

Exercice 1 : Limite inférieure

Déterminer la valeur de $\liminf_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n \cosh(n))$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \cosh(n)$.

On étudie alors la sous-suite (u_{2n}) :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = -\cosh(2n)$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = -\infty$.

Donc $-\infty$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) , c'est nécessairement la plus petite valeur d'adhérence, donc $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cosh(n) = -\infty$.

Exercice 2 : Séries entières

1. i) Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$

Pour $z \in D(0,1)$, on a $|-z^2| < 1$, donc $\frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$.

C'est à dire que les coefficients de la série entière sont les $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{2n} = (-1)^n \\ a_{2n+1} = 0. \end{cases}$$

- ii) Préciser le rayon de convergence, et le domaine de convergence de la série entière ainsi obtenue (c'est à dire l'ensemble des valeurs complexes z pour lesquelles elle converge).

On a déjà vu que cette série entière converge sur $D(0,1)$, donc $R \geq 1$.

De plus, quand $|z| = 1$, la suite $(|a_n z^n|)$ a ses termes pairs égaux à 1. Donc elle ne tend pas vers 0. Donc la série $\sum a_n z^n$ diverge (quand $|z| = 1$). Donc $R \leq 1$.

En conclusion, $R = 1$ et le domaine de convergence est $D(0,1)$.

2. i) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{2+(-1)^n}{n!} z^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \frac{2+(-1)^n}{n!}$.

On a alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2+(-1)^{n+1})n!}{(2+(-1)^n)(n+1)!} = \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} \frac{1}{n+1}$.

Or $\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 1/3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Donc $0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{3}{n+1}$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, donc le rayon de convergence est $R = \infty$.

ii) Calculer la somme de cette série entière, sur l'intervalle $] -R, R[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a vu que la série entière $\sum \frac{2+(-1)^n}{n!} x^n$ converge. De plus les séries $\sum \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ (série entière de cosh) et $\sum \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ (série entière de sinh) convergent elles aussi sur $\mathbb{R}$ (leur rayon de convergence est infini).

$$\begin{aligned} \text{On peut donc écrire } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= 3 \cosh(x) + \sinh(x) \end{aligned}$$

Remarque : Une autre façon de répondre consistait à rappeler (pour $x \in \mathbb{R}$) la convergence des séries $\sum \frac{x^n}{n!}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n!} x^n$, de sommes respectives $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n &= \exp(-x), \text{ de sorte que l'on a } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\ &= 2 \exp(x) + \exp(-x) \end{aligned}$$

(c'est le même résultat que la réponse précédente.)

Exercice 3 : Rayon de convergence

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Déterminer le rayon de convergence des des séries entières ci-dessous :

a) $\sum \exp(-n) z^{2n}$

b) $\sum \left(\frac{z}{n+1}\right)^n$.

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

a) D'après

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(-(n+1))}{\exp(-n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-(n+1) + n) = \exp(-1) \end{aligned}$$

Donc $R = 1/\exp(-1) = e$.

b) Cette série entière s'écrit $\sum \frac{1}{(n+1)^n} z^n$, et on utilise le critère de Hadamard :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}.$$

On la fonction $n \mapsto \frac{1}{n+1}$ et

$$\sup \frac{1}{n+1} = \frac{1}{0+1} = 1 \text{ (le sup est}$$

atteint en $n=0$), d'où $\limsup \frac{1}{n+1} = \lim \left(\sup \frac{1}{n+1}\right) = \lim(1) = 1$.

Donc le rayon de convergence vaut 1.

1. Pour chacune des questions (a) et b)), la réponse de l'étudiant·e est-elle satisfaisante ? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux.

Cela sera très bien si vous identifiez précisément pourquoi l'étudiant·e s'est trompé·e. Mais si à la place vous démontrez rigoureusement quelque chose qui contredit une affirmation de cet·te étudiant·e cela sera accepté aussi comme réponse.

a) La réponse ne convient pas car :

- On ne peut pas écrire $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ avant de savoir si la limite existe.

- Plus globalement, le critère de d'Alembert ne s'applique que si la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ admet une limite. Tant qu'on n'a pas montré que la limite existe on ne peut pas écrire « $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ».
- A priori, le critère de d'Alembert utilise la limite de $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (l'étudiant·e a oublié la valeur absolue).
- La série entière $\sum \exp(-n)z^{2n}$ pourrait s'écrire comme $\exp(0)z^0 + \exp(-1)z^2 + \exp(-2)z^4 + \dots$, ce qui revient à $\exp(0)z^0 + 0 \cdot z^1 + \exp(-1)z^2 + 0 \cdot z^3 + \exp(-2)z^4 + 0 \cdot z^5 + \dots$. On comprend ainsi que les coefficients de la série entière sont

$$\begin{cases} 0 = a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \dots \\ a_0 = e^0, a_2 = e^{-1}, a_4 = e^{-2}, \dots \end{cases}$$

Ainsi le rapport « $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ » est nul si n est pair et infini si n est impair. Aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'existe pas en réalité.

- On verra en question suivant que le rayon de convergence vaut en fait $\sqrt{e}$.

b) La réponse ne convient pas car :

- Il aurait fallu écrire des valeurs absolues pour le critère de Hadamard. En effet ce critère énonce que $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
- La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, donc sa $\limsup$ est 0. L'erreur de l'étudiant vient d'une notation très imprécise sur la $\limsup$. Une façon de l'écrire serait $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{p \geq n} \frac{1}{p+1} \right)$, où $\sup_{p \geq n} \frac{1}{p+1} = \frac{1}{n+1}$ (par décroissance de $p \mapsto \frac{1}{p+1}$), d'où il découle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{p \geq n} \frac{1}{p+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$.

Remarque : Dans le raisonnement ci-avant on a écrit des égalités entre limites. L'existence de ces limites découlait du fait que, comme vu la cours, la $\limsup$ existe toujours.

2. Pour chacune des questions (a) et b)), si vous avez jugé que la réponse de l'étudiant·e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrire complètement la réponse en donnant une réponse correcte et satisfaisante.

- a) • Soit $z \in D(0, \sqrt{e}) \setminus \{0\}$. On considère la série $\sum \exp(-n)z^{2n}$, donc pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \exp(-n)z^{2n}$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\exp(-(n+1))}{\exp(-n)} \left|\frac{z^{2(n+1)}}{z^{2n}}\right| = e^{-1}|z^2|$. Or $|z| < \sqrt{e}$, donc $e^{-1}|z^2| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = e^{-1}|z^2| < 1$ donc la série $\sum u_n$ converge absolument quand $0 \neq |z| < \sqrt{e}$.
Il en découle que $R \geq \sqrt{e}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \sqrt{e}$. À nouveau, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \exp(-n)z^{2n}$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = e^{-1}|z^2|$. Or $|z| > \sqrt{e}$, donc $e^{-1}|z^2| > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = e^{-1}|z^2| > 1$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement quand $|z| > \sqrt{e}$. Il en découle que $R \leq \sqrt{e}$.

Donc le rayon de convergence est $\sqrt{e}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Or $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$, donc $0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$.

Donc d'après de le critère de d'Alembert, le rayon de convergence est infini.

Exercice 4 : Convergence simple, ou uniforme ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1 + \exp(x - n)} \end{cases}$

1. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{1}{1 + \exp(x - n)}$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x - n) = 0$ donc

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \exp(x - n)} = 1$, c'est à dire $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$.

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction constante égale à 1, sur $\mathbb{R}$.

2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On cherche à calculer $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 1|$ (si ce sup existe).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $|f_n(x) - 1| = \left| \frac{1}{1 + \exp(x - n)} - 1 \right| = \left| \frac{-\exp(x - n)}{1 + \exp(x - n)} \right|$ en mettant au même dénominateur .
 $= \left| \frac{-1}{\exp(n - x) + 1} \right|$ en factorisant par $\exp(x - n)$ au numérateur
et au dénominateur
 $= \frac{1}{\exp(n - x) + 1}$ par positivité de l'exponentielle

Or $x \mapsto \exp(n - x) + 1$ est décroissante et positive, donc $x \mapsto \frac{1}{\exp(n - x) + 1}$ est croissante. De plus $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(n - x) + 1} = 1$ (car $\exp(n - x)$ tend vers 0).

Ainsi, on obtient que (pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire), $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 1| = 1$.

Il découle que la suite $\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 1| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, c'est à dire que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$. (Et elle ne peut pas converger uniformément vers une autre fonction non plus, car elle converge simplement vers la fonction constante égale à 1.)

3. Pour $a \in \mathbb{R}$, la convergence est-elle uniforme sur $] - \infty ; a]$?

Le calcul est le même que précédemment :

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on cherche à déterminer $\sup_{x \in [a ; +\infty[} |f_n(x) - 1|$ (si ce sup existe).

On a déjà vu que pour $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - 1| = \frac{1}{\exp(n - x) + 1}$, et que $x \mapsto \frac{1}{\exp(n - x) + 1}$ est croissante.

Son sup est donc atteint en $x = a$. Donc $\sup_{x \in [a ; +\infty[} |f_n(x) - 1| = \frac{1}{\exp(n - a) + 1}$.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n - a) = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(n - a) + 1} = 0$.

On a montré que la suite $\left(\sup_{x \in] - \infty ; a]} |f_n(x) - 1| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, c'est à dire que la suite (f_n) converge uniformément sur $] - \infty ; a]$ vers la fonction constante égale à 1.

Exercice 5 : Équivalence de suites et de séries

Rappel : Si vous ne savez pas traiter certaines questions vous pouvez admettre le résultat pour l'utiliser dans les questions suivantes.

1. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Rappelez la définition de la propriété « $a_n \sim b_n$ »

Cela signifie qu'il existe une suite (c_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1 \\ \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, a_n = b_n c_n \end{cases}$$

2. Soient désormais deux suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, (1 - \varepsilon) x_n \leq y_n \leq (1 + \varepsilon) x_n.$$

- a) Montrer qu'il existe un rang N_1 à partir duquel x_n s'annule si et seulement y_n s'annule aussi.

C'est à dire qu'il faut montrer que $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket, (x_n = 0 \Leftrightarrow y_n = 0)$.

On applique la propriété de l'énoncé pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$: il existe un rang N_1 tel que pour $n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket$, on ait $\frac{1}{2}x_n \leq y_n \leq \frac{3}{2}x_n$.

Soit $n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket$. Si $x_n = 0$ alors $0 \leq y_n \leq 0$, ce qui montre que « $x_n = 0 \Rightarrow y_n = 0$ ».

Réciproquement si $y_n = 0$, alors on a $\frac{1}{2}x_n \leq 0 \leq \frac{3}{2}x_n$. Or $\frac{1}{2}x_n \leq 0$ indique que $x_n \leq 0$ tandis que $0 \leq \frac{3}{2}x_n$ indique que $x_n \geq 0$. Il en découle que $x_n = 0$, de sorte qu'on a montré que « $y_n = 0 \Rightarrow x_n = 0$ ».

Ces propriétés ayant été montrées pour n'importe quel $n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket$, on a bien montré que $\forall n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket, (x_n = 0 \Leftrightarrow y_n = 0)$.

- b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n = 0 \\ \frac{y_n}{x_n} & \text{si } x_n \neq 0. \end{cases}$

- i) Étudier la convergence de la suite (z_n) .

- ii) En déduire que $x_n \sim y_n$.

On désigne par N_1 le rang trouvé en question a)

- i) Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, (1 - \varepsilon) x_n \leq y_n \leq (1 + \varepsilon) x_n$. Alors, en posant $N_2 = \max(N, N_1)$, on constate que pour $n \in \llbracket N_2; +\infty \llbracket$, on a soit $x_n = y_n = 0$ (et dans ce cas $z_n = 1$) soit $x_n \neq 0$ (et dans ce cas $z_n = \frac{y_n}{x_n} \in [1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon]$). Dans les deux cas, on a $1 - \varepsilon \leq z_n \leq 1 + \varepsilon$, c'est à dire $|1 - z_n| \leq \varepsilon$. On a donc montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N_2; +\infty \llbracket, |1 - z_n| \leq \varepsilon$, c'est à dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

- ii) De plus, pour $n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket$, on a soit $x_n = y_n = 0$, soit $z_n = \frac{y_n}{x_n}$, ce qui donne dans les deux cas $y_n = z_n x_n$.

Il en découle que $x_n \sim y_n$.

3. Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives (c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_n \geq 0$ et $\beta_n \geq 0$). Montrer que

$$(\alpha_n \sim \beta_n) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, (1 - \varepsilon) \alpha_n \leq \beta_n \leq (1 + \varepsilon) \alpha_n).$$

Indication : il y a l'un des deux sens de l'équivalence pour lequel il suffit d'utiliser une question précédente.

- Tout d'abord, on note que l'implication $\Leftarrow$ a déjà été montrée en question 2
- Réciproquement, si $\alpha_n \sim \beta_n$, alors il existe une suite (γ_n) et un rang N_3 tels que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 1 \\ \forall n \in \llbracket N_3; +\infty \llbracket, \beta_n = \alpha_n \gamma_n. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 1$, il existe un rang N_4 tel que pour $\forall n \in \llbracket N_4; +\infty \llbracket$, $1 - \varepsilon \leq \gamma_n \leq 1 + \varepsilon$.

On pose $N = \max(N_3, N_4)$, et on a alors, pour $n \in \llbracket N; +\infty \llbracket$:

$$(1 - \varepsilon) \alpha_n \leq \underbrace{\alpha_n \gamma_n}_{\beta_n} \leq (1 + \varepsilon) \alpha_n.$$

On a donc bien montré que (sous l'hypothèse que $\alpha_n \sim \beta_n$),

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, (1 - \varepsilon) \alpha_n \leq \beta_n \leq (1 + \varepsilon) \alpha_n.$$

4. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives, telles que $u_n \sim \nu_n$, et que la série $\sum u_n$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.

- a) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \forall p \in \llbracket m; +\infty \llbracket$,

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=m}^p u_k \leq \sum_{k=m}^p \nu_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=m}^{\infty} u_k.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et équivalentes, la question 3 indique l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, (1 - \varepsilon) u_n \leq \nu_n \leq (1 + \varepsilon) u_n$.

Soient $m \in \llbracket N; +\infty \llbracket$ et $p \in \llbracket m; +\infty \llbracket$.

Comme $\forall k \in \llbracket m; p \llbracket, (1 - \varepsilon) u_k \leq \nu_k \leq (1 + \varepsilon) u_k$, on obtient :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=m}^p u_k \leq \sum_{k=m}^p \nu_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=m}^p u_k.$$

De plus la positivité des termes donne $(1 + \varepsilon) \sum_{k=m}^p u_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=m}^{\infty} u_k$, d'où l'inégalité

$$\text{demandée : } (1 - \varepsilon) \sum_{k=m}^p u_k \leq \sum_{k=m}^p \nu_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=m}^{\infty} u_k.$$

On a donc bien montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \forall p \in \llbracket m; +\infty \llbracket$,

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=m}^p u_k \leq \sum_{k=m}^p \nu_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=m}^{\infty} u_k$$

- b) Dédurre que l'on peut définir une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $q_n = \sum_{k=n}^{\infty} \nu_k$, et que cette suite satisfait « $q_n \sim r_n$ ».

Existence Pour $\varepsilon = 1$, par exemple, on obtient un rang N_5 tel que $\forall m \in \llbracket N_5; +\infty \llbracket$,

$$\forall p \in \llbracket m; +\infty \llbracket, \sum_{k=m}^p \nu_k \leq 2 \sum_{k=m}^{\infty} u_k.$$

Ainsi, pour $m \in \llbracket N_5; +\infty \llbracket$ fixé, la suite $\left(\sum_{k=m}^n \nu_k \right)_{n \in \llbracket m; +\infty \llbracket}$ est croissante (par

positivité des termes) et majorée ($2 \sum_{k=m}^{\infty} u_k$ est un majorant), donc elle converge,

d'où l'existence de $\sum_{k=m}^{\infty} \nu_k$.

Cela montre la convergence de $\sum_{k=m}^{\infty} \nu_k$ quand $m \geq N_5$.

Si $m < N_5$, on procède de même avec la majoration $\sum_{k=m}^p \nu_k \leq \sum_{k=m}^{N_5-1} \nu_k + \sum_{k=N_5}^{\infty} \nu_k$,
et on obtient encore l'existence de $\sum_{k=m}^{\infty} \nu_k$.

Remarque : Ce n'était pas l'esprit de cet exercice, mais si vous aviez dit que q_n existe car $\sum \nu_n$ converge par comparaison de séries positives (en utilisant donc le théorème du cours), cela donnait quand même les points à la question.

Équivalence Pour $\varepsilon > 0$ on a vu qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $m \in \llbracket N ; +\infty \llbracket$ et $p \in \llbracket n ; +\infty \llbracket$ on ait $(1 - \varepsilon) \sum_{k=m}^p u_k \leq \sum_{k=m}^p \nu_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=m}^{\infty} u_k$.

Ceci étant vrai pour tout $p \in \llbracket n ; +\infty \llbracket$, il découle une inégalité sur les limites :
 $(1 - \varepsilon) \sum_{k=m}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=m}^{\infty} \nu_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=m}^{\infty} u_k$.

Ainsi on a $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \in \llbracket N ; +\infty \llbracket, (1 - \varepsilon) r_m \leq q_m \leq (1 + \varepsilon) r_m$.

D'après la question 2, cela indique que $q_n \sim r_n$.

- c) Si on désigne par $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum \nu_n$ (c'est à dire que pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $t_n = \sum_{k=0}^n \nu_k$), a-t-on nécessairement aussi
« $s_n \sim t_n$ » ?

Indication : vous pourrez construire un contre-exemple en modifiant le premier terme de la série convergente de votre choix.

On peut par exemple désigner par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite nulle et définir la suite $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} \nu_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \nu_n = 0. \end{cases}$

Ces deux suites sont positives, $u_n \sim \nu_n$ (car ces deux suites sont égales excepté au premier rang). De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les sommes partielles sont $s_n = 0$ et $t_n = 1$. Ainsi la série $\sum u_n$ converge.

Donc cet exemple satisfait toutes les hypothèses de cette question 4.

En revanche, la condition « $s_n \sim t_n$ » n'est pas satisfaite (car s_n tend vers 0 tandis que t_n tend vers 1).

Donc de manière générale, sous les hypothèses de la question 4, on n'a pas nécessairement « $s_n \sim t_n$ ».