

Exercice 1 : convergence de suites

Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer sa nature et déterminer sa limite éventuelle :

i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 + 3}{2n^2 + (-1)^n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{1+3/n^2}{2+(-1)^n/n^2}$. Or l'inégalité $-1/n^2 \leq (-1)^n/n^2 \leq 1/n^2$ donne $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n/n^2 = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$.

ii) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n \ln(n+1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on constate que $v_{2n} = \ln(2n+1)$ et que $v_{2n+1} = -\ln(2n+2)$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{2n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{2n+1} = -\infty$.

Ces deux sous suites de (v_n) n'ont pas toutes les deux la même limite, donc la suite (v_n) n'admet pas de limite (elle diverge).

iii) $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{3 + \exp(-n)}$.

Comme $\exp(-n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{1}{3}$.

Exercice 2 : Suites adjacentes

Pour deux réels a et b tels que $0 < a \leq b$, on pose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les deux suites réelles définies par :

$$u_1 = a, \quad v_1 = b, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer qu'à chaque rang $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq v_n$ et que $\sqrt{u_n v_n}$ est bien définie.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{H}_n$ la propriété « $0 \leq u_n \leq v_n$ ».

- De $0 < a \leq b$, on déduit la propriété $\mathcal{H}_1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. Alors u_n et v_n sont positifs (ou nuls) donc $\sqrt{u_n v_n}$ est bien défini (et est positif ou nul), c'est à dire que v_{n+1} est bien défini et que $v_{n+1} \geq 0$. De même $u_{n+1} \geq \frac{0+0}{2} = 0$.
De plus $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n - 4u_n v_n}{4} = \frac{(u_n - v_n)^2}{4} \geq 0$. D'où $v_{n+1}^2 \geq u_{n+1}^2$, d'où on déduit (par positivité de u_n et v_n) que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$.
D'où la propriété $\mathcal{H}_{n+1}$.
- Cela montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie (et que $\sqrt{u_n v_n}$ est bien définie car $0 \leq u_n v_n$).

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \geq u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la question précédente indique que $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n \leq \frac{2(b-a)}{2^n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\tilde{\mathcal{H}}_n$ la propriété « $v_n - u_n \leq \frac{2(b-a)}{2^n}$ ».

- Au rang 1, on a $v_1 - u_1 = b - a = \frac{2(b-a)}{2}$, donc $\tilde{\mathcal{H}}_1$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tilde{\mathcal{H}}_n$ soit vraie.
Alors $v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq \frac{\frac{2(b-a)}{2^n}}{2} = \frac{2(b-a)}{2^{n+1}}$. Cela montre bien la propriété $\tilde{\mathcal{H}}_{n+1}$.

- Cela montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\tilde{\mathcal{H}}_n$ est vraie.
4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (donc qu'elles convergent vers la même limite).
 On a déjà montré que (u_n) est croissante.
 De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{2(b-a)}{2^n}$ ce qui implique (d'après le théorème des gendarmes, où l'on utilise que $\frac{2(b-a)}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$) que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - u_n = 0$.
 Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $u_n \leq v_n$ donne $v_{n+1} \leq \frac{v_n + v_n}{2} = v_n$, d'où la décroissance de la suite (v_n) .
 Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (et ont la même limite).

Exercice 3 : Copie d'un·e étudiant·e

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

- a) Montrer que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors elle est bornée.
 b) Montrer que si une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas bornée.

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

- a) En prenant $\varepsilon = 1$, la définition de « $\lim u_n = 0$ » s'écrit : $|u_n - 0| < 1$.
 Donc $-1 < u_n < 1$, c'est
 -1. Elle est
 b) Pour $A \in \mathbb{R}$, la définition de « $\lim v_n = +\infty$ » s'écrit : $v_n > A$.
 Ainsi, on a montré que $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n > A$, ce qui est
 négation de « (v_n) est
 Donc (v_n) n'est

1. On cherche d'abord à comprendre si la réponse de cet·te étudiant·e est correcte, pour chacune des deux questions de l'énoncé :
- a) i) Si on considère par exemple la suite $\left(\frac{3}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, tend-elle vers 0? Est-elle bien majorée par 1 et minorée par -1 ?
 Oui, elle tend vers 0. De plus elle est minorée par -1 car tous les termes de la suite sont positifs. En revanche elle n'est pas majorée par 1, car le premier terme est $\frac{3}{0+1} = 3$ (qui est plus grand que 1).
- ii) Identifier l'erreur commise par cet·te étudiant·e en question a).
 Sur sa copie, cet·te étudiant·e n'a pas indiqué ce qu'était " n ", et n'a pas dit si ses affirmations étaient valables pour tous les n ou seulement pour certaines valeurs de n .
 En fait la définition de « $\lim u_n = 0$ » indique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, |u_n - 0| < 1$. Ainsi, cela indique uniquement qu'il existe un rang à partir duquel $u_n \in [-1, 1]$. Mais ça ne dit pas du tout que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-1, 1]$. On ne peut donc pas conclure que la suite soit minorée par -1 et majorée par 1.

- b) i) Si on considère par exemple la suite $(v_n) = \left(\frac{n+1}{3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, tend-elle vers $+\infty$? Montrer qu'elle ne satisfait pas « $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n > A$ ».

Oui, elle tend bien vers $+\infty$.

En posant par exemple $n = 0$ et $A = v_0$, on constate que $v_n \leq A$. On déduit que « $\exists A \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, v_n \leq A$ », ce qui est la négation de la propriété « $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n > A$ ».

Donc cette suite ne satisfait pas « $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n > A$ ».

- ii) Écrire avec des quantificateurs l'affirmation « (v_n) est majorée », ainsi que sa négation. Comparer avec ce qu'a écrit cet·te étudiant·e.

L'affirmation « (v_n) est majorée » s'écrit : $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq A$.

Sa négation s'écrit : $\forall A \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, v_n > A$.

Cela ne correspond à ce que l'étudiant·e a écrit sur sa copie : il/elle a écrit que la négation de « (v_n) est majorée » est « $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n > A$ ».

2. Rédiger sur votre copie une réponse correcte à l'énoncé auquel cet·te étudiant·e a cherché à répondre (c'est à dire, démontrer que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors elle est bornée, tandis que si une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas bornée).

- a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

En prenant $\varepsilon = 1$, la définition de « $\lim u_n = 0$ » indique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \llbracket N; +\infty \llbracket$, on ait $|u_n - 0| < 1$, d'où $-1 \leq u_n \leq 1$.

On pose alors $m = \min(u_0, u_1, \dots, u_{N-2}, u_{N-1}, -1)$ et $M = \max(u_0, u_1, \dots, u_{N-2}, u_{N-1}, 1)$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [m, M]$:

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n \geq N$, alors $-1 \leq u_n \leq 1$. Or $m \leq -1$ (car m est le minimum de plusieurs nombres parmi lesquels il y a -1 , donc m ne peut pas être plus grand que -1) et $M \geq 1$ (car M est le maximum de plusieurs nombre parmi lesquels il y a 1). Donc $m \leq u_n \leq M$.
- Si $n < N$ alors u_n est l'un de nombre que l'on a mis dans la définition de m et M comme un min et un max (on a mis tous les nombres $u_0, u_1, \dots, u_{N-2}, u_{N-1}$, cela inclut le nombre u_n puisque $n < N$). Donc on a nécessairement $m \leq u_n$ et $M \geq u_n$.

On a donc bien montré par disjonction de cas que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [m, M]$. Ainsi la suite est minorée (par m) et majorée (par M) donc elle est bornée.

- b) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$, et soit $A \in \mathbb{R}$.

La définition de « $\lim v_n = +\infty$ » indique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \llbracket N; +\infty \llbracket$, on ait $v_n > A$.

En particulier on a $v_N > A$.

Ainsi, on a montré que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : v_N > A$, ce qui est précisément la négation de « (v_n) est majorée ».

On a donc montré que si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée, en conséquence elle n'est pas non plus bornée (pour être bornée, il faut être majorée).

Exercice 4 : Borne supérieure

On considère le théorème suivant :

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Si E est non vide, majoré, et tel que $\forall x \in E, x^2 \in E$,
alors $\sup(E) \in [0, 1]$.

1. Pour chacun des ensembles suivants, indiquer s'il satisfait (ou pas) les hypothèses du théorème (c'est à dire : indiquer s'il est non vide, majoré, et tel que $\forall x \in E, x^2 \in E$).

i) $[-\frac{1}{2}, 3]$

ii) $] -\frac{1}{2}, 1[\cap \mathbb{Q}$

iii) $[-1, \frac{1}{3}[$

i) Non : 3 appartient à cet ensemble, mais son carré n'y appartient pas ($9 \notin [-\frac{1}{2}, 3]$).

ii) Oui : d'une part il est non vide (il contient 0) et majoré (par 1) et d'autre part, montrons que pour $x \in] -\frac{1}{2}, 1[\cap \mathbb{Q}$, on a $x^2 \in] -\frac{1}{2}, 1[\cap \mathbb{Q}$:

- comme $x \in \mathbb{Q}$, on a $x^2 \in \mathbb{Q}$.
- de plus, $x \in] -\frac{1}{2}, 1[=] -\frac{1}{2}, 0[\cup] 0, 1[$. Il appartient donc soit à $] -\frac{1}{2}, 0[$ (auquel cas son carré est dans $] 0, \frac{1}{4}[$) soit à $] 0, 1[$ (auquel cas son carré est dans $] 0, 1[$). Dans tous les cas $x^2 \in] -\frac{1}{2}, 1[$.

Comme x^2 est à la fois rationnel et dans $] -\frac{1}{2}, 1[$, il est bien dans $] -\frac{1}{2}, 1[\cap \mathbb{Q}$.

iii) Non : -1 appartient à cet ensemble, mais son carré n'y appartient pas ($1 \notin [-1, \frac{1}{3}[$).

2. Afin de prouver ce théorème, on considère un ensemble E qui satisfait les hypothèses du théorème, et un élément $x \in E$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |x|^{2^n} \in E$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ désignons par $\mathcal{H}_n$ la propriété « $|x|^{2^n} \in E$ ».

- $|x|^2 = x^2 \in E$, donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. De $|x|^{2^n} \in E$, on déduit que $(|x|^{2^n})^2 \in E$, c'est à dire que $|x|^{2^{n+1}} \in E$, d'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.

(b) Dédurre que $|x| \leq 1$. *Indication : On pourra montrer que la suite $(|x|^{2^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, et utiliser le résultat dont la preuve est en exercice 3.*

La suite $(|x|^{2^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 0, et elle est majorée par tout majorant de E (comme E satisfait les hypothèses du théorème, il est majoré). Donc elle est bornée. Donc $|x|$ ne peut pas être plus grand que 1 (sinon on aurait $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{2^n} = +\infty$, donc cette suite ne serait pas bornée d'après l'exercice 3).

(c) Conclure que le théorème est vrai.

Si un ensemble E satisfait les hypothèses du théorème, alors il est non-vide et majoré donc $\sup E$ existe. De plus d'après la question précédente, on a $\forall x \in E, x \leq |x| \leq 1$, donc 1 est un majorant et $\sup E \leq 1$.

Enfin comme E est non-vide, il existe un élément $e \in E$. Alors $e^2 \in E$ donc $\sup E \geq e^2 \geq 0$.

Donc on a alors $\sup E \in [0, 1]$.

3. Quelle est la réciproque de ce théorème? Cette réciproque est-elle vraie? Par exemple, permet-elle de conclure quelque chose sur l'ensemble $[-1, \frac{1}{3}[$?

La réciproque de ce théorème est « Si un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ satisfait $\sup E \in [0, 1]$, alors il est non-vide, majoré, et satisfait $\forall x \in E, x^2 \in E$ ».

Cette réciproque est fausse comme le montre par exemple l'ensemble $[-1, \frac{1}{3}[$: la borne supérieure de cet ensemble est $\frac{1}{3} \in [0, 1]$, mais toutefois on a vu que cet ensemble ne satisfait pas « $\forall x \in E, x^2 \in E$ ».

Puisqu'elle est fausse, elle ne donne aucune information sur cet ensemble $[-1, \frac{1}{3}[$.

4. Quelle est la contraposée de ce théorème ? Cette contraposée est-elle vraie ? Par exemple, permet-elle de conclure quelque chose sur l'ensemble $]1/2, 2[$?

La contraposée énonce que si un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ ne satisfait pas « $\sup E \in [0, 1]$ », alors il ne satisfait pas la condition selon laquelle « E est non vide, majoré, et tel que $\forall x \in E, x^2 \in E$ ».

Cette contraposée est vraie (puisque'elle est équivalente au théorème).

Dans le cas de l'ensemble $]1/2, 2[$, il satisfait $\sup E = 2 \notin [0, 1]$ donc il ne satisfait pas la condition selon laquelle « E est non vide, majoré, et tel que $\forall x \in E, x^2 \in E$ ». Or il est non-vide et majoré, donc il ne satisfait pas la condition « $\forall x \in E, x^2 \in E$ ».

Ainsi cette contraposée nous indique que $\exists x \in]1/2, 2[: x^2 \notin]1/2, 2[$.