corrigé en ligne

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

Chapitre 2: séries réelles et complexes**A) Exercices classiques ou application du cours****Exercice 43 : Sommes de séries**

Pour chacune des suites (u_n) ci dessous, calculez les sommes partielles de la série $\sum u_n$, en déduire la nature de la série $\sum u_n$, et si elle converge calculer sa somme

- i) $(\tan(n\frac{\pi}{7}) - \tan((n+1)\frac{\pi}{7}))_{n \in \mathbb{N}}$ ii) $(\ln(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}))_{n \in \mathbb{N}^*}$
- iii) $(\frac{\exp((n+1)^3 + (n-1)^3)}{\exp(2n^3)})_{n \in \mathbb{N}}$ iv) $(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4})_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 44 : Nature de séries

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, déterminer si la série $\sum u_n$ converge, et si elle converge absolument.

- i) $(n^{-1-2/n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ii) $(\frac{x^n}{n^x} + 0^{|n-2026|})_{n \in \mathbb{N}^*}$ iii) $(\frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$
- iv) $(\frac{1}{1+x^n})_{n \in \mathbb{N}}$ v) $(n^2 x^{\sqrt{n}})_{n \geq 1}$ vi) $(\frac{n!}{x^n})_{n \in \mathbb{N}}$
- vii) $(\frac{1}{\ln n!})_{n \geq 2}$ viii) $((1 + \frac{x}{n})^{-n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ix) $((3 + (-1)^n)^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$
- x) $((1 + 3(-1)^n)^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ xi) $((-\frac{\sin^2 n}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ xii) $((-1)^n \arctan \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$
- xiii) $(\frac{(-1)^n}{n^x + (-1)^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice 45 : Règle de Cauchy

(en CM)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la série de Riemann d'exposant d'alpha, c'est à dire la série $\sum u_n$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n^\alpha})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Calculer $b = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$.

En déduire que dans la règle de Cauchy, lorsque $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, il peut arriver que la série converge, ou qu'elle diverge.

Exercice 46 : Sommes de séries

corrigé en ligne

Déterminer la nature de la la série $\sum u_n$, pour chacune des suites (u_n) ci dessous. Si la série converge, indiquez sa somme, sinon calculez ses sommes partielles.

- i) $(-2 \times \frac{\pi^3 n}{3^{2n}})_{n \in \mathbb{N}}$ ii) $(\frac{2n^3 + 6n^2 + n - 2}{(n+2)(n+1)n})_{n \in \mathbb{N}^*}$
- iii) $(\sinh(8n))_{n \in \mathbb{N}}$ iv) $(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5})_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 47 : Nature de séries

corrigé en ligne

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, déterminer si la série $\sum u_n$ converge, et si elle converge absolument.

- i) $(x^{\ln n})_{n \geq 1}$
- ii) $\left(\frac{x^n+1}{x^{2n}+n}\right)_{n \geq 0}$
- iii) $\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
- iv) $(e^{\cos(1/n)} - e^{\cos(2/n)})_{n \geq 1}$
- v) $(\tanh(n+x) - \tanh(n))_{n \in \mathbb{N}}$
- vi) $(1 - \cos \frac{1}{n})_{n \geq 1}$
- vii) $\left((1 - e^{1/n^2})\sqrt{\ln n}\right)_{n \geq 1}$
- viii) $\left((-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left((1 - e^{1/n^2})\sqrt{\ln n}\right)\right)_{n \geq 1}$
- ix) $\left(\frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{4})x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}\right)_{n \geq 1}$
- x) $(\sin((n + \frac{x}{n})\pi))_{n \geq 1}$
- xi) $\left(\frac{(-1)^n}{n + 2 \sin n}\right)_{n \geq 1}$
- xii) $((-1)^n (\sqrt{n^2+1} - n))_{n \geq 0}$

Exercice 48 : Disjonction de cas

corrigé en ligne

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{x^n+1}{x^{2n}+n}$.

B) Autres démonstrations**Exercice 49 : Premiers termes d'une série**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe et $m \in \mathbb{N}$. On désigne par (v_n) la suite $(u_n)_{n \geq m}$.

- Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.
- Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite réelle (ou complexe) telle que $\forall n \in \llbracket m; +\infty \rrbracket, u_n = w_n$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ ont la même nature.

Exercice 50 : Exemple de convergence absolue

Soit $\sum u_n$ une série réelle absolument convergente. Montrer que, pour toute puissance $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum u_n^p$ est convergente.

Exercice 51 : Critère d'Abel

Étant données deux suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on considère la série $\sum a_n b_n$:

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{i=0}^n a_i b_i = \sum_{k=0}^n \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{i=0}^k b_i \right) + a_{n+1} \sum_{k=0}^n b_k.$$

- Démontrons maintenant le critère d'Abel : on suppose que (a_n) est décroissante et tend vers zéro, et que les sommes partielles de la série $\sum b_n$ sont bornées, et on cherche à montrer qu'alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

- Exprimer mathématiquement (avec des quantificateurs) la condition selon laquelle « les sommes partielles de la série $\sum b_n$ sont bornées ».

- En déduire une majoration de la suite $\left(\sum_{k=0}^n \left| (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=0}^k b_i \right| \right)_{n \geq 0}$. En déduire

que le terme $\sum_{k=0}^n \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{i=0}^k b_i \right)$ admet une limite quand $n \rightarrow \infty$.

- De même, majorer la suite $\left(a_{n+1} \sum_{k=0}^n b_k \right)_{n \geq 0}$ et montrer qu'elle tend vers 0.

- En déduire la convergence de la série $\sum a_n b_n$.

- Déduire la nature de la série $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 52 : Suite complexe

(en CM)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe, et $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle qui tend vers 0.

Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Exercice 53 : Suites adjacentes

(en CM)

Soit $\alpha > 1$.

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} > \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}$.

2. On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = \sum_{k=1}^n (k^{-\alpha}) \\ b_n = a_n + \frac{1/(\alpha-1)}{n^{\alpha-1}} \end{cases}$$

(a) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

(b) En déduire la nature de la suite (a_n) et donner un encadrement de sa limite.
(c'est à dire, trouvez deux nombres x et y tels que $x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq y$)

Exercice 54 : Somme de deux séries

corrigé en ligne

Étant données deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on considère leur somme $\sum(u_n + v_n)$:

- Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge.
- Montrer que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.
- Que peut-on dire lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent ?

Exercice 55 : Domination du terme général d'une série.

corrigé en ligne

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\sum u_n$ converge.

Soit (v_n) une suite complexe "dominée" par (u_n) , c'est à dire qu'il existe une suite bornée ω_n , et un rang $N_1 \in \mathbb{N}$, tels que $\forall n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket, v_n = \omega_n u_n$ (on note cette affirmation sous la forme « $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ »).

Montrer qu'alors, $\sum v_n$ converge absolument.

Exercice 56 : Équivalence du terme général

corrigé en ligne

Soient (u_n) une suite réelle positive et (v_n) une suite complexe telle que $v_n \sim u_n$. Montrez que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

(Indication : pour se ramener aux hypothèses de la proposition 2.3.4, on pourra montrer que $\operatorname{Re}(v_n) \sim u_n$, et que $\operatorname{Re}(v_n)$ est positive à partir d'un certain rang.)

Exercice 57 : Bijection de $\mathbb{N}^*$

corrigé en ligne

Soit ϕ une bijection de $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$.

1. Donner un exemple d'une telle application (différente de l'identité).

2. Soit (u_n) la suite $\left(\frac{\phi(n)}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On considère la série $\sum u_n$:

Soit $(S_n)_{n \geq 1} = \left(\sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \geq 1}$ la suite de ses sommes partielles. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a la minoration

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4}$$

3. En déduire que la série diverge vers $+\infty$.

C) Exemples à ne pas suivre**Exercice 58 : Nature de séries**

Un-e étudiant-e a répondu à l'énoncé suivant :

Pour chacune des suites (u_n) ci dessous, déterminer la nature de la série $\sum u_n$:

- $((-1)^n n^{3/2})_{n \geq 0}$
- $((1 - \frac{1}{n})^n)_{n \geq 0}$
- $\left(\frac{(-1)^{E(\frac{2n}{3})}}{n}\right)_{n \geq 1}$

Sa réponse est ci-dessous :

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n^{3/2}}{(n+1)^{3/2}}\right) = -\frac{1}{(1+1/n^{3/2})^{3/2}} = -1 < 1$ donc $\sum u_n$ converge.

ii) $\sqrt[n]{u_n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$, donc $\sum u_n$ converge.

iii) La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc par le critère des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^{E(\frac{2n}{3})}}{n}$ converge.

- Quels théorèmes du cours cet-e étudiant-a-t-il/elle utilisé pour répondre aux différentes questions ? Ces théorèmes ont-ils des hypothèses qu'il fallait vérifier, l'étudiant-e a-t-il/elle appliqué correctement ces théorèmes ?
- Voyez-vous d'autres graves erreurs dans ce qu'écrit l'étudiant-e ?
- Répondez au même énoncé auquel l'étudiant-e a répondu, mais en écrivant une réponse correcte avec une rédaction rigoureuse.

Exercice 59 : Suites adjacentes

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

On pose $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

2. En déduire que e est irrationnel. (Si $e = a/q$, appliquer cette inégalité avec $n = q$).

Sa réponse est ci-dessous :

1. On pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$.

(u_n) est croissante (de u_n à u_{n+1} on ajoute un terme positif), et (v_n) est décroissante car

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$$

Donc u_n et v_n sont adjacentes, or leur limite est e donc $u_n < e < v_n$.

2. Par l'absurde : on suppose que $e = a/q$ et on a $\sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{a}{q} < \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{1}{q \cdot q!}$, c'est absurde, donc $e \notin \mathbb{Q}$.

- 1) Dans la première question, l'argumentation montre-t-elle bien que les suites soient adjacentes? L'adjacence des suites permet-elle bien de conclure que $u_n < e < v_n$? Est-ce que dans la rédaction de l'étudiant·e, d'autres points posent problème?
- 2) Dans la deuxième question, la copie montre-t-elle que l'étudiant a compris comment démontrer que e est irrationnel, ou bien qu'il a juste compris ce qu'il faut démontrer? Pensez-vous qu'un·e correcteur·ice accorderait beaucoup de points à sa réponse?
- 3) Répondez au même énoncé auquel l'étudiant·e a répondu, mais en écrivant une réponse correcte avec une rédaction rigoureuse.

Exercice 60 : Transformations d'une série

(en CM)

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Soit (u_n) une suite de réels positifs. Comparer la nature des trois séries ci dessous :

$$\sum u_n \qquad \sum \frac{u_n}{1+u_n} \qquad \sum \frac{u_n}{1-u_n}$$

Sa réponse est ci-dessous :

Si $\lim u_n = 0$, alors $\lim \frac{u_n}{1+u_n} = 0$ et $\lim \frac{u_n}{1-u_n} = 0$ donc si la première série converge, les deux autres aussi.

Enfin, si on note $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \frac{u_n}{1-u_n}$, on note que $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$ et que $u_n = \frac{w_n}{1+w_n}$, de sorte que d'après la question précédente si $\sum v_n$ converge ou $\sum w_n$ converge alors u_n converge aussi.

Donc ces trois séries ont la même nature.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

Exercice 61 : Somme de séries

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, calculer les sommes partielles de la série $\sum u_n$, et en déduire la nature de $\sum u_n$:

i) $((\sin \frac{\pi}{2})^n)_{n \geq 0}$ ii) $((-1)^n \frac{E(\frac{n}{2})+1}{E(\frac{n}{2})})_{n \geq 2}$

Sa réponse est ci-dessous :

i) $\sum_{i=0}^n (\sin \frac{\pi}{2})^n = \frac{1 - (\sin \frac{\pi}{2})^{n+1}}{1 - \sin \frac{\pi}{2}}$ qui tend vers $\frac{1}{1 - \sin \frac{\pi}{2}}$ (car $\sin \frac{\pi}{2} \leq 1$, donc $\lim (\sin \frac{\pi}{2})^{n+1} = 0$). Donc la série converge.

ii) $\sum_{i=2}^{2n+1} u_i = \sum_{k=1}^n (u_{2k} + u_{2k+1}) = \sum_{k=1}^n (\frac{k+1}{k} - \frac{k+1}{k}) = 0$. Cela tend vers 0 donc la série converge.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

Exercice 62 : convergence et racine carrée

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

i) Soient x et y deux réels positifs. Montrer que $\sqrt{xy} \leq x + y$.

ii) Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Déduire de i) que la série de terme général $\sqrt{u_n}/n$ est convergente.

Sa réponse est ci-dessous :

i) Par exemple, si $x = 2$ et $y = 3$, alors $x + y = 5 > \sqrt{6}$.

ii) Donc $\sqrt{u_n}/n \leq u_n + \frac{1}{n^2}$. Or $\sum (u_n + \frac{1}{n^2})$ converge, donc $\sum \sqrt{u_n}/n$ converge.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

Chapitre 3: séries entières**A) Exercices classiques ou application du cours****Exercice 63 : Convergence d'une suite de fonction**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{n}{1+n(1+x)} \end{cases}$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 64 : Convergence simple, ou uniforme ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ne^{-n^2 x^2} \end{cases}$

La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$? Pour $a > 0$, la convergence est-elle uniforme sur $[a, +\infty[$?

Exercice 65 : Rayon de convergence

Soit $\alpha > 0$.

Pour chacune des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessous, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

- i) $a_n = 2^n(n+1)$ ii) $a_n = i^n/(n+1)$ iii) $a_n = \frac{1/\pi^n}{(n+1)^\alpha}$
- iv) $a_n = \frac{n+3}{n!}$ v) $a_n = \frac{\alpha^{n!}}{n^2+4}$

Exercice 66 : Bords du disque de convergence

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières $\sum a_n z^n$ ci-dessous (où (a_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}$), ainsi que l'ensemble A des $w \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série $\sum a_n w^n$ converge absolument et l'ensemble C des $w \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série $\sum a_n w^n$ converge.

(Pour le i), on pourra utiliser le « critère d'Abel » énoncé (et démontré) en question 2 de l'exercice 51.)

- i) $\sum (-1)^n \frac{z^n}{\ln(n+2)}$ ii) $\sum E(\sqrt{2n+1}) z^n$ iii) $\sum n! z^n$
- iv) $\sum n! z^{n^2}$ v) $\sum \left(\sin \frac{n\pi}{3}\right)^n z^n$

Exercice 67 : Développement en série entière

Donner le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions f définies ci-dessous et préciser le rayon de convergence.

- i) $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$ ii) $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$

Exercice 68 : Sommes de séries entières

Pour les séries entières ci-dessous (où le premier terme est $n=0$), trouver le rayon de convergence R , calculer la somme $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$ et étudier ce qu'il se passe si $x = \pm R$:

- i) $\sum \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ ii) $\sum \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ iii) $\sum \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}$

Exercice 69 : Dérivée d'une limite uniforme

(en CM)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+n^2 x^2} \end{cases}$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction f dérivable sur $[0,1]$.
2. Montrer que (f'_n) converge simplement vers une fonction g sur $[0,1]$.
3. Constater que $f' \neq g$.

Exercice 70 : Composée de limites

(en CM)

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{D}_f$, qui admet une limite $\ell \in \mathcal{D}_f$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)$.

Exercice 71 : Continuité uniforme

(en CM)

Montrer que $x \mapsto x^3$ est uniformément continue sur $[0,1]$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 72 : Notion de série entière

(en CM)

Pour chacune des sommes ci-dessous, indiquer si elle définit une série entière $\sum a_n z^n$. Si c'est le cas, indiquer la valeur des trois premiers coefficients a_0, a_1, a_2 .

- i) $\sum \frac{1}{n+1} z^n$
- ii) $\sum (n+3)/z^n$
- iii) $\sum \sqrt{\frac{1}{n+3}} z^{3n+1}$
- iv) $\sum \sqrt{z^{2n+5}}$

Exercice 73 : Convergence simple ou uniforme ?

corrigé en ligne

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(0) = 0$ et que pour $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$.

- Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On désigne ensuite par (g_n) la suite $(f - f_n)$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de g_n .
- En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
- Soit $a \in [0,1[$. En remarquant qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N, +\infty \llbracket, e^{-1/n} \geq a$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Exercice 74 : Bords du disque de convergence

corrigé en ligne

Pour chacune des séries entières $\sum a_n z^n$ ci dessous, déterminer d'une part son rayon de convergence. D'autre part, pour chaque point du bord du disque de convergence, déterminer s'il y a convergence absolue, et s'il y a convergence simple.

(En question v), on pourra utiliser le « critère d'Abel » énoncé (et démontré) en question 2 de l'exercice 51.)

- i) $\sum \sqrt{(n+2)!} z^n$
- ii) $\sum \left(-\frac{4n}{n+1}\right)^n z^n$
- iii) $\sum \frac{1}{n^2+2} z^{2n}$
- iv) $\sum \exp(-\exp(n)) z^n$
- v) $\sum \frac{z^{2n}}{n+3}$

Exercice 75 : Développement en série entière

corrigé en ligne

Donner le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions f définies ci-dessous et préciser le rayon de convergence.

- i) $f(x) = (2x+3)^{-2}$
- ii) $f(x) = \cos(x+1)$
- iii) $f(x) = \sqrt{2-x}$

Exercice 76 : Sommes de séries entières

corrigé en ligne

Pour les séries entières suivantes (où le premier terme est en $n=0$), trouver le rayon de convergence R , calculer la somme $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$ et étudier ce qu'il se passe si $x = \pm R$:

- i) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$
- ii) $\sum nx^n$
- iii) $\sum \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} x^n$

B) Autres démonstrations**Exercice 77 : Lemme d'Abel**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que $\forall w \in D(0, |z_0|)$, la série $\sum a_n w^n$ converge absolument.

Remarque : ce résultat est connu sous le nom de *Lemme d'Abel*. Il constitue une des étapes de la preuve du théorème 3.2.7 du cours. On vous demande donc de la démontrer sans utiliser le théorème 3.2.7 du cours.

Exercice 78 : Continuité uniforme

- Soit $f :]0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Montrer que la fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.
- En déduire que la fonction $f : \begin{cases}]0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x \end{cases}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.
- Soit $\varepsilon \in]0,1]$. Montrer que la $x \mapsto 1/x$ est uniformément continue sur $[\varepsilon,1]$.

Exercice 79 : Developpabilité en série entière

Soit la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 0 \\ x \mapsto \exp(-1/x^2) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

- Montrer que f est continue en 0.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \neq 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n(1/x) \exp(-1/x^2)$$

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et que sa dérivée $f^{(n)}$ satisfait $f^{(n)}(0) = 0$.
- Écrire le développement de Taylor-Young de f en 0, à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.
- Est-ce que f est développable en série entière en 0 ?

Exercice 80 : Résolution d'équation différentielle

Existe-t-il une série entière, de rayon de convergence $R > 0$, et dont la somme $x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (définie sur $D(0, R)$), satisfasse les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall x \in]-R, R[, y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

Si elle existe, indiquer son rayon de convergence et trouver une expression de la somme y de cette série entière.

Exercice 81 : Uniformité de la limite

(en CM)

On va montrer un analogue, pour la continuité uniforme, du théorème 3.1.9 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions définies sur I (à valeurs complexes ou réelles), qui sont toutes uniformément continues, et qui convergent uniformément vers une fonction f ; montrer qu'alors f est uniformément continue.

Exercice 82 : Développement de $(1+x)^\alpha$

(en CM)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On cherche dans cet exercice à développer en série entière la fonction

$$f : \begin{cases}]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (1+x)^\alpha \end{cases}.$$

1. Pourquoi l'ensemble de définition est-il $] -1; +\infty[$ et pas $\mathbb{R}$ tout entier ?
2. Montrer que f est dérivable sur $] -1; +\infty[$. Calculez sa dérivée et constatez que f satisfait les conditions suivantes :
$$\begin{cases} \forall x \in]-1, +\infty[, f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
3. On cherche dans cette question à trouver une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ satisfasse la condition
$$(C)_R : \begin{cases} \forall x \in]-R, R[, g'(x) = \frac{\alpha}{1+x} g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}.$$
 - (a) **Analyse** : Supposons qu'il existe une série entière qui satisfasse ces conditions. Dédurre de l'égalité $g'(x) = \frac{\alpha}{1+x} g(x)$ une relation de récurrence sur les coefficients a_n , et identifier ainsi tous les coefficients a_n .
 - (b) **Synthèse** : Réciproquement, montrer que les coefficients que vous avez obtenus définissent bien une série entière de rayon $R > 0$, qui satisfait la condition $(C)_R$.
4. Justifier que la fonction $\frac{g}{f}$ est bien définie sur $] -1, 1[$ et dérivable. Calculer sa dérivée. En déduire que f et g coïncident sur $] -1; 1[$.
5. Conclure : la fonction f est-elle développable en série entière ? Si c'est le cas, quel est son développement en série entière ?

Exercice 83 : Somme de sinus

corrigé en ligne

On souhaite étudier la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$.

1. On va commencer par montrer que la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0 :
 - (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\sin(1)| > 3\varepsilon$, et que $\arcsin \varepsilon \leq 2\varepsilon$.
On pose alors $\eta = \arcsin \varepsilon$.
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\sin n| \leq \varepsilon$. Montrer que $|\sin(n+1)| > \varepsilon$.
 - (c) En déduire que la suite $\sin(n)$ ne tends pas vers 0.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$, calculer sa somme lorsque $z \in D(0, R)$, et étudier ce qu'il se passe si $|z| = R$.

Exercice 84 : Fonction entière

corrigé en ligne

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$

a un rayon de convergence infini.

Exercice 85 : Développement en série entière

corrigé en ligne

On souhaite réaliser un développement en série entière de la fonction

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$$

en $z_0 = -4$. Pour cela, on pose

$$g : h \mapsto f(z_0 + h) \in \mathbb{C}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g , et le développement en série entière de g en 0. On précisera le domaine de convergence.
2. En déduire le développement voulu. Préciser le domaine de convergence.

Exercice 86 : Exponentielle complexe

corrigé en ligne

Soit $\exp$ l'exponentielle complexe. Montrer qu'on a les relations suivantes pour $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\overline{\exp z} &= \exp \bar{z} \\ \exp(z + w) &= \exp z \cdot \exp w \\ \exp(nz) &= (\exp z)^n \\ |\exp z| &= \exp(\operatorname{Re} z)\end{aligned}$$

où $\operatorname{Re} z$ est la partie réelle de z .

Exercice 87 : Identification d'une fonction via une équation différentielle

Soit la série entière

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1) \cdots 1}.$$

Trouver le rayon de convergence. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1) \cdots 1}$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

C) Exemples à ne pas suivre**Exercice 88 : Convergence uniforme**

Un-e étudiant-e a répondu à l'énoncé suivant :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{cases} [1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \exp(-nx). \end{cases}$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[1 ; +\infty[$.

Sa réponse est ci-dessous :

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour $x \in [1 ; +\infty[$, on pose $N = -\ln(\varepsilon)/x$. Alors pour $n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$, on a $n \geq -\ln(\varepsilon)/x$ donc $\exp(-nx) \leq \varepsilon$, donc $|f_n(x) - 0| \leq \varepsilon$.

On a donc montré que

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - 0| \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket, \forall x \in [1 ; +\infty[$, c'est à dire que

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[1 ; +\infty[$.

1. À la fin de sa réponse, l'étudiant-e résume ainsi ce qu'il a obtenu : « $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - 0| \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket, \forall x \in [1 ; +\infty[$ ».
- (a) Que penser de cette formulation ?
- (b) Comment écririez-vous les quantificateurs qui découlent de ce que l'étudiant-e a écrit avant cette conclusion ?
- (c) Le raisonnement montrait-il bien une convergence uniforme ou bien une convergence simple ?
2. Répondez au même énoncé auquel l'étudiant-e a répondu, mais en écrivant une réponse correcte avec une rédaction rigoureuse.

Exercice 89 : Convergence des coefficients

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Soit (a_n) une suite complexe convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. On suppose $\ell \neq 0$. Montrer que $R = 1$.
2. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $R \geq 1$. Peut-on dire mieux ?

Sa réponse est ci-dessous :

1. Par définition, $R = 1/\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Or $\lim a_n = \ell$ et $\lim a_{n+1} = \ell$ donc $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ell}{\ell} = 1$ donc $R = 1$.

2. $\lim a_n = 0$, donc $|a_{n+1}| < |a_n|$ donc $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, d'où $R > 1$. Ainsi, on peut être plus précis que l'énoncé, et indiquer que $R > 1$.

Par contre, on ne peut pas dire plus, car n'importe quelle valeur de $R > 1$ peut être obtenue ainsi, en prenant $a_n = \frac{1}{R^n}$.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante ? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes ?

Exercice 90 : Résolution d'équation différentielle

Un·e étudiant·e a répondu de la manière suivante à l'exercice 80 :

Exercice 80

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_n) x^n.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -a_n/(n+2)$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \\ a_{2k+1} = 0 \end{cases}$:

$$\begin{cases} a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{2k+2} = \frac{(-1)^{k+1}}{2(k+1)k!2^k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} \\ a_{2k+1} = 0 \end{cases}$$

Donc $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(x^2/2)^n}{n!}$, et l'on reconnaît le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \exp(-x^2/2)$, dont le rayon de convergence est infini.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante ? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes ?

Exercice 91 : Modification des coefficients

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\sum a_n^p z^n$ a pour rayon de convergence R^p .

Sa réponse est ci-dessous :

Comme $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/R$, on a $\lim \frac{a_{n+1}^p}{a_n^p} = 1/R^p$, donc le rayon de convergence de $\sum a_n^p z^n$ est R^p .

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante ? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes ?

Exercice 92 : Développement en série entière

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Sur $\mathbb{C}$, donner l'ensemble de définition et le développement en série entière de $z \mapsto \frac{1}{1+z+z^2}$ en 0. Préciser le domaine de convergence.

Sa réponse est ci-dessous :

Dès que $|z + z^2| < 1$, on a $\frac{1}{1+z+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z - z^2)^n$ (d'après le développement de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$).

Le domaine de convergence est le disque ouvert où $|z + z^2| < 1$.

On $|z| + |z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (car les racines du polynôme $x + x^2 - 1$ sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$).

Donc le domaine de convergence est le disque $D\left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?