

Les calculatrices et tous appareils connectés sont strictement interdits pendant l'épreuve et doivent impérativement être laissés dans les sacs, au pied de l'amphithéâtre.

La notation des copies reposera en grande partie sur la qualité de la rédaction des réponses que vous donnerez.

Exercice 1 : convergence de suites

Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer sa nature et déterminer sa limite éventuelle :

- i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 + 3}{2n^2 + (-1)^n}$.
- ii) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n \ln(n+1)$.
- iii) $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{3 + \exp(-n)}$.

Exercice 2 : Suites adjacentes

Pour deux réels a et b tels que $0 < a \leq b$, on pose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les deux suites réelles définies par :

$$u_1 = a, \quad v_1 = b, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer qu'à chaque rang $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq v_n$ et que $\sqrt{u_n v_n}$ est bien définie.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \geq u_n$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n \leq \frac{2(b-a)}{2^n}$.
4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (donc qu'elles convergent vers la même limite).

Le sujet est recto-verso, n'oubliez pas de traiter les exercices au dos.

Exercice 3 : Copie d'un·e étudiant·e

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

- a) Montrer que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors elle est bornée.
b) Montrer que si une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas bornée.

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

- a) En prenant $\varepsilon = 1$, la définition de « $\lim u_n = 0$ » s'écrit : $|u_n - 0| < 1$.
Donc $-1 < u_n < 1$, c'est-à-dire $u_n \in]-1, 1[$. Elle est bornée.
b) Pour $A \in \mathbb{R}$, la définition de « $\lim v_n = +\infty$ » s'écrit : $v_n > A$.
Ainsi, on a montré que $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n > A$, ce qui est la négation de « (v_n) est bornée ».
Donc (v_n) n'est pas bornée.

- On cherche d'abord à comprendre si la réponse de cet·te étudiant·e est correcte, pour chacune des deux questions de l'énoncé :
 - i) Si on considère par exemple la suite $(\frac{3}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, tend-elle vers 0 ? Est-elle bien majorée par 1 et minorée par -1 ?
ii) Identifier l'erreur commise par cet·te étudiant·e en question a).
 - i) Si on considère par exemple la suite $(v_n) = (\frac{n+1}{3})_{n \in \mathbb{N}}$, tend-elle vers $+\infty$? Montrer qu'elle ne satisfait pas « $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n > A$ ».
ii) Écrire avec des quantificateurs l'affirmation « (v_n) est majorée », ainsi que sa négation. Comparer avec ce qu'a écrit cet·te étudiant·e.
- Rédiger sur votre copie une réponse correcte à l'énoncé auquel cet·te étudiant·e a cherché à répondre (c'est à dire, démontrer que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors elle est bornée, tandis que si une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas bornée).

Exercice 4 : Borne supérieure

On considère le théorème suivant :

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Si E est non vide, majoré, et tel que $\forall x \in E, x^2 \in E$,
alors $\sup(E) \in [0, 1]$.

- Pour chacun des ensembles suivants, indiquer s'il satisfait (ou pas) les hypothèses du théorème (c'est à dire : indiquer s'il est non vide, majoré, et tel que $\forall x \in E, x^2 \in E$).
 - $[-\frac{1}{2}, 3]$
 - $] -\frac{1}{2}, 1[\cap \mathbb{Q}$
 - $[-1, \frac{1}{3}[$
- Afin de prouver ce théorème, on considère un ensemble E qui satisfait les hypothèses du théorème, et un élément $x \in E$.
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |x|^{2^n} \in E$.
 - Déduire que $|x| \leq 1$. Indication : On pourra montrer que la suite $(|x|^{2^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, et utiliser le résultat dont la preuve est en exercice 3.
 - Conclure que le théorème est vrai.
- Quelle est la réciproque de ce théorème ? Cette réciproque est-elle vraie ? Par exemple, permet-elle de conclure quelque chose sur l'ensemble $[-1, \frac{1}{3}[$?
- Quelle est la contraposée de ce théorème ? Cette contraposée est-elle vraie ? Par exemple, permet-elle de conclure quelque chose sur l'ensemble $]1/2, 2[$?