

Exercices de Math3A

Corrigé des exercices supplémentaires (non traités en séance)

Rappels: Ensembles, fonctions et quantificateurs

A) Exercices classiques ou application du cours

Exercice 5 : Définitions

corrigé en ligne

Dans cet exercice, E désigne un sous ensemble de $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés ci-dessous, indiquer si elle traduit le fait que E soit majoré / minoré/ borné/ etc.

- | | |
|---|--|
| i) $\forall e \in E, \exists m \in \mathbb{R} : m \leq e$ | ii) $\exists e \in E : \forall m \in \mathbb{R}, m \leq e$ |
| iii) $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m \leq e$ | iv) $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m < e$ |
| v) $\forall m \in \mathbb{R}, \exists e \in E : m \leq e$ | vi) $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m \leq e $ |
| vii) $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m \geq e $ | viii) $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, m \geq e$ |
| ix) $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq e, \forall e \in E$ | |

- i) Cette propriété est satisfaite quel que soit E (par exemple en prenant $m = e$).
- ii) Cette propriété n'est jamais satisfaite. En effet, quel que soit e , le nombre $m = e + 1$ viole la condition « $m \leq e$ ».
- iii) Cela signifie que E est minoré (cet m est un minorant).
- iv) Cette propriété est équivalente à la propriété iii), donc elle signifie que E est minoré. En effet si iv) est satisfaite, alors le même m convient pour iii) (donc iv) $\Rightarrow$ iii)). De même si iii) est satisfaite, alors en désignant par m un nombre qui convient pour iii), le nombre $m - 1$ convient pour iv) (donc iii) $\Rightarrow$ iv)).
- v) Cela signifie que E n'est pas majoré (c'est la négation de $\exists m \in \mathbb{R} : \forall e \in E, e < m$).
- vi) Cette condition est satisfaite quel que soit E (par exemple, $m = -1$ convient).
- vii) Cela signifie que E est bornée. En effet pour chaque m tel que $\forall e \in E, m \geq |e|$, on a d'une part $\forall e \in E, m \geq e$ (car quel que soit e , on a $|e| \geq e$), qui indique que m est un majorant. Et d'autre part $\forall e \in E, -m \leq e$ (car quel que soit e , on a $|e| \geq -e$ d'où $m \geq -e$ c'est à dire $-m \leq e$), qui indique que $-m$ est un minorant.
- viii) Cela signifie que E est majoré (cet m est un majorant).
- ix) La condition ix) ne veut rien dire du tout, et il faut absolument s'abstenir d'écrire les choses de cette façon. En effet, telle qu'elle est écrite, on ne peut pas savoir si elle signifie qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que « $m \leq e, \forall e \in E$ » (ce qui est la condition iii), qui signifie que E est minoré) ou si elle signifie au contraire que « $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq e$ » est vraie pour tout $e \in E$ (ce qui est la condition i), qui est tout le temps satisfaite). On fera donc attention à mettre tous les quantificateurs au début des affirmations, pour ne pas écrire de condition ambiguës comme la condition ix).

Exercice 6 : Inclusions

corrigé en ligne

Soient A , B , et C trois ensembles.

1. Écrire avec des quantificateurs les affirmations $A \cap B \subset C$ et $A \cap B \not\subset C$.

Par exemple, on peut écrire $A \cap B \subset C$ sous la forme $\forall x \in A, (x \in B \Rightarrow x \in C)$, et écrire $A \cap B \not\subset C$ sous la forme $\exists x \in A : (x \in B \text{ et } x \notin C)$.

2. Écrire sous forme d'inclusion entre ensembles les affirmations $\forall x \in A, (x \in B \text{ ou } x \in C)$ et $\exists x \in A : (x \notin B \text{ et } x \notin C)$.

$\forall x \in A, (x \in B \text{ ou } x \in C)$ s'écrit sous la forme $A \subset B \cup C$ tandis que $\exists x \in A : (x \notin B \text{ et } x \notin C)$ s'écrit sous la forme $A \not\subset B \cup C$.

Exercice 7 : Bornes supérieures et inférieures

corrigé en ligne

Calculer, lorsqu'elle(s) existe(nt), la borne supérieure et la borne inférieure sur $\mathbb{R}$ des ensembles suivants. Préciser si elle(s) sont atteinte(s) sur l'ensemble.

i) $A =]-\pi; -\pi/4]$ ii) $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$ iii) $A = \{\tan x \mid x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\}$

iv) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right]$ v) $A = \{\exp(-n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

- i) Montrons que $\sup A = -\pi/4$ et $\inf A = -\pi$

- On a $\forall x \in A, x \geq -\pi$. De plus pour $\varepsilon > 0$, on peut poser $a = -\pi + \min(\varepsilon, 1)$ de sorte que $a \in A$ et que $a \leq -\pi + \varepsilon$. Donc $-\pi = \inf A$ (propriété 1.1.9 du cours).
- De même on a $\forall x \in A, x \leq -\pi/4$, et $-\pi/4 \in A$ donc c'est la borne inférieure (en effet quelque soit $\varepsilon > 0$, on peut poser $a = -\pi/4$ de sorte que $a \in A$ et que $a \geq -\pi/4 - \varepsilon$. Donc $-\pi/4 = \sup A$).

Ainsi, $\inf A = -\pi$ (qui n'est pas atteinte) et $\sup A = -\pi/4$ (qui est atteinte).

- ii) • $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \geq 0$ donc 0 est minorant de A . Montrons que c'est le plus petit : Quelque soit $x > 0$, il existe un rationnel $a \in \mathbb{Q} \cap]0, x[$ (par exemple $a = 1/(1 + E(\frac{1}{x}))$). Alors, le nombre $\min(a^2, 1)$ est plus petit que x et est dans A . On a donc montré que (lorsque $x > 0$), x n'est pas minorant. Donc $0 = \inf(A)$ (qui est atteinte).
- Montrons que A n'est pas majoré (ce qui indique que A n'admet pas de borne supérieure) :

Pour $M \in \mathbb{R}$ on pose $a = \begin{cases} 1 & \text{si } M < 1 \\ (E(M) + 1)^2 & \text{si } M \geq 1 \end{cases}$

Montrons que $a \in A$ et que $a > M$ (ce qui montre que M n'est pas un majorant) :

- Si $M < 1$, alors $a = 1 > M$ (et $a \in A$ car $1 = 1^2 \in A$).
- Si $M \geq 1$, alors $E(M) + 1 > M \geq 1$ donc $a = (E(M) + 1)^2 > E(M) + 1 > M$ (et $a \in A$ car $E(M) + 1 \in \mathbb{Q}$).

Ainsi, pour $M \in \mathbb{R}$ arbitraire, on a montré que M n'est pas un majorant. C'est donc que A n'est pas majoré.

- iii) • Montrons par double inclusion que $A = \mathbb{R}$: d'une part $A \subset \mathbb{R}$, d'autre part l'inclusion réciproque vient du fait que pour $y \in \mathbb{R}$, on a $y = \tan(\arctan x) \in A$.
- Donc A n'est ni majoré ni minoré, et n'admet ni borne supérieure, ni inférieure.
- iv) • Montrons (par double inclusion) que $A =]0; 1]$:

- Soit $x \in A$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$, d'où il découle que $x \in]0; 1]$ (car $\frac{1}{n+1} > 0$ et $\frac{1}{n} \leq 1$).
- Soit $x \in]0, 1]$: on pose $n = E(\frac{1}{x})$ et on a $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, d'où $x \in]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}] \subset A$.

- v) • donc $\inf A = 0$ (qui n'est pas atteinte) et $\sup A = 1$ (qui est atteinte).
- Tout d'abord $\max A = 1$ car $1 = \exp(0) \in A$ et car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exp(-n) \leq \exp(0) = 1$ (par croissance de l'exponentielle).
- Ensuite 0 est un minorant car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exp(-n) \geq 0$. Pour montrer que c'est la borne inférieure, montrons que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A : x \leq 0 + \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$,

si $\varepsilon \geq 1$ on pose $x = 1$ et on a $x \leq \varepsilon$ (et $x \in A$ car $x = \exp(0)$).

si $\varepsilon < 1$, on pose $n = 1 + E(-\ln \varepsilon) \in \mathbb{N}$, et $x = \exp(-n) \in A$. Comme $n > -\ln \varepsilon$ on a $\exp(-n) < \exp(\ln \varepsilon) = \varepsilon$.

Donc $\inf A = 0$ (qui n'est pas atteint).

B) Autres démonstrations

Exercice 10 : Complémentaire d'ensemble

corrigé en ligne

Soit Ω et E deux ensembles, et pour chaque $e \in E$, soit A_e un sous ensemble de Ω . On rappelle que $\bigcup_{e \in E} A_e = \{x \in \Omega \mid \exists e \in E : x \in A_e\}$ et que $\bigcap_{e \in E} A_e = \{x \in \Omega \mid \forall e \in E : x \in A_e\}$.

De plus, pour tout sous-ensemble A de Ω , on note $\overline{A} = \Omega \setminus A$ son complémentaire.

1. En utilisant cette notation avec des quantificateurs, démontrer que le complémentaire de $\bigcup_{e \in E} A_e$ est $\bigcap_{e \in E} \overline{A_e}$, et que le complémentaire de $\bigcap_{e \in E} A_e$ est $\bigcup_{e \in E} \overline{A_e}$.

- Le complémentaire de $\{x \in \Omega \mid \exists e \in E : x \in A_e\}$ est $\{x \in \Omega \mid \forall e \in E : x \in \overline{A_e}\}$ (car $\forall e \in E : x \in \overline{A_e}$ est la négation de $\exists e \in E : x \in A_e$). Quand on l'écrit avec des quantificateurs, cela signifie que le complémentaire de $\bigcup_{e \in E} A_e$ est $\bigcap_{e \in E} \overline{A_e}$.
- De même, le complémentaire de $\{x \in \Omega \mid \forall e \in E : x \in A_e\}$ est $\{x \in \Omega \mid \exists e \in E : x \in \overline{A_e}\}$. Quand on l'écrit avec des quantificateurs, cela signifie que le complémentaire de $\bigcap_{e \in E} A_e$ est $\bigcup_{e \in E} \overline{A_e}$.

2. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^2$, en déduire le complémentaire de $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \left(\bigcup_{y \in [x; +\infty[} \{(x, y)\} \right)$.

$$\overline{\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \bigcup_{y \in [x; +\infty[} \{(x, y)\}} = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{y \in [x; +\infty[} \{(x, y)\}} = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \bigcap_{y \in [x; +\infty[} \overline{\{(x, y)\}}$$

3. Donnez une expression plus lisible de $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \left(\bigcup_{y \in [x; +\infty[} \{(x, y)\} \right)$ afin de vérifier votre résultat de la question précédente.

$$\begin{aligned} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \left(\bigcup_{y \in [x; +\infty[} \{(x, y)\} \right) &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in [x; +\infty[: (a, b) = (x, y)\} \\ &\text{où } x \text{ est nécessairement égal à } a \text{ et } y \text{ à } b, \text{ donc} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in [a; +\infty[\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \bigcap_{y \in [x; +\infty[} \overline{\{(x, y)\}} &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [x; +\infty[, (a, b) \neq (x, y)\} \\ &\text{où la condition est automatiquement satisfaite quand } x \neq a, \\ &\text{donc seul } x = a \text{ fournit une contrainte et on a :} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall y \in [a; +\infty[, b \neq y\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \notin [a; +\infty[\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\} \end{aligned}$$

Cela confirme bien le résultat de la question précédente, car $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\}$ est bien le complémentaire de $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}$.

Exercice 11 : Sous-ensemble où une fonction est croissante

corrigé en ligne

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$.

Si A est un sous ensemble de A , on dit que « f est croissante sur A » si la restriction de f à A est croissante, c'est à dire si $\forall x \in A, \forall y \in A, (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.

1. Soient $a < b < c$ trois réels, et soit f une fonction réelle définie sur $[a, c]$.

Montrer que si f est croissante sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors elle est croissante sur $[a, c]$.

Il faut montrer que $\forall (x, y) \in [a, c]^2, (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.

Soient x et y dans $[a, c]$ tels que $x < y$. On procède par disjonction de cas :

- Si $y \leq b$ (donc $x \in [a, b]$ lui aussi), alors par croissance de f sur $[a, b]$, on a $f(x) \leq f(y)$.
- Si $y \geq b$ avec $x \leq b$, alors par croissance de f sur $[a, b]$ (resp $[b, c]$), on a $f(x) \leq f(b)$ (resp $f(b) \leq f(y)$). En combinant ces deux inégalités on a $f(x) \leq f(y)$.
- Si $x \geq b$ (donc $y \in [b, c]$ lui aussi), alors par croissance de f sur $[b, c]$, on a $f(x) \leq f(y)$.

On bien montré $\forall (x, y) \in [a, c]^2, (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, c'est à dire que f est croissante sur $[a, c]$.

2. Soient $a < b$ deux réels, et soit f une fonction réelle définie sur $[a, b]$.

Montrer que si une fonction f , définie sur $[a, b]$, est croissante sur $]a, b]$ et satisfait $\forall x \in]a, b], f(x) \geq f(a)$, alors elle est croissante sur $[a, b]$.

Il faut montrer que $\forall (x, y) \in [a, b]^2, (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.

Soient x et y dans $[a, b]$ tels que $x < y$. On procède par disjonction de cas :

- Si $x = a$, alors $y \in]a, b]$ donc $f(x) \leq f(y)$ (car $\forall y \in]a, b], f(y) \geq f(a)$).
- Si $x > a$, alors pas croissance de f sur $]a, b]$, on a bien $f(x) \leq f(y)$.

On bien montré $\forall (x, y) \in [a, b]^2, (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$, c'est à dire que f est croissante sur $[a, b]$.

Exercice 12 : Partie bornée de $\mathbb{R}$

corrigé en ligne

Soit E un partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Exprimer en terme de quantificateurs l'affirmation selon laquelle “ E n'est pas bornée”.
La partie E est bornée si et seulement si $\exists \rho > 0 : \forall x \in E, |x| \leq \rho$. La négation “ E n'est pas bornée” s'écrit donc $\forall \rho > 0 : \exists x \in E, |x| > \rho$.

2. En déduire que “ E n'est pas bornée” est équivalent à “ $1 \in \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E}]0; \frac{|x|}{\rho}[$ ”.

On réécrit la condition de la question précédente sous la forme $\forall \rho > 0 : \exists x \in E, 1 \in]0; \frac{|x|}{\rho}[$, ce qui revient à “ $1 \in \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E}]0; \frac{|x|}{\rho}[$ ”.

3. De même, montrer que “ E est bornée” est équivalent à “ $\{0\} = \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E} [-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}]$ ”.

On procède par double implication :

($\Leftarrow$) Si E n'est pas borné alors d'après la question précédente,

$1 \in \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E}]0; \frac{|x|}{\rho}[\subset \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E} [-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}]$, donc $\bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E} [-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}] \neq \{0\}$. Cela montre (par contraposée) que si $\{0\} = \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E} [-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}]$, alors E est bornée.

($\Rightarrow$) Réciproquement : supposons que E est bornée, et montrons par double implication que $\{0\} = \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E} [-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}]$:

($\subset$) 0 appartient à chaque $[-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}]$, donc $\{0\} \subset \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E} [-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}]$

($\supset$) E est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in E, |x| \leq M$.

Donc pour tout $\rho > 0$, on a $\left(\bigcup_{x \in E} [-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}] \right) \subset [-\frac{M}{\rho}; \frac{M}{\rho}]$, donc

$\left(\bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{x \in E} [-\frac{|x|}{\rho}; \frac{|x|}{\rho}] \right) \subset \left(\bigcap_{\rho > 0} [-\frac{M}{\rho}; \frac{M}{\rho}] \right) = \{0\}$.

C) Exemples à ne pas suivre

Exercice 14 : Complémentaire d'unions et d'intersections

corrigé en ligne

Un-e étudiant-e a répondu à l'énoncé suivant :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[= [n; +\infty[$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer de deux manières le complémentaire de $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[$, et vérifiez que vous obtenez deux fois la même réponse.

Sa réponse est ci-dessous :

1. Pour $t \in [n; +\infty[$, on pose
Alors, pour tout $y \leq x$, on a $t \in [y; +\infty[$.
On a donc bien montré que $\exists x \geq n : \forall y \leq x, t \in [y; +\infty[$
2. • Première méthode : Comme $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[= [n; +\infty[$, son complémentaire est
• Deuxième méthode : On prend le complémentaire de l'intersection :
Le complémentaire de $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[= [n; +\infty[$ est
 $\bigcup_{x < n} \bigcap_{y > x}] - \infty; y[$. Mais comme $\bigcap_{y > x}] - \infty; y[=] - \infty; x[$, son union sur $x < n$ donne bien $] - \infty; n[$, comme avec la première méthode.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

• Commentaires sur la réponse :

- En question 1, ce qui est écrit montre uniquement que $[n; +\infty[\subset \bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[$. Il manque l'inclusion réciproque.
- En question 2, pour la "deuxième méthode", la façon de prendre le complémentaire n'est pas du tout la bonne. Le complémentaire de $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[$ s'écrit $\bigcap_{x \geq n} \bigcup_{y \leq x}] - \infty; y[$, c'est à dire qu'on remplace intersection par union, union par intersection, et qu'on prend le complémentaire de $[y; +\infty[$ (qui est $] - \infty; y[$), comme justifié dans l'exercice 10.

• Ré-écriture des réponses :

1. On montre l'égalité par double inclusion :

($\subset$) Soit $t \in \bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[$. Alors il existe $x \geq n$ tel que $\forall y \leq x, t \in [y; +\infty[$.

Si on avait $t < n$ alors en prenant $y = \frac{t+n}{2}$ on aurait $t < y < n \leq x$ ce qui contredit le fait que $\forall y \leq x, t \in [y; +\infty[$.

Donc par l'absurde $t \geq n$, c'est à dire $t \in [n; +\infty[$.

($\supset$) Pour $t \in [n; +\infty[$, on pose $x = (t+n)/2$ (ce qui nous assure que $t \leq x \leq n$). Alors, pour tout $y \leq x$, on a $t \in [y; +\infty[$.

On a donc bien montré que $\exists x \geq n : \forall y \leq x, t \in [y; +\infty[$, c'est à dire $t \in \bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[$.

2. — Première méthode : Comme $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[= [n; +\infty[$, son complémentaire est $] - \infty; n[$.

— Deuxième méthode :

Le complémentaire de $\bigcup_{x \geq n} \bigcap_{y \leq x} [y; +\infty[$ est $\bigcap_{x \geq n} \bigcup_{y \leq x}] - \infty; y[$.

Mais $\bigcup_{y \leq x}] - \infty; y[$ est une union d'intervalles inclus les uns dans les autres, dont le plus grand est $] - \infty; x[$, d'où $\bigcup_{y \leq x}] - \infty; y[=] - \infty; x[$. Donc ce complémentaire est $\bigcap_{x \geq n}] - \infty; x[$.

Mais $\bigcap_{x \geq n}] - \infty; x[$ est une intersection d'intervalles inclus les uns dans les autres, dont le plus petit est $] - \infty; n[$. Donc $\bigcap_{x \geq n} \bigcup_{y \leq x}] - \infty; y[=] - \infty; n[$, et on obtient bien la même réponse qu'avec la première méthode.

Chapitre 1: suites réelles – limites

A) Exercices classiques ou application du cours

Exercice 22 : Exemples de limites

corrigé en ligne

Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ (et qu'on pourra noter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$).

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \ln \left(\frac{(3n+2)^2}{5n-\frac{2}{n}} \right) & \text{ii)} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{12}{n\pi}\right)} & \text{iii)} n^2 \tan\left(\frac{1}{n}\right) - n \\ \text{iv)} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(1+n)}{\ln(n)+1} & \text{v)} \frac{5^n - \pi^n + 7}{4^n} & \text{vi)} \frac{2n+1}{\sqrt{4n^4+2n+1}-2n^2} \end{array}$$

- i) • Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $\frac{(3n+2)^2}{5n-\frac{2}{n}} = \frac{n^2 \left(3+\frac{2}{n}\right)^2}{1-\frac{2}{n^2}}$ qui tends vers $+\infty$.
 • De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Donc $\ln \left(\frac{(3n+2)^2}{5n-\frac{2}{n}} \right)$ tends vers $+\infty$.

- ii) • Au voisinage de $x = 0$, $\sin(x) = 0 + x + o(x)$, donc $\sin(x) \sim x$.
 De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n\pi} = 0$, donc $\sin\left(\frac{12}{n\pi}\right) \sim \frac{12}{n\pi}$ qui tends vers 0 (en étant positif),
 donc $\frac{1}{\sin\left(\frac{12}{n\pi}\right)}$ tends vers $+\infty$
 • Quand n est multiple de 24, $\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) = 1$. Donc la sous suite u_{24n} tends vers $+\infty$.
 • Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n = 24k + 6$, on a $\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) = 0$. Donc tous les termes de la sous suite u_{24n+6} sont nuls, et cette sous-suite tends vers 0.
 • donc la suite $\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{12}{n\pi}\right)}$ n'admet pas de limite.

- iii) Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0, on commence par faire un développement limité pour une variable $x \rightarrow 0$ (qu'on remplacera ensuite par $\frac{1}{n}$) :

$$\text{Au voisinage de } x = 0, \text{ on a } \tan(x) = 0 + x + 0 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\text{donc } \frac{1}{x^2} \tan(x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x + o(x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{3}x + o(x).$$

$$\text{Donc } \frac{1}{x^2} \tan(x) - \frac{1}{x} \sim \frac{1}{3}x.$$

Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0, on en déduit (en remplaçant x par $\frac{1}{n}$),

$$\text{que } n^2 \tan\left(\frac{1}{n}\right) - n \sim \frac{1}{3n}.$$

Donc cette suite tends vers 0.

- iv) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que
 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(1+n) = \ln\left(\frac{1}{n}(n+1)\right) - \ln(1+n)$
 $= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(1+n) = -\ln(n),$
 donc $u_n = \frac{-\ln(n)}{\ln(n)+1} = \frac{-1}{1+\frac{1}{\ln(n)}}$, cette suite tends donc vers -1 .

- v) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $\frac{5^n - \pi^n + 7}{4^n} = \left(\frac{5}{4}\right)^n \left(1 - \left(\frac{\pi}{5}\right)^n + \frac{7}{5^n}\right)$.
 Or $\left(1 - \left(\frac{\pi}{5}\right)^n + \frac{7}{5^n}\right)$ tends vers 1, donc $u_n \sim \left(\frac{5}{4}\right)^n$. Donc $u_n \rightarrow +\infty$.

Remarque : on rappelle que x^n tend vers $+\infty$ si $x > 1$ (par exemple si $x = \frac{5}{4}$), et vers 0 si $|x| < 1$ (par exemple $x = \frac{\pi}{5}$).

- vi) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque (en multipliant le numérateur et le dénominateur par la "quantité conjuguée" du dénominateur) que
 $\frac{2n+1}{\sqrt{4n^4+2n+1}-2n^2} = \frac{\sqrt{4n^4+2n+1}+2n^2}{4n^4+2n+1-4n^4} (2n+1) = \sqrt{4n^4+2n+1} + 2n^2,$
 donc u_n tends vers $+\infty$

Exercice 23 : Suite définie par récurrence

corrigé en ligne

Étant donné $u_0 \in \mathbb{R}$, on considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Admet-elle une limite ? (si oui, quel est cette limite ?)

On a $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$, avec égalité ssi $x = 0$. On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| = |\sin(u_n)| \leq |u_n|$. La suite $|u_n|$ est donc décroissante, minorée par 0 donc convergente. Soit ℓ sa limite, on a $|u_{n+1}| = |\sin(u_n)| = |\sin(|u_n|)|$ donc par passage à la limite comme la fonction $x \rightarrow |\sin(x)|$ est continue, on a $|\sin(\ell)| = \ell$. Ceci implique $\ell = 0$.

La suite u_n converge donc vers 0.

Exercice 24 : Monotonie

corrigé en ligne

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}$$

est-elle monotone ? Est-elle convergente ? Si oui, quel est sa limite ?

- Monotonie : Notons tout d'abord que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$. On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n-1)!}} \frac{(1+\sqrt{1})\dots(1+\sqrt{n})}{(1+\sqrt{1})\dots(1+\sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n+1})} < 1$$

Donc u_n est décroissante.

- De plus elle est minorée par 0, donc elle converge.
- Enfin, on peut écrire u_n sous la forme $\frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}} \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \dots \frac{\sqrt{n-1}}{1+\sqrt{n-1}} \times \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, où tous les facteurs sont plus petits que 1. Donc $0 < u_n \leq \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ et (par théorème des gendarmes) $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 25 : Croissance comparée

corrigé en ligne

Pour α et $\beta \in \mathbb{R}$, on cherche à déterminer si la suite $\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right)_{n \geq 2}$ converge (et quelle est sa limite).

1. Lorsque α et β sont strictement positifs, étudier la fonction $f : \begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \end{cases}$.

En déduire que la suite $\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right)_{n \geq 2}$ est majorée.

Pour $x \in]1, +\infty[$, on a $f'(x) = \left(-\alpha + \frac{\beta}{\ln x}\right) \frac{(\ln x)^\beta}{x^{\alpha+1}}$, qui est positive quand $x < e^{\beta/\alpha}$ et négative quand $x > e^{\beta/\alpha}$. Cette fonction positive atteint donc un maximum en $e^{\beta/\alpha}$, où elle vaut $\left(\frac{\beta}{e\alpha}\right)^\beta$.

Donc la suite $\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right)_{n \geq 2}$ est majorée (par $\left(\frac{\beta}{e\alpha}\right)^\beta$).

2. En déduire que quand $\alpha > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$. *Indication : quand $\beta > 0$, on pourra décomposer $(\ln n)^\beta n^\alpha$ sous la forme $\frac{(\ln n)^\beta}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}}$.*

- Tout d'abord, si $\beta < 0$, alors $\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right)$ est le produit de deux suites qui tendent vers 0, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.

De même, si $\beta = 0$ le résultat est immédiat.

- Si au contraire $\beta > 0$, alors on utilise le résultat de la question précédente, qui est valide pour tout $\alpha > 0$. Il est donc aussi valide pour $\alpha/2$, donc la suite $\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^{\alpha/2}}\right)$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{(\ln n)^\beta}{n^{\alpha/2}}\right| \leq M$.

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right| \leq \frac{M}{n^{\alpha/2}}$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.

3. En déduire que quand $\alpha < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^\beta n^\alpha = +\infty$.

Quand $\alpha < 0$, on applique le résultat précédent à $-\alpha$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^{-\beta} n^{-\alpha} = 0$, ce qui donne immédiatement le résultat demandé.

B) Autres démonstrations**Exercice 33 : Suites adjacentes**

corrigé en ligne

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a \leq b$. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites réelles définies par :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies, et qu'elles sont adjacentes (donc qu'elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$).
2. Montrer que la moyenne géométrique $(\sqrt{u_n v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
3. En déduire la valeur de ℓ .

1. Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq v_n$.

- Au rang 0, on a $0 < a = u_0 \leq v_0 = b$.
- Soit $n \geq 1$ tel que $0 < u_n \leq v_n$. Alors u_{n+1} et v_{n+1} sont bien définis et strictement positifs (ils sont bien définis car il n'y a pas de division par 0 dans la relation de récurrence). De plus, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0, \end{aligned}$$

donc on a bien $0 < u_{n+1} \leq v_{n+1}$.

Et par récurrence cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$ et $u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \geq \frac{2}{\frac{2}{u_n}} = u_n$.

La suite u_n est donc croissante et majorée par v_0 et v_n est décroissante et minorée par u_0 . Elles convergent donc toutes deux, notons ℓ et ℓ' leurs limites.

En passant l'égalité $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ à la limite, on trouve $\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}$ et donc $\ell = \ell'$. Les suites u_n et v_n convergent donc vers la même limite. Elles sont donc adjacentes.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} v_{n+1} = \left(\frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \right) \left(\frac{u_n + v_n}{2} \right) = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \left(\frac{u_n + v_n}{2} \right) = u_n v_n$$

On a montré cela pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(\sqrt{u_n v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien constante.

3. La suite $(\sqrt{u_n v_n})$ est constante égale à son premier terme $\sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{ab}$ donc converge vers $\sqrt{ab}$. Or elle converge vers $\sqrt{\ell^2} = \ell$ (car $\lim u_n = \lim v_n = \ell \geq 0$). Donc $\ell = \sqrt{ab}$.

Exercice 34 : Croissance comparée

corrigé en ligne

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle pour laquelle il existe $k \in [0, 1[$, et un rang N tels que pour tout $m \in \llbracket N; +\infty \llbracket$, on ait $|u_{m+1}| \leq k|u_m|$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. En fonction des valeurs de a et b , déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^a \times b^n$.

1. Montrons par récurrence que $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket$, $|u_n| \leq k^{n-N}|u_N|$:

- Au rang N , on a $|u_N| \leq |u_N|$ (c'est l'initialisation).
- De plus si c'est vrai à un rang $n \in \llbracket N; +\infty \llbracket$, alors on a $|u_{n+1}| \leq k|u_n| \leq k^{n+1-N}|u_N|$ (c'est l'hérédité). Donc on a bien $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket$, $|u_n| \leq k^{n-N}|u_N|$.

Comme $0 \leq k < 1$ on a $|u_N| k^{n-N} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{(n+1)^a \times b^{n+1}}{n^a \times b^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a b$ qui tends vers b (car $\frac{n+1}{n}$ tend vers 1 et car $x \mapsto x^a$ est continue en $x = 1$, de sorte que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^a$ tends vers 1).

- Si $b < 1$, alors on pose $k = \frac{b+1}{2}$, donc $b < k < 1$, et comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tends vers $b < k$ il existe un rang à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, donc $u_n \rightarrow 0$.
- Si $b > 1$, on applique le même raisonnement à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$. On a montré que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tends vers $\frac{1}{b} < 1$, donc on conclue comme précédemment que $v_n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow +\infty$.
- si $b = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^a$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (car $a > 0$).

Remarque : on a ainsi démontré le résultat que vous connaissez sous le nom de “croissance comparée”.

Exercice 35 : Approximation décimale

corrigé en ligne

On rappelle que les premières décimales de $\sqrt{2}$ sont : $\sqrt{2} \simeq 1,4142135\dots$

On définit la suite réelle (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 10^{-n} E\left(10^n \sqrt{2}\right)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x (parfois aussi notée $E(x)$).

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 . Que constatez-vous ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \sqrt{2} - u_n \leq 10^{-n}$.
5. En déduire que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

1. $u_0 = E(\sqrt{2}) = 1, u_1 = 10^{-1} E(10\sqrt{2}) = 1,4, u_2 = 10^{-2} E(10^2 \sqrt{2}) = 1,41$ et $u_3 = 10^{-3} E(10^3 \sqrt{2}) = 1,414$. La suite u_n semble être croissante et converger vers $\sqrt{2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{E(10^n \sqrt{2})}{10^n} \in \mathbb{Q}$ car $E(10^n \sqrt{2}) \in \mathbb{Z}$ et $10^n \in \mathbb{Z}^*$.

3. Notons tout d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}, 10E(x) \leq E(10x)$. Cela découle du fait que $10E(x) \leq 10x$ et que $E(10x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $10x$.

Dès lors, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{E(10 \times 10^n \sqrt{2})}{10^{n+1}} \geq \frac{10E(10^n \sqrt{2})}{10^{n+1}} = u_n$, d'où le résultat.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E\left(10^n \sqrt{2}\right) \leq 10^n \sqrt{2} \leq E\left(10^n \sqrt{2}\right) + 1$$

d'où (en divisant par 10^n)

$$u_n \leq \sqrt{2} \leq u_n + \frac{1}{10^n}.$$

De plus l'inégalité $u_n \leq \sqrt{2}$ est en fait une inégalité stricte (car $u_n \in \mathbb{Q} \not\equiv \sqrt{2}$), d'où (en soustrayant u_n) $0 < \sqrt{2} - u_n \leq 10^{-n}$.

5. Il découle de cette inégalité que $\lim(\sqrt{2} - u_n) = 0$, c'est à dire que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Remarque : On peut remplacer $\sqrt{2}$ par n'importe quel nombre $x \in \mathbb{R}$: en posant $u_n = 10^{-n} E(10^n x)$, on obtient une suite de rationnels qui converge vers x .

Exercice 36 : Limite supérieure d'une puissance

corrigé en ligne

Soit (u_n) une suite à valeurs positives, et soit $\alpha > 0$.

1. Montrer que $\limsup(u_n^\alpha) \geq (\limsup u_n)^\alpha$. *Indication : on pourra par exemple utiliser que la limite supérieure de (u_n) est la plus grande de ses valeurs d'adhérence.*

$\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n) , donc il existe une sous suite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $\limsup u_n$.

Alors $(\limsup u_n)^\alpha = \lim(u_{\varphi(n)})^\alpha = \lim(u_{\varphi(n)}^\alpha)$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n^α) . Elle est donc plus petite que la plus grande valeur d'adhérence (de (u_n^α)), donc $(\limsup u_n)^\alpha \leq \limsup(u_n^\alpha)$.

2. Montrer que $\limsup(u_n^\alpha) \leq (\limsup u_n)^\alpha$, et conclure que $\limsup(u_n^\alpha) = (\limsup u_n)^\alpha$.

On a montré l'inégalité de la question précédente pour n'importe quelle suite positive (u_n) et n'importe quel nombre $\alpha > 0$. En particulier, elle est vraie pour la suite (u_n^α) et le nombre $1/\alpha$, et on obtient $\limsup\left((u_n^\alpha)^{1/\alpha}\right) \geq (\limsup u_n^\alpha)^{1/\alpha}$.

En combinant cette inégalité avec celle de la question précédente, on obtient l'égalité demandée.

3. De même, peut-on montrer que pour toute suite (u_n) à valeurs positives, on a « $\limsup \sin(u_n) = \sin(\limsup u_n)$ » ?

Non, cette propriété est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant :

$$\text{si } \forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{2k} = \pi \\ a_{2k+1} = \pi/2, \end{cases}$$

Alors $(\sin u_n)$ vaut alternativement 0 (termes pairs) et 1 (termes impairs) de sorte que $\limsup \sin(u_n) = 1 \neq 0 = \sin \pi = \sin(\limsup u_n)$.

Exercice 37 : Suite convergente

corrigé en ligne

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

2. Dédurre que (u_n) est une suite décroissante et minorée. En déduire qu'elle converge.
 3. Retrouver qu' (u_n) converge en montrant qu'elle est de Cauchy. (Indication : si $1 \leq p \leq q$, $0 \leq u_q - u_p \leq 1/p$ pour tout $p \geq 1$).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème des accroissements finis (pour la fonction $\ln$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[n; n+1]$) assure l'existence de $c \in [n; n+1]$ tel que $\ln(n+1) - \ln(n) = (n+1 - n) \ln'(c) = \frac{1}{c} \in [\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}]$.
 2. La question 1) nous donne (pour $n \in \mathbb{N}$)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$$

Donc u_n est décroissante. De plus, en sommant l'inégalité $-\ln(k) + \ln(k+1) \leq \frac{1}{k}$ pour k entre 1 et n , on trouve

$$1 + \dots + \frac{1}{n} \geq -\ln(1) + \ln(2) - \ln(2) + \ln(3) - \dots - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(n+1).$$

Donc $0 \leq 1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) = u_n - \ln(\frac{n+1}{n})$. Donc $u_n \geq \ln(\frac{n+1}{n}) \geq 0$, donc la suite (u_n) est minorée, et donc converge.

3. Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$. Quitte à les renommer, supposons $p \leq q$. Alors

$$\begin{aligned} 0 \leq u_p - u_q &= \ln(q) - \ln(p) - \sum_{k=p+1}^q \frac{1}{k} = \sum_{k=p+1}^q \left(\ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k} \right) \\ &\leq \sum_{k=p+1}^q \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Donc pour $\varepsilon > 0$, on prend $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, de sorte que pour p et $q \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$, on a $|u_p - u_q| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Cela montre que la suite est bien de Cauchy.

C) Exemples à ne pas suivre**Exercice 41 : Sous suites des termes pairs et impairs**

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

- i) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On désigne par A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite extraite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, et par B l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite extraite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
 Montrer que $A \cup B$ est l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (u_n) .
 ii) Déterminer les limites supérieures et inférieures pour les suites :

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1+(-1)^p}{p}\right)^p & \text{si } n = 2p \\ \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

Sa réponse est ci-dessous :

- i) $x \in A \Leftrightarrow \exists \varphi \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = x$
- $$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2\psi(n)} = x \text{ si } \varphi(n) = 2\psi(n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2\psi(n)+1} = x \text{ si } \varphi(n) = 2\psi(n)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{ou} \\ x \in B \end{cases}$$
- ii) • $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} + \frac{1}{n+1} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 + 0 = 1$. Donc $A = \{1\}$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} + \frac{1}{n+1} = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = -1 + 0 = -1$. Donc $B = \{-1\}$. Et donc $A \cup B = \{-1, 1\}$.
 • $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1+(-1)^p}{p}\right)^p = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} 1 + \frac{1+(-1)^p}{p}\right)^p = 1$
 et $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{p}\right)^p = 1$.
 Donc $A = \{1\}$ et $B = \{1\}$, et donc $A \cup B = \{1\}$.
 • Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $\{1\}$.
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = -1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$, et $\liminf_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

- Commentaires sur la réponse :

— La rédaction est beaucoup trop floue et même les affirmations ne sont pas assez précises pour avoir un sens mathématique :

- L'affirmation « $\exists \varphi$ tel que $\lim u_{\varphi(n)} = x$ » ne peut en aucune manière être équivalente à « $\left\{ \begin{array}{l} \lim u_{2\psi(n)} = x \text{ si } \varphi(n) = 2\psi(n) \\ \lim u_{2\psi(n)+1} = x \text{ si } \varphi(n) = 2\psi(n) + 1 \end{array} \right. \gg$ qui quant à elle contient φ sans quantificateur (ce n'est pas à l'examinateur de deviner si cette affirmation contenait un “ $\forall \varphi$ ” ou un “ $\exists \varphi$ ”). De même il faudrait préciser un quantificateur pour ψ (probablement que l'étudiant·e voulait dire $\exists \psi, \dots$).
- C'est beaucoup plus subtile, mais ça ne fait aucun sens d'écrire une condition portant sur “ n ” à côté de l'équation $\lim u_{\varphi(n)} = x$. En effet, dans l'égalité “ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = x$ ”, n est une variable muette, c'est à dire qu'on aurait aussi bien pu écrire “ $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{\varphi(k)} = x$ ” et que le résultat n'est pas une fonction de n (ni de k , ou quelqu'autre nom de variable). Il aurait donc fallu préciser qui est n dans la condition. Par exemple, peut-être que l'étudiant·e voulait dire que pour un certain φ , on avait « $\left\{ \begin{array}{l} \lim u_{2\psi(n)} = x \text{ si } \forall n, \varphi(n) = 2\psi(n) \\ \lim u_{2\psi(n)+1} = x \text{ si } \forall n, \varphi(n) = 2\psi(n) + 1 \end{array} \right. \gg$? (ce $\forall n$ fait que la variable est muette dans la condition aussi, puisque “ $\forall n, \varphi(n) = 2\psi(n) + 1$ ” revient au même que “ $\forall k, \varphi(k) = 2\psi(k) + 1$ ”).
- En question ii), l'affirmation « $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1+(-1)^p}{p}\right)^p = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} 1 + \frac{1+(-1)^p}{p}\right)^p \gg$ ne fait aucun sens : à gauche du signe égal, « $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1+(-1)^p}{p}\right)^p \gg$ est un nombre qui ne dépend pas de p (p est une variable muette), tandis qu'à droite du signe égal, on, a ℓ^p (en notant $\ell = \lim_{p \rightarrow \infty} 1 + \frac{1+(-1)^p}{p}$) qui est une fonction de p .
- En question (i)), si l'étudiant·e parlait en fait d'une disjonction de cas entre les cas « $\forall n, \varphi(n) = 2\psi(n)$ » et « $\forall n, \varphi(n) = 2\psi(n) + 1$ », alors il y a un problème de raisonnement : il n'y a aucune raison que les $\varphi(n)$ soient tous pairs ou tous impairs, certains pourraient être pairs et d'autres impairs.
- En question ii), on n'a pas le droit d'écrire $\lim \dots$ tant qu'on ne sait pas si la suite converge.
- Ré-écriture des réponses :
 - i) Montrons tout d'abord que les éléments de $A \cup B$ sont valeurs d'adhérences de (u_n) .
Soit $x \in A$, alors il existe une suite extraite $(u_{2\varphi(n)})$ de la suite (u_{2n}) qui tend vers x . Or $(u_{2\varphi(n)})$ est aussi une suite extraite de (u_n) (en posant $\tilde{\varphi}(n) = 2\varphi(n)$), donc x est une valeur d'adhérence de (u_n) . Pour $x \in B$ la preuve est la même (avec une suite extraite $(u_{2\varphi(n)+1})$).
 - Réciproquement montrons que les valeurs d'adhérence de (u_n) sont dans $A \cup B$:

Soit ℓ une valeur d'adhérence de (u_n) . Alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $\ell = \lim u_{\varphi(n)}$. On désigne par P et I les valeurs paires et impaires prises par la suite $\varphi(n) : P = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N} ; \exists k \in \mathbb{N} : \varphi(n) = 2k\}$, et $I = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N} ; \exists k \in \mathbb{N} : \varphi(n) = 2k + 1\}$. Comme $P \cup I$ est infini (c'est l'ensemble des valeurs de $\varphi(n)$), il y a au moins l'un des deux ensemble P et I qui est infini. Si c'est P (par exemple), on définit ψ qui numérote l'ensemble $P : P = \{\psi(0), \psi(1), \psi(2), \dots\}$ avec $\psi(0) < \psi(1) < \dots$. Alors $u_{\psi(n)}$ est une sous suite de $(u_{\varphi(n)})$ donc elle converge vers ℓ , mais c'est aussi une sous suite de (u_{2n}) , donc $\ell \in A$. De même si l'ensemble B avait été infini, on aurait eu une sous suite de (u_{2n+1}) , de sorte que $\ell \in B$. Dans tous les cas $\ell \in A \cup B$.

D'où le résultat.

- ii) On a $\lim(u_{2n}) = 1$ et $\lim(u_{2n+1}) = -1$. Donc (avec les notations de la question précédente), $A = \{1\}$ et $B = \{-1\}$. Les seules valeurs d'adhérences de (u_n) sont donc -1 et 1 . Or la limite supérieure (resp inférieure) est la plus grande (resp la plus petite) valeur d'adhérence de (u_n) , d'où

$$\liminf u_n = -1 \qquad \limsup u_n = 1$$

De plus, on a (pour tout $p \in \mathbb{N}$)

$$v_{2p+1} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p = \exp(p \ln(1 + \frac{1}{p})) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \exp(1). \text{ Enfin, (toujours pour } p \in \mathbb{N}),$$

posons $w_p = v_{2p}$. On a

$$\lim w_{2p} = \exp(2) \text{ car } w_{2p} = \left(1 + \frac{2}{2p}\right)^{2p} = \exp(2p \ln(1 + \frac{1}{p})) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \exp(2), \text{ et}$$

$$\lim w_{2p+1} = 1 \text{ car } w_{2p+1} = \left(1 + \frac{0}{2p+1}\right)^{2p+1} = 1. \text{ Donc les valeurs d'adhérence de } (v_{2n}) \text{ sont } 1 \text{ et } \exp(2). \text{ Avec les notations précédentes on a } A = \{1, \exp(2)\} \text{ et } B = \{\exp(1)\}, \text{ donc les valeurs d'adhérence de } (v_n) \text{ sont } 1, \exp(1) \text{ et } \exp(2).$$

Dès lors, la plus petite valeur d'adhérence est 1 et la plus grande est $\exp(2)$, d'où

$$\liminf v_n = 1 \qquad \limsup v_n = \exp(2)$$

Exercice 42 : Suites de Cauchy ?

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Écrire la négation de (u_n) est une suite de Cauchy. Montrer que les suites suivantes ne sont pas de Cauchy :

$$\text{i) } ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \text{ii) } \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Sa réponse est ci-dessous :

- L'affirmation « (u_n) est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

La négation est

$$p - u_q \geq \varepsilon.$$

- i) On pose

$$|u_{N-1} - u_{N-2}| = |(-1)^{N-1} - (-1)^{N-2}| = 2 \geq \varepsilon.$$

On a donc montré qu'il existe $\varepsilon > 0$ (en l'occurrence $\varepsilon = 1$) tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p, q < N$ (en l'occurrence $p = N-1$ et $q = N-2$) tel que $|u_p - u_q| \geq \varepsilon$, donc la suite (u_n) n'est

- ii) On pose $\frac{1}{2}$, et on remarque que pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$|v_{N-1} - v_1| = \sum_{p=2}^{N-1} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \geq \frac{1}{2}.$$

On a donc montré qu'il existe $\varepsilon > 0$ (en l'occurrence $\varepsilon = \frac{1}{2}$) tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p, q < N$ (en l'occurrence $p = N-1$ et $q = 1$) tel

$|v_p - v_q| \geq \varepsilon$, donc la suite (v_n) n'est

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

- Commentaires sur la réponse :

- La négation de « la suite est de Cauchy » est fautive : en faisant la négation, le « $\forall p, q \geq N$ » devient « $\exists p, q \geq N$ » (et pas $\exists p, q < N$ comme écrit par l'étudiant·e).
- Dans la suite de la réponse, l'étudiant·e montre donc une propriété qui n'est pas la bonne.
- La rédaction est soignée, mais encore un peu trop imprécise : pour que u_{N-1} et u_{N-2} soient bien définis, il aurait fallu préciser que l'on suppose que $N \geq 2$, et du coup on n'a pas montré la propriété pour tout $N \in \mathbb{N}$.

De même, pour que v_{N-1} soit bien défini, il fallait $N \geq 2$, et pour que la somme

contienne le terme $\frac{1}{2}$, il fallait même $N \geq 3$, donc on n'a pas montré la propriété pour tout $N \in \mathbb{N}$.

- Ré-écriture des réponses :

- L'affirmation « (u_n) est une suite de Cauchy » s'écrit $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \llbracket N; +\infty \llbracket, |u_p - u_q| < \varepsilon$.

Sa négation est donc $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \llbracket N; +\infty \llbracket, |u_p - u_q| \geq \varepsilon$.

- i) On pose $\varepsilon = 1$, et on remarque que pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{N+1} - u_N| = |(-1)^{N+1} - (-1)^N| = 2 \geq \varepsilon.$$

On a donc montré qu'il existe $\varepsilon > 0$ (en l'occurrence $\varepsilon = 1$) tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p, q \geq N$ (en l'occurrence $p = N+1$ et $q = N$) tels que $|u_p - u_q| \geq \varepsilon$, donc la suite (u_n) n'est pas de Cauchy.

- ii) On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$, et on remarque que pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$|v_{2N} - v_N| = \sum_{p=N+1}^{2N} \frac{1}{p} \geq \sum_{p=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = n \times \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

On a donc montré qu'il existe $\varepsilon > 0$ (en l'occurrence $\varepsilon = \frac{1}{2}$) tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p, q \geq N$ (en l'occurrence $p = 2N$ et $q = N$) tels que $|v_p - v_q| \geq \varepsilon$, donc la suite (v_n) n'est pas de Cauchy.

soit $\varepsilon =$

Chapitre 2: séries réelles et complexes

A) Exercices classiques ou application du cours

Exercice 46 : Sommes de séries

corrigé en ligne

Déterminer la nature de la la série $\sum u_n$, pour chacune des suites (u_n) ci dessous. Si la série converge, indiquez sa somme, sinon calculez ses sommes partielles.

- i) $\left(-2 \times \frac{\pi^3 n}{3^{2n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ii) $\left(\frac{2n^3+6n^2+n-2}{(n+2)(n+1)n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
- iii) $(\sinh(8n))_{n \in \mathbb{N}}$ iv) $\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

- i) On note tout d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, $-2 \times \frac{\pi^3 n}{3^{2n}} = -2 \left(\frac{\pi^3}{9}\right)^n$.

Donc la somme partielle s'écrit $\sum_{i=0}^n -2 \times \frac{\pi^3 i}{3^{2i}} = -2 \times \frac{1 - \left(\frac{\pi^3}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\pi^3}{9}}$, car c'est une série géométrique de raison $\frac{\pi^3}{9} > 1$. Cette somme partielle tend vers $-\infty$ donc la série est divergente.

- ii) On note tout d'abord que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n^3+6n^2+n-2}{(n+2)(n+1)n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + 2$.

Donc la somme partielle s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{2i^3+6i^2+i-2}{(i+2)(i+1)i} &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} + 2n \\ &= -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + 2n \\ &= -2 + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + 2n \end{aligned}$$

Qui tend vers $+\infty$. Cette série diverge donc.

- iii) Pour $n \in \mathbb{N}$, on remarque deux sommes géométriques de raisons $e^8 \neq 1$ et $e^{-8} \neq 1$, si bien que les sommes partielles sont :

$$\sum_{k=0}^n \sinh(8n) = \frac{\sum_{k=0}^n e^{8k} - \sum_{k=0}^n e^{-8k}}{2} = \frac{\frac{1-e^{8(n+1)}}{1-e^8} - \frac{1-e^{-8(n+1)}}{1-e^{-8}}}{2}$$

Au numérateur, le premier terme tend vers $+\infty$ et le second vers $\frac{1}{1-e^{-8}}$, donc les sommes partielles tendent vers $+\infty$, la série est divergente.

- iv) On note tout d'abord que la suite (u_n) est la somme de la suite géométrique $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ (de raison $\frac{1}{3} \neq 1$) et de la suite télescopique $\left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right)$.

Donc la somme partielle s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{1}{3^i} + \frac{1}{i+4} - \frac{1}{i+5} &= \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} + \sum_{k=4}^{n+4} \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{n+5} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+5} \end{aligned}$$

Cette somme partielle tend vers $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, donc cette série converge,

et $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) = \frac{7}{4}$.

Exercice 47 : Nature de séries

corrigé en ligne

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, déterminer si la série $\sum u_n$ converge, et si elle converge absolument.

- | | |
|---|--|
| i) $(x^{\ln n})_{n \geq 1}$ | ii) $\left(\frac{x^n+1}{x^{2n}+n}\right)_{n \geq 0}$ |
| iii) $\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ | iv) $(e^{\cos(1/n)} - e^{\cos(2/n)})_{n \geq 1}$ |
| v) $(\tanh(n+x) - \tanh(n))_{n \in \mathbb{N}}$ | vi) $(1 - \cos \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ |
| vii) $\left((1 - e^{1/n^2})\sqrt{\ln n}\right)_{n \geq 1}$ | viii) $\left((-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left((1 - e^{1/n^2})\sqrt{\ln n}\right)\right)_{n \geq 1}$ |
| ix) $\left(\frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{4})x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}\right)_{n \geq 1}$ | x) $(\sin((n + \frac{x}{n})\pi))_{n \geq 1}$ |
| xi) $\left(\frac{(-1)^n}{n + 2 \sin n}\right)_{n \geq 1}$ | xii) $((-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n))_{n \geq 0}$ |

Pour rappel, on a vu en cours 4 méthodes principales pour déterminer la nature d'une série :

- Calculer les sommes partielles de la série, comme on l'a fait dans l'exercice 46.
- Comparaison de séries positives : comparer (par équivalent ou encadrement) la valeur absolue de la série à une série positive dont on connaît la nature. Si une série n'est pas de signe constant, cela permet uniquement de déterminer si elle converge absolument.
- Critères de Cauchy et de D'Alembert. Si une série n'est pas de signe constant, cela permet uniquement de déterminer si elle converge absolument.
- Critère sur les séries alternées.

Dans le cas présent, les 7 premières séries sont à termes positifs, donc pour celles-là on ne distingue pas entre convergence et convergence absolue.

- i) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x^{\ln n} = n^{\ln x}$, donc $\sum x^{\ln n}$ converge si et seulement si $\ln x < -1$, c'est à dire si et seulement si $x < 1/e$.
- ii) On distingue trois cas :
- Si $x < 1$, alors $u_n \sim \frac{1}{n}$, dont la somme diverge, donc par comparaison de séries positives, $\sum u_n$ diverge.
 - Si $x = 1$, alors $u_n \sim \frac{2}{n}$, dont la somme diverge, donc par comparaison de séries positives, $\sum u_n$ diverge.
 - Si $x > 1$, alors $u_n \sim \frac{1}{x^n}$, dont la somme converge, donc par comparaison de séries positives, $\sum u_n$ converge.
- iii) Quand $n \geq 2$, on a $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})^n \leq (\frac{3}{4})^n$. Donc par comparaison de séries positives, la série $\sum (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})^n$ converge.

iv) Quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\begin{aligned} e^{\cos(1/n)} &= \exp\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)\right) = e \exp\left(-\frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) + o\left(\left(-\frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)\right)^2\right)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) + o(1/n^2) \end{aligned}$$

Donc $e^{\cos(1/n)} - e^{\cos(2/n)} = e \left(\frac{1}{2(n/2)^2} - \frac{1}{2n^2}\right) + o(1/n^2) \sim \frac{3e}{2} \frac{1}{n^2}$, or $\sum \frac{3e}{2} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.

De plus, la suite $(e^{\cos(1/n)} - e^{\cos(2/n)})$ est positive par décroissance de $\cos$ sur $[0; \pi] \supset [0; 1]$, et croissance $\exp$.

Donc par comparaison de séries de terme général positif, la série $\sum (e^{\cos(1/n)} - e^{\cos(2/n)})$ converge.

- v) Le théorème des valeurs intermédiaire indique que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $c \in [n; n+x]$ tel que $\tanh(n+x) - \tanh(n) = x \tanh'(c) = \frac{x}{\cosh^2(c)} \leq \frac{x}{\cosh^2(n)}$. Or $\frac{1}{\cosh^2(n)} \sim \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ qui est le terme général d'une série convergente positive, donc $\frac{x}{\cosh^2(n)}$ aussi, d'où la convergence de $\sum \tanh(n+x) - \tanh(n)$ (par comparaison de séries positives).
- vi) Au voisinage de $x = 0$, on a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$. Donc $(1 - \cos \frac{1}{n}) = 1 - (1 - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)) \sim \frac{1}{2n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs (donc $\sum \frac{1}{2n^2}$ aussi) d'où la convergence de $\sum (1 - \cos \frac{1}{n})$.
- vii) Pour $n \rightarrow \infty$, $1 - e^{1/n^2} \sim \frac{1}{n^2}$, donc $(1 - e^{1/n^2})\sqrt{\ln n} \sim \frac{\sqrt{\ln n}}{n^2}$ dont la somme converge. Donc par comparaison de séries positives $\sum ((1 - e^{1/n^2})\sqrt{\ln n})$ converge.
- Les dernières séries sont de signe alterné et on distingue entre convergence et convergence absolue :
- viii) On vient de voir que $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge absolument, et donc $\sum u_n$ converge.
- ix) Pour $n \geq 1$, on note tout d'abord que $\sin((2n+1)\frac{\pi}{4}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, puis on déduit que
- $$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{x}{1+x^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
- Dans tous les cas cette limite est plus petite que 1, d'où la convergence de $\sum |u_n|$. Donc $\sum u_n$ converge absolument, et donc $\sum u_n$ converge.
- x) Pour $n \geq 1$ on a $\sin((n + \frac{x}{n})\pi) = (-1)^n \sin(\frac{x}{n}\pi)$.

Or la suite $\left(\sin\left(\frac{|x|}{n}\pi\right)\right)_{n \geq 1+E(2x)}$ est décroissante et tend vers 0, d'où la convergence de $\sum \sin\left((n + \frac{x}{n})\pi\right)$.

Il n'y a en revanche pas convergence absolue car $\sum |u_n|$ diverge par comparaison de séries positives (en effet $|u_n| \sim \frac{x}{n}\pi$, où $\sum \frac{x}{n}\pi$ est une série divergente à termes positifs et $\left(\sin\left(\frac{|x|}{n}\pi\right)\right)_{n \geq 1+E(x)}$ est elle aussi positive).

- xi) On remarque que $\frac{(-1)^n}{n+2\sin n} \sim \frac{(-1)^n}{n}$. De plus $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge comme série alternée (car $(\frac{1}{n})$ est décroissante et tend vers 0). Mais $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$ ne permet pas de conclure sur la convergence de $\sum u_n$ car ces séries ne sont pas de signe constant. On choisit donc d'étudier $\sum \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right)$:

$$\frac{(-1)^n}{n+2\sin n} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}2\sin n}{n(n+2\sin n)} \sim \frac{(-1)^{n+1}2\sin n}{n^2}$$

Donc $\left|u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{2}{n^2}$ qui est positif de somme convergente, donc par comparaison de séries positives $\sum \left|u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right|$ converge, donc $\sum u_n - \frac{(-1)^n}{n}$ converge aussi, si bien que $\sum \frac{(-1)^n}{n+2\sin n}$ converge aussi.

Ce n'est pas une convergence absolue, car $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ qui est positif de somme divergente.

- xii) Pour $n \in \mathbb{N}$, on commence par développer u_n :

$$\begin{aligned} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) &= (-1)^n n \left(\sqrt{1+1/n^2} - 1\right) = (-1)^n n \left(\frac{1}{2n^2} + o(1/n^3)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2n} + \underbrace{o(1/n^2)}_{\varepsilon_n/n^2} \end{aligned}$$

où l'on notera que dans la première ligne, on a écrit $o(1/n^3)$ car le terme suivant du développement de Taylor est $-\frac{1}{8n^4}$, et dans la deuxième ligne on désigne par ε_n/n^2 le reste (c'est à dire $\varepsilon_n/n^2 = u_n - \frac{(-1)^n}{2n}$), et on note que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

D'une part, $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$ converge par le critère des séries alternées (car la suite $(\frac{1}{2n})$ est décroissante et tend vers 0).

D'autre part, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, il existe un rang à partir duquel $|\varepsilon_n| \leq 1$, donc à partir duquel le reste satisfait $|\varepsilon_n/n^2| \leq 1/n^2$ si bien que par comparaison de séries positives, $\sum |\varepsilon_n/n^2|$ converge, ce qui implique la convergence de $\sum \varepsilon_n/n^2$.

Donc $\sum u_n$ converge.

De plus, ce n'est pas une convergence absolue car $|u_n| \sim \frac{1}{2n}$ donc $\sum |u_n|$ diverge.

remarque : Une astuce permettait d'utiliser directement le critère sur les séries alternées : il s'agissait de penser à réécrire $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ ce qui donne la décroissance de $|u_n|$.

Exercice 48 : Disjonction de cas

corrigé en ligne

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{x^n+1}{x^{2n}+n}$.

Comme (u_n) est positive, on utilise les théorèmes de comparaison de séries à termes positifs (en déterminant un équivalent) :

- Si $x < 1$, alors $u_n \sim \frac{1}{n}$, qui est positif de somme divergente, donc $\sum u_n$ diverge.
- Si $x = 1$, alors $u_n \sim \frac{2}{n}$, qui est positif de somme divergente, donc $\sum u_n$ diverge.
- Si $x > 1$, alors $u_n \sim \frac{1}{x^n}$, qui est positif de somme convergente, donc $\sum u_n$ converge.

B) Autres démonstrations

Exercice 54 : Somme de deux séries

corrigé en ligne

Étant données deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on considère leur somme $\sum(u_n + v_n)$:

- i) Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge.

Ça découle de la linéarité de la limite : $\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$.

- ii) Montrer que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Si $\sum(u_n + v_n)$ convergeait, alors $\sum v_n = \sum((u_n + v_n) - u_n)$ convergerait d'après la question précédente.

Remarque : on a démontré la contraposée de la question posée, ce qui revient strictement au même.

- iii) Que peut-on dire lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent ?

Il n'y a pas de résultat général. Parfois $\sum(u_n + v_n)$ converge (par exemple si $v_n = -u_n$), et parfois $\sum(u_n + v_n)$ diverge (par exemple si $v_n = u_n$).

Exercice 55 : Domination du terme général d'une série.

corrigé en ligne

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\sum u_n$ converge.

Soit (v_n) une suite complexe “dominée” par (u_n) , c'est à dire qu'il existe une suite bornée ω_n , et un rang $N_1 \in \mathbb{N}$, tels que $\forall n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket$, $v_n = \omega_n u_n$ (on note cette affirmation sous la forme « $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ »).

Montrer qu'alors, $\sum v_n$ converge absolument.

Sous ces hypothèses, la suite ω_n admet une borne $M \in \mathbb{R}_+$ (telle que $\forall n \geq N_1, |\omega_n| \leq M$).

Donc $\forall n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket$, $\sum_{k=N_1}^n |v_k| \leq M \sum_{k=N_1}^n u_k \leq M \sum_{k=0}^{\infty} u_k$, donc la suite des sommes partielles de la série de terme général $(|v_n|)_{n \geq N_1}$ est majorée (et croissante comme sommes partielles d'une série à termes positives), donc la série $\sum |v_n|$ converge (et c'est donc vrai quel que soit le rang auquel commence la somme, d'après l'exercice 49).

On a montré que $\sum |v_n|$ converge, donc $\sum v_n$ converge absolument.

Exercice 56 : Équivalence du terme général

corrigé en ligne

Soient (u_n) une suite réelle positive et (v_n) une suite complexe telle que $v_n \sim u_n$. Montrez que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

(Indication : pour se ramener aux hypothèses de la proposition 2.3.4, on pourra montrer que $\operatorname{Re}(v_n) \sim u_n$, et que $\operatorname{Re}(v_n)$ est positive à partir d'un certain rang.)

- ($\Rightarrow$) : supposons que $\sum u_n$ converge, montrons que $\sum v_n$ converge :

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \sim |u_n| = u_n$. or $\sum u_n$ converge, et (u_n) et $(|v_n|)$ sont des séries positives, donc d'après la proposition 2.3.4, $\sum |v_n|$ converge. Donc $\sum v_n$ converge.

- ($\Leftarrow$) : supposons que $\sum v_n$ converge, montrons que $\sum u_n$ converge :

Montrons tout d'abord que $u_n \sim \operatorname{Re}(v_n)$:

Comme $u_n \sim v_n$, il existe ω_n qui tend vers 1 et $N_1 \in \mathbb{N}$, tels que pour $n \in \llbracket N_1; \infty \llbracket$, on a $v_n = \omega_n u_n$, d'où $\operatorname{Re}(v_n) = \operatorname{Re}(\omega_n u_n)$ (car $u_n \in \mathbb{R}$). Or $\lim \operatorname{Re}(\omega_n) = 1$, donc $\operatorname{Re}(v_n) \sim u_n$.

De plus, comme $\lim \omega_n = 1$, il existe $N_2 \in \llbracket N_1; \infty \llbracket$ tel que pour tout $n \in \llbracket N_2; \infty \llbracket$, $|\omega_n - 1| < 1$, donc $\operatorname{Re}(\omega_n) > 0$ et $\operatorname{Re}(v_n) \geq 0$.

Or $\sum_{n \geq N_2} v_n$ converge donc $\sum_{n \geq N_2} \operatorname{Re}(v_n)$ converge, donc $\sum_{n \geq N_2} u_n$ converge (d'après la proposition 2.3.4), donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 57 : Bijection de $\mathbb{N}^*$

corrigé en ligne

Soit ϕ une bijection de $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$.

1. Donner un exemple d'une telle application (différente de l'identité).

Par exemple, on peut poser (pour $k \in \mathbb{N}^*$), $\phi(2k) = 2k - 1$ et $\phi(2k - 1) = 2k$. C'est une bijection (car elle est sa propre réciproque), et ce n'est pas l'identité.

2. Soit (u_n) la suite $\left(\frac{\phi(n)}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On considère la série $\sum u_n$:

Soit $(S_n)_{n \geq 1} = \left(\sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \geq 1}$ la suite de ses sommes partielles. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a la minoration

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\phi(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)/2}{(n+1)^2} = \frac{1}{2(1+\frac{1}{n})} \geq \frac{1}{4}$

où on a utilisé que d'une part $k^2 \leq (n+1)^2$ (d'où $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$), et que d'autre part

$\sum_{k=n+1}^{2n} \phi(k) \geq \sum_{k=1}^n k$ qui découle du fait que $\phi(n+1), \phi(n+2), \dots, \phi(2n)$, sont n entiers distincts dans $\mathbb{N}^*$ (donc au minimum ce peut être les nombres $1, 2, \dots, n$).

3. En déduire que la série diverge vers $+\infty$.

Comme (S_n) est croissante (par positivité des u_n), il suffit de montrer qu'elle n'est pas bornée. Pour cela on montre qu'une sous suite tend vers $+\infty$:

D'après la question précédente, on a pour $n \geq 1$,

$$S_{2^n} = (S_{2^n} - S_{2^{n-1}}) + (S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-2}}) + \dots + (S_{2^1} - S_{2^0}) + S_0 \geq \frac{n}{4} + S_0,$$

donc cette sous suite de (S_n) tend vers $+\infty$. Donc (S_n) n'est pas bornée et par croissance elle tend bien vers $+\infty$.

C) Exemples à ne pas suivre**Exercice 61 : Somme de séries**

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, calculer les sommes partielles de la série $\sum u_n$, et en déduire la nature de $\sum u_n$:

- i) $((\sin \frac{\pi}{2})^n)_{n \geq 0}$ ii) $((-1)^n \frac{E(\frac{n}{2})+1}{E(\frac{n}{2})})_{n \geq 2}$

Sa réponse est ci-dessous :

i) $\sum_{i=0}^n (\sin \frac{\pi}{2})^n = \frac{1 - (\sin \frac{\pi}{2})^{n+1}}{1 - \sin \frac{\pi}{2}}$ qui tend vers $\frac{1}{1 - \sin \frac{\pi}{2}}$ (car $\sin \frac{\pi}{2} \leq 1$, donc $\lim(\sin \frac{\pi}{2})^{n+1} = 0$). Donc la série converge.

ii) $\sum_{i=2}^{2n+1} u_i = \sum_{k=1}^n (u_{2k} + u_{2k+1}) = \sum_{k=1}^n (\frac{k+1}{k} - \frac{k+1}{k}) = 0$. Cela tend vers 0 donc la série converge.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

- Commentaires sur la réponse :

- D'une part, il faut introduire les variables qu'on utilise (par exemple, avant de calculer $\sum_{i=0}^n \dots$, il faut d'abord préciser que $n \in \mathbb{N} \dots$ et indiquer si ce qu'on dit est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou si on affirme l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que ça soit vrai).
- D'autre part, en question i)
 - Quand on fait la somme d'une série géométrique, la formule est différente si la raison est égale à 1 (ce qui est le cas ici). Il aurait fallu commencer par vérifier si la raison vaut 1.
 - De plus la suite $((\sin \pi)^{n+1})_{n \geq 0}$ ne tends pas vers 0 : comme $\sin \pi = 1$, c'est la suite constante égale à 1.
- en question ii), les sommes partielles ne sont calculées que pour les rangs impairs (de la forme $2n+1$). Cela ne suffit pas à déterminer si la suite des sommes partielles converge (ni à répondre à la question "calculer les sommes partielles").

- Ré-écriture de la réponse :

On va désigner par u_n le terme général de la suite étudiée.

- i) On note que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n u_n = n+1$.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = +\infty$, donc la série diverge.

- ii) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $\begin{cases} u_{2k} = (-1)^{2k} \frac{E(k)+1}{E(k)} = \frac{k+1}{k} \\ u_{2k+1} = (-1)^{2k+1} \frac{E(k+\frac{1}{2})+1}{E(k+\frac{1}{2})} = -\frac{k+1}{k} \end{cases}$

Donc $\sum_{i=2}^{2k+1} u_i = \sum_{\ell=1}^k (u_{2\ell} + u_{2\ell+1}) = \sum_{\ell=1}^k (\frac{\ell+1}{\ell} - \frac{\ell+1}{\ell}) = 0$

$\sum_{i=2}^{2k} u_i = \sum_{i=2}^{2k+1} u_i - u_{2k+1} = \frac{k+1}{k}$

Ainsi on a exprimé deux sous-suites de la suite des sommes partielles, l'une tends vers 0, l'autre vers 1 (car $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1$), donc la série diverge.

Exercice 62 : convergence et racine carrée

corrigé en ligne

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

- i) Soient x et y deux réels positifs. Montrer que $\sqrt{xy} \leq x + y$.
- ii) Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Dédurre de i) que la série de terme général $\sqrt{u_n}/n$ est convergente.

Sa réponse est ci-dessous :

- i) Par exemple, si $x = 2$ et $y = 3$, alors $x + y = 5 > \sqrt{6}$.
- ii) Donc $\sqrt{u_n}/n \leq u_n + \frac{1}{n^2}$. Or $\sum (u_n + \frac{1}{n^2})$ converge, donc $\sum \sqrt{u_n}/n$ converge.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

- Commentaires sur la réponse :

- En question i), l'étudiant·e fournit uniquement un exemple de valeurs de x et y . Cela ne répond pas du tout à la question, qui était de prouver cette inégalité pour tous x et $y \in \mathbb{R}_+^*$.
- En question ii),
 - Il faut une rédaction plus soignée : par exemple, quand on écrit « $\sqrt{u_n}/n \leq u_n + \frac{1}{n^2}$ », affirme-t-on l'existence d'un n tel que l'inégalité soit vraie? Ou bien affirme-t-on qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? Ou pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
 - Pour conclure la convergence à partir de la majoration d'une série, il est indispensable que la réponse mentionne la positivité du terme général.

- Ré-écriture de la réponse :

- i) Comme x et y sont positifs, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} \leq x + y &\Leftrightarrow xy \leq (x + y)^2 \\ &\Leftrightarrow (x + y)^2 - xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + (x+y)^2 + y^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Or $\frac{x^2 + (x+y)^2 + y^2}{2} \geq 0$ est vraie (car x et y sont réels),

donc on a bien $\sqrt{xy} \leq x + y$.

- ii) Les séries $\sum \sqrt{u_n}/n$ et $\sum u_n + \frac{1}{n^2}$ ont terme général positif, et $\sum u_n + \frac{1}{n^2}$ est convergente (comme somme de deux séries convergentes).

De plus d'après la question i), on a pour $n \geq 1$: $\sqrt{u_n}/n \leq u_n + \frac{1}{n^2}$. D'où la convergence de $\sum \sqrt{u_n}/n$.

Chapitre 3: séries entières**A) Exercices classiques ou application du cours****Exercice 73 : Convergence simple ou uniforme ?**

corrigé en ligne

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(0) = 0$ et que pour $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On désigne ensuite par (g_n) la suite $(f - f_n)$.

Pour $x \in]0,1[$, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. De plus si $x = 1$ ou $x = 0$ alors $(f_n(x))$ est la suite nulle, qui tend aussi vers 0.

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Remarque : Comme f est la fonction nulle, (g_n) et $(-f_n)$ sont égales. De plus par négativité des f_n , (g_n) est aussi égale à $(|f - f_n|)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de g_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in]0,1[$. $g'_n(x) = -n^2 x^{n-1} \ln(x) - nx^{n-1} = -x^{n-1}(n + n^2 \ln(x))$, qui s'annule en $x = e^{-\frac{1}{n}}$. Ainsi, g_n est croissante sur $]0, e^{-\frac{1}{n}}]$, décroissante sur $[e^{-\frac{1}{n}}, 1[$. Mais $g_n(0) = g_n(1) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) \geq 0$. Donc (par la question 2 de l'exercice 11) g_n est en fait croissante sur $[0, e^{-\frac{1}{n}}]$ et décroissante sur $[e^{-\frac{1}{n}}, 1]$ (et positive au sens large).

3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Ainsi, $\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| = g_n(e^{-\frac{1}{n}}) = -ne^{-1} \times \frac{-1}{n} = e^{-1}$, qui ne tend pas vers 0, donc la convergence n'est pas uniforme.

4. Soit $a \in [0,1[$. En remarquant qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in [N, +\infty[$, $e^{-1/n} \geq a$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Comme $e^{-1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, en utilisant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1 - a > 0$, on a l'existence d'un rang N tel que, pour $n \geq N$, on a $|1 - e^{-1/n}| \leq \varepsilon$ c'est à dire $e^{-1/n} \geq 1 - \varepsilon = a$.

Mais alors (toujours pour $n \geq N$), par croissance de g_n sur $[0, e^{-1/n}] \supset [0, a]$ on a $\sup_{x \in [0,a]} |f(x) - f_n(x)| = g_n(a) = -f_n(a)$ qui tend vers 0 par convergence simple de f_n . Donc sur $[0,a]$, (f_n) converge uniformément vers f .

Exercice 74 : Bords du disque de convergence

corrigé en ligne

Pour chacune des séries entières $\sum a_n z^n$ ci dessous, déterminer d'une part son rayon de convergence. D'autre part, pour chaque point du bord du disque de convergence, déterminer s'il y a convergence absolue, et s'il y a convergence simple.

(En question v), on pourra utiliser le « critère d'Abel » énoncé (et démontré) en question 2 de l'exercice 51.)

$$\text{i) } \sum \sqrt{(n+2)!} z^n \quad \text{ii) } \sum \left(-\frac{4n}{n+1}\right)^n z^n \quad \text{iii) } \sum \frac{1}{n^2+2} z^{2n}$$

$$\text{iv) } \sum \exp(-\exp(n)) z^n \quad \text{v) } \sum \frac{z^{2n}}{n+3}$$

- i) • **Rayon de convergence** : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{n+3}$ qui tend vers $+\infty$. Donc le rayon de convergence est nul.
- **Comportement au bord du disque de convergence** : Le disque de convergence est vide, donc son « bord » est vide aussi.
- Remarque** : si l'on considère $\mathcal{C}(0,0)$, c'est à dire $\{0\}$, on constate que la série entière y converge absolument et simplement (tous les termes y sont nuls sauf le premier).
- ii) • **Rayon de convergence** : On remarque tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp(-n \ln(1 + \frac{1}{n}))$ qui tends vers $\exp(-1)$ (par continuité de $\exp$, sachant que $-n \ln(1 + \frac{1}{n})$ tends vers -1). Donc $a_n \sim (-4)^n e^{-1}$, et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim 4$, donc le rayon de convergence est $1/4$.
- **Comportement au bord du disque de convergence** : Pour $w \in \mathcal{C}(0, \frac{1}{4})$, on a divergence grossière, car on a montré précédemment que $|a_n w^n| \sim |(-4)^n| e^{-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ qui tend vers e^{-1} (donc pas vers zéro. Il n'y a donc ni convergence absolue, ni convergence simple au bord du disque de convergence).
- iii) • **Rayon de convergence** : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{1}{n^2+2}$, et on a : $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n^2+2}{(n+1)^2+2} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})^2+\frac{2}{n^2}}$ qui tend vers 1. Donc le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est un. En conséquence, $\sum a_n z^n = \sum b_n z^{2n}$ converge si $|z^2| < 1$ (c'est à dire si $|z| < 1$) et diverge si $|z^2| > 1$ (c'est à dire si $|z| > 1$). Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est donc égal à 1.
- **Comportement au bord du disque de convergence** : Pour $w \in \mathcal{C}(0,1)$, on a convergence absolue (donc convergence simple) car la série $\sum |a_n z^n| = \sum b_n$ converge (par comparaison de séries positives, car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente).
- iv) • **Rayon de convergence** : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \exp(\exp(n) - \exp(n+1)) = \exp(\exp(n)(1-e))$ qui tends vers 0 (car $\lim \exp(n)(1-e) = -\infty$). Donc $R = +\infty$.

- **Comportement au bord du disque de convergence** : Comme le rayon de convergence est infini, le disque de convergence est $\mathbb{C}$ tout entier, il n'a pas de bord.

v) Pour changer un peu la structure de la preuve, commençons par étudier la convergence de cette série entière sur $\mathcal{C}(0,1)$.

Remarque : on a intuité que $\sqrt{1} = 1$ serait le rayon de convergence car la série $\sum \frac{z^{2n}}{n+3}$ a 1 comme rayon de convergence.

- Tout d'abord, si $w = \pm 1$, alors la série $\sum \frac{w^{2n}}{n+3} = \sum \frac{1}{n+3}$ diverge par comparaison de séries positives (comme $\frac{1}{n+3} \sim \frac{1}{n}$ et comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge).
- Cette divergence de la série entière en 1 et en -1 implique que le rayon de convergence est $R \leq 1$.
- Ensuite, pour $w \in \mathcal{C}(0,1)$, on remarque qu'il n'y a pas convergence absolue, car $\sum \left|\frac{w^{2n}}{n+3}\right| = \sum \frac{1}{n+3}$ dont a déjà montré la divergence.
- Montrons enfin que pour $w \in \mathcal{C}(0,1) \setminus \{-1,1\}$, la série converge simplement d'après le critère d'Abel :
 - La suite $\left(\frac{1}{n+3}\right)$ est décroissante et tends vers 0.
 - Les sommes partielles de $\sum w^{2n}$ sont données par $\sum_{k=0}^n w^{2k} = \frac{1-w^{2n+2}}{1-w^2}$, car $w \notin \{-1,1\}$ (rappelons qu'on considère ici $w \in \mathcal{C}(0,1) \setminus \{-1,1\}$). Elles sont donc bornées par $\frac{2}{|1-w^2|}$.
 - donc par le critère d'Abel, la série $\sum \frac{w^{2n}}{n+3}$ converge bien quand $w \in \mathcal{C}(0,1) \setminus \{-1,1\}$.
- Il découle de cette convergence que le rayon de convergence est $R \geq 1$. (Donc $R = 1$, parce qu'on avait par ailleurs montré que $R \leq 1$.)

Pour résumer, on a donc montré que le rayon de convergence est $R = 1$, qu'il n'y a convergence absolue en aucun point du bord du disque de convergence, et qu'il y a convergence simple en 1 et -1 , mais pas sur le reste du bord du disque de convergence.

Exercice 75 : Développement en série entière

corrigé en ligne

Donner le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions f définies ci-dessous et préciser le rayon de convergence.

i) $f(x) = (2x + 3)^{-2}$ ii) $f(x) = \cos(x + 1)$ iii) $f(x) = \sqrt{2 - x}$

i) Pour $x \in D(0, 3/2)$, on a $f(x) = \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2}{3}x\right)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2/3)^n (n+1)}{9} x^n$.

Le rayon de convergence est $3/2$ (se vérifie en faisant le rapport de deux coefficients consécutifs).

ii) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) \cos(1) - \sin(x) \sin(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où on pose (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cos 1$ et $a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \sin 1$.

Le rayon de convergence est ∞ .

iii) Pour $x \in]-2, 2[$, on a $f(x) = \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1/2}} \binom{1/2}{n} x^n$ (et donc le rayon de convergence est au moins 2).

De plus, le rayon de convergence ne peut pas être plus grand que 2 car $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = -\infty$ (qui empêche un développement en série entière de rayon $R > 2$), donc il est égal à 2.

Exercice 76 : Sommes de séries entières

corrigé en ligne

Pour les séries entières suivantes (où le premier terme est en $n = 0$), trouver le rayon de convergence R , calculer la somme $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$ et étudier ce qu'il se passe si $x = \pm R$:

i) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1}$ ii) $\sum n x^n$ iii) $\sum \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} x^n$

Soit $f(x)$ la somme de la série en question.

i) Avec la règle de d'Alembert, on obtient $R = 1$.

On remarque tout d'abord que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1/2}{2n - 1} - \frac{1/2}{2n + 1}$.

La règle de d'Alembert permet de dire que chacune des séries $\sum (-1)^n \frac{1/2}{2n - 1} x^{2n}$ et $\sum (-1)^n \frac{1/2}{2n + 1} x^{2n}$ a aussi pour rayon de convergence $R = 1$.

On considère donc $x \in]-1, 1[$, et la somme $f(x)$ s'écrit donc comme différence des sommes de deux séries entières :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1/2}{2n - 1} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1/2}{2n + 1} x^{2n}.$$

Ensuite on rappelle que (toujours pour $x \in]-1, 1[$), on a

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1}, \text{ d'où il découle que :}$$

$$\begin{aligned} x f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1/2}{2n - 1} x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1/2}{2n + 1} x^{2n+1} \\ &= -\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1/2}{2n - 1} x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1/2}{2n + 1} x^{2n+1} \\ &= -\frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1/2}{2n + 1} x^{2n+3} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1/2}{2n + 1} x^{2n+1} \\ &= -\frac{x}{2} - \frac{x^2 + 1}{2} \arctan(x) \end{aligned}$$

On en déduit que pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$:

$$f(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1 + x^2}{2x} \arctan(x),$$

alors qu'en $x = 0$, la somme vaut -1 .

En ± 1 la somme converge absolument, et en fait elle converge même normalement sur $D(0, 1)$ car $\sum |a_n|$ converge. $f(\pm 1)$ coïncide avec la limite de $-\frac{1}{4} - \frac{1+x^2}{2x} \arctan(x)$ (par continuité de la limite, du fait de la convergence normale sur $[-1; 1]$), et vaut donc $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

ii) Pour $|x| < 1$, on a : $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Le rayon de convergence de série étant égal à 1, on peut dériver pour $x \in]-1; 1[$:
 $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, d'où $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ et $R \geq 1$.

De plus la série diverge grossièrement quand $x = \pm 1$, donc $R = 1$.

iii) Avec la règle de d'Alembert, on obtient $R = 1$. De plus, on a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{n+2}.$$

La règle de d'Alembert permet de dire que chacune des séries $\sum x^n$, $\sum \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum \frac{4x^n}{n+2}$ a aussi pour rayon de convergence $R = 1$.

On considère donc $x \in]-1; 1[$, et la somme $f(x)$ s'écrit donc comme différence des sommes de trois séries entières :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n.$$

Or, pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, on a

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- $\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (on a le droit de dériver ainsi car on est à l'intérieur du disque de convergence).

De plus, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ vaut 0 en $x = 0$, donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$,

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \left(-\frac{\ln(1-x)}{x} - 1 \right)$

On en déduit donc l'expression de $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{4}{x} \left(\frac{\ln(1-x)}{x} + 1 \right)$$

Pour $|x| = 1$, le terme général de la série ne converge pas vers 0, donc la série diverge.

B) Autres démonstrations

Exercice 83 : Somme de sinus

corrigé en ligne

On souhaite étudier la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$.

1. On va commencer par montrer que la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0 :

(a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\sin(1)| > 3\varepsilon$, et que $\arcsin \varepsilon \leq 2\varepsilon$.

On pose alors $\eta = \arcsin \varepsilon$.

π étant irrationnel, 1 n'est pas multiple de π , donc $\sin(1) \neq 0$ et donc par exemple le nombre $\varepsilon_1 = \frac{|\sin(1)|}{4}$ satisfait $|\sin(1)| > 3\varepsilon_1$.

De plus, la fonction $x \mapsto \arcsin(x) - 2x$ est nulle en $x = 0$ où sa dérivée vaut -1 . Donc elle est négative (au sens large) sur un intervalle $[0, \varepsilon_2]$.

Alors le nombre $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ convient.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\sin n| \leq \varepsilon$. Montrer que $|\sin(n+1)| > \varepsilon$.

Si $|\sin n| \leq \varepsilon$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\pi - \eta \leq n \leq k\pi + \eta$. Il en découle que $|(n+1) - (k\pi + 1)| \leq \eta$. Donc $|\sin(n+1) - \sin(k\pi + 1)| \leq \eta$, par le théorème des accroissements finis.

Dès lors $|\sin(n+1)| \geq |\sin(k\pi + 1)| - \eta > 3\varepsilon - \eta \geq \varepsilon$.

(c) En déduire que la suite $\sin(n)$ ne tends pas vers 0.

Pour montrer que $\sin(n)$ ne tend pas vers 0, il suffit que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on trouve un $n \in \llbracket N, \infty \llbracket$ tel que $|\sin(n)| \geq \varepsilon$.

Soit donc $N \in \mathbb{N}$. Si $|\sin(n)| \geq \varepsilon$, alors $n = N$ convient. Sinon $|\sin N| < \varepsilon$ et donc d'après la question précédente, $n = N+1$ convient.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$, calculer sa somme lorsque $z \in D(0, R)$, et étudier ce qu'il se passe si $|z| = R$.

Comme $\sin(n)$ ne tends pas vers 0, la série $\sum \sin(n) z^n$ diverge grossièrement sur $\mathcal{C}(0, 1)$ et $R \leq 1$. Or quand $z = 1$, $(\sin(n) z^n)$ est bornée, donc $R \geq 1$. Donc $R = 1$.

Enfin, pour $z \in D(0, 1)$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sin(n) z^n = \frac{1}{2i} ((ze^i)^n - (ze^{-i})^n)$ donc la somme infinie vaut $\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1-ze^i} - \frac{1}{1-ze^{-i}} \right)$

Exercice 84 : Fonction entière

corrigé en ligne

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$

a un rayon de convergence infini.

Par définition du rayon de convergence, la suite $(a_n (R/2)^n)$ est bornée. Posons M une borne de cette suite, on a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq M (2/R)^n$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| \leq \frac{M}{n!} (2|z|/R)^n$ qui est le terme général d'une série positive convergente (car la série exponentielle converge au point $2|z|/R$), d'où la convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Donc le rayon de convergence est infini.

Exercice 85 : Développement en série entière

corrigé en ligne

On souhaite réaliser un développement en série entière de la fonction

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$$

en $z_0 = -4$. Pour cela, on pose

$$g : h \mapsto f(z_0 + h) \in \mathbb{C}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g , et le développement en série entière de g en 0. On précisera le domaine de convergence.
2. En factorisant $z^2 + 3z + 2 = (z + 1)(z + 2)$, on obtient que f (resp g) est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2\}$ (resp $\mathbb{C} \setminus \{2, 3\}$), puis on décompose, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2, 3\}$:

$$g(z) = f(z - 4) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{(z - 3)(z - 2)} = \frac{1}{z - 3} - \frac{1}{z - 2},$$

la dernière égalité étant obtenue en cherchant des réels a, b tels que

$$\frac{1}{(z - 3)(z - 2)} = \frac{a}{z - 3} + \frac{b}{z - 2},$$

donc tels que $a(z - 2) + b(z - 3) = 1$, ce qui donne $a = 1$ et $b = -1$. Maintenant on utilise pour $z \in D(0, 1)$:

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Donc, en posant $w = 3z$, pour $w \in D(0, 3)$:

$$\frac{3}{w - 3} = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} w \right)^n.$$

Le même calcul s'applique à $1/(z - 2)$ sur $D(0, 2)$. Il s'en suit que, pour $z \in D(0, 2)$:

$$g(z) = \frac{1}{z - 3} - \frac{1}{z - 2} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^{n+1}} z^n.$$

Le domaine de convergence de ce développement en série entière est $D(0, 2)$ car d'une part on l'a construit ci-dessus de sorte qu'il converge sur $D(0, 2)$, et d'autre part on remarque qu'il y a divergence grossière quand $|z| \geq 2$.

3. En déduire le développement voulu. Préciser le domaine de convergence.

Maintenant, on peut remplacer $f(z) = g(z+4)$ et :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^{n+1}} (z+4)^n.$$

Le disque de convergence est $D(-4,2)$ (d'une part ça converge sur ce disque par construction, d'autre part ça diverge grossièrement en dehors).

Exercice 86 : Exponentielle complexe

corrigé en ligne

Soit $\exp$ l'exponentielle complexe. Montrer qu'on a les relations suivantes pour $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\overline{\exp z} &= \exp \bar{z} \\ \exp(z+w) &= \exp z \cdot \exp w \\ \exp(nz) &= (\exp z)^n \\ |\exp z| &= \exp(\operatorname{Re} z)\end{aligned}$$

où $\operatorname{Re} z$ est la partie réelle de z .

Rappelons $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, cette série étant de rayon de convergence infini. Comme les coefficients de la série entière sont réels, on a :

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}^n/n! = \overline{\exp z}.$$

$$\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}$$

Le produit de Cauchy donne :

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \exp(z) \exp(w).$$

Par récurrence, l'égalité $\exp(nz) = (\exp z)^n$ en découle (schématiquement $\exp(nz) = \exp(z+z+\dots+z) = (\exp z)^n$).

Pour la dernière égalité, comme $|\exp z|$ et $\exp(\operatorname{Re} z)$ sont des réels positifs, il suffit de vérifier $|\exp z|^2 = \exp(\operatorname{Re} z)^2$. Cette dernière égalité vient de :

$$|\exp z|^2 = \exp z \overline{\exp z} = \exp z \exp \bar{z} = \exp(z+\bar{z}) = \exp(2\operatorname{Re} z) = \exp(\operatorname{Re} z)^2.$$

Exercice 87 : Identification d'une fonction via une équation différentielle

Soit la série entière

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1) \cdots 1}.$$

Trouver le rayon de convergence. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1) \cdots 1}$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Dans la suite, on adoptera la notation $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1$.

On s'attend à un rayon de convergence infini, pour le démontrer il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Cela découle immédiatement de $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{x^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Puisque le rayon de convergence est infini, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la dérivée $S'(x)$ se calcule en dérivant chaque puissance à l'intérieur de la somme :

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!!},$$

avec la convention $(-1)!! = 1$.

On peut réécrire cette dérivée comme

$$S'(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k-1)!!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!!} = 1 + xS(x).$$

D'où

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, S'(x) = 1 + xS(x) \\ S(0) = 0 \end{cases}$$

L'énoncé demande enfin d'en conclure que $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$, ce qui revient à montrer que $x \mapsto S(x)e^{-x^2/2}$ est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2/2}$ qui s'annule en $x=0$:

- Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = S(x)e^{-x^2/2}$. On remarque alors que $g'(x) = S'(x)e^{-x^2/2} - S(x)xe^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}$ (où la dernière égalité a utilisé la relation $S'(x) = 1 + xS(x)$).
- $g(0) = S(0)e^{-x^2/2} = 0$.
- Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Il en découle bien que $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

C) Exemples à ne pas suivre

Exercice 91 : Modification des coefficients

corrigé en ligne

Un-e étudiant-e a répondu à l'énoncé suivant :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\sum a_n^p z^n$ a pour rayon de convergence R^p .

Sa réponse est ci-dessous :

Comme $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/R$, on a $\lim \frac{a_{n+1}^p}{a_n^p} = 1/R^p$, donc le rayon de convergence de $\sum a_n^p z^n$ est R^p .

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

- Commentaires sur la réponse : La relation « $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/R$ » n'est vraie que lorsque la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ est bien définie et admet une limite. Il n'y a pas de raison de penser que ça soit le cas dans cet exercice (on a vu dans les exercices précédents des exemples où la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ n'était pas bien définie à cause de divisions par zéro, tandis que dans l'exercice 83 elle était bien définie mais on peut montrer qu'elle ne convergeait pas).

- Ré-écriture de la réponse :

Comme les rayons de convergence sont donnés par des limites supérieures (qui existent toujours), il faut montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n^p|^{1/n} = (\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n})^p$.

Cette égalité découle directement de l'exercice 36.

Exercice 92 : Développement en série entière

corrigé en ligne

Un-e étudiant-e a répondu à l'énoncé suivant :

Sur $\mathbb{C}$, donner l'ensemble de définition et le développement en série entière de $z \mapsto \frac{1}{1+z+z^2}$ en 0. Préciser le domaine de convergence.

Sa réponse est ci-dessous :

Dès $|z + z^2| < 1$, on a $\frac{1}{1+z+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z - z^2)^n$ (d'après de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$).

Le domaine de convergence est $|z + z^2| < 1$.

On $|z| + |z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (car les racines de $x^2 + x - 1 = 0$ sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$).

Donc le domaine de convergence est $\left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas, comment la changeriez-vous pour que la réponse et la rédaction soient correctes?

et R

- Commentaires sur la réponse :

- L'étudiant-e n'indique pas quel est l'ensemble de définition (demandé dans l'énoncé).
- L'expression $\sum (-z - z^2)^n$ ne constitue pas une série entière, car les séries entières font apparaître uniquement des puissances de z (avec des coefficients), mais ne font pas apparaître de puissances de « $-z - z^2$ »
- L'ensemble $\left\{z \in \mathbb{Z} \mid |z + z^2| < 1\right\}$ n'est pas un disque, et il y a une erreur pour le calculer : l'étudiant-e a remplacé la condition « $|z + z^2| < 1$ » par « $|z| + |z|^2 < 1$ », qui ne revient pas du tout au même.

- Ré-écriture de la réponse :

- Tout d'abord, on identifie les racines du polynôme $z^2 + z + 1$.

Une méthode plus rapide que le calcul du discriminant est de reconnaître une somme géométrique : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $z^2 + z + 1 = \frac{1-z^3}{1-z}$ qui s'annule en $e^{\pm 2i\pi/3}$ (de plus on vérifie que 1 n'est pas une racine).

L'ensemble de définition est donc $\mathbb{C} \setminus \{e^{-2i\pi/3}, e^{2i\pi/3}\}$.

- Dès lors, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{-2i\pi/3}, e^{2i\pi/3}\}$, on a $\frac{1}{z^2+z+1} = \frac{z-1}{z^3-1} = \frac{1}{1-z^3} - z \frac{1}{1-z^3}$, qui est égal, quand $|z| < 1$ à $\sum_{k=0}^{\infty} (z^3)^k - z \sum_{k=0}^{\infty} (z^3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} - \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k+1}$.

Les coefficients de la série entière sont donc donnés par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{3k} = 1 \\ a_{3k+1} = -1 \\ a_{3k+2} = 0. \end{cases}$$

- Le domaine de convergence est $D(0,1)$ car on a montré la convergence dans $D(0,1)$, et car la série diverge grossièrement lorsque $|z| \geq 1$.