

Exercice 1 : Convergence de suites et de séries

- I. 1. Déterminer la limite supérieure de la suite $\left(\frac{n+5}{n+3} \cos\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Explication optionnelle, pour comprendre l'intuition : On remarque tout d'abord que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n+3} = 1$,

$$\text{tandis que pour } n \in \mathbb{N}, \cos\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right) = \begin{cases} \sqrt{2}/2 & \text{si } n \equiv 0[4] \text{ ou } n \equiv 3[4] \\ -\sqrt{2}/2 & \text{si } n \equiv 1[4] \text{ ou } n \equiv 2[4] \end{cases}$$

On déduit que la sous-suite des termes congrus à 0 ou 3 modulo 4 tend vers $\sqrt{2}/2$, et que la sous-suite des termes congrus à 1 ou 2 modulo 4 tend vers $-\sqrt{2}/2$, et on devine alors que les valeurs d'adhérences sont $\{-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$ et donc la limite supérieure est $\sqrt{2}/2$. On en rédige donc une preuve ci-dessous.

Exemple de rédaction, sur la copie : Tout d'abord on remarque que la sous-suite (u_{4n}) tend vers $\sqrt{2}/2$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, \cos\left(\frac{8n+1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Donc $\sqrt{2}/2$ est une valeur d'adhérence. Montrons que c'est la plus grande valeur d'adhérence :

Soit ℓ une autre valeur d'adhérence. Alors il existe une sous suite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers ℓ . Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{\varphi(n)}| = |\ell|$. Or $\lim |u_n| = \sqrt{2}/2$, donc la suite $(|u_{\varphi(n)}|)$ tend nécessairement vers $\sqrt{2}/2$ (comme sous-suite d'une suite convergente). Donc $|\ell| = \sqrt{2}/2$, qui implique que $\ell \leq \sqrt{2}/2$.

On a bien montré que $\sqrt{2}/2$ était la plus grande valeur d'adhérence, donc c'est la limite supérieure.

2. Déterminer la limite supérieure de la suite $\left(\sqrt{\exp(-n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Exemple de rédaction, sur la copie : On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n) = 0$ (et l'exponentielle est toujours positive), donc par continuité de la racine carré sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\exp(-n)} = 0$. Il en découle que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\exp(-n)} = 0$.

Remarque sur la notion de $\limsup$ (inutile sur une copie) : Si on avait voulu utiliser la définition de la $\limsup$, alors cette définition est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{p \in [n; +\infty[} \sqrt{\exp(-p)} \right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $p \mapsto \sqrt{\exp(-p)}$ est décroissante sur $[n; +\infty[$, donc $\sup_{p \in [n; +\infty[} \sqrt{\exp(-p)} = \sqrt{\exp(-n)}$ (le sup est la valeur au début de l'intervalle).

$$\text{Donc } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\exp(-n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\sup_{p \in [n; +\infty[} \sqrt{\exp(-p)} \right)}_{\sqrt{\exp(-n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\exp(-n)} = 0.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \frac{\exp(-1/n)}{n}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exemple de rédaction, sur la copie : On rappelle tout d'abord que $\exp(x) = 1 + x + o(x)$.

$$\text{Donc } \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o(1/n) \text{ et } \frac{1}{n} - \frac{\exp(-1/n)}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(1/n^2) \\ \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n^2} + o(1/n^2).$$

On en déduit que la suite u_n est équivalente à $1/n^2$ qui est le terme général d'une série convergente. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ (car $\exp(-1/n) < 1$), donc par comparaison de séries positives, $\sum u_n$ converge.

Remarque (inutile sur une copie) : On pouvait être tenté de l'analyser comme une somme de deux séries : en effet les sommes partielles pour $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrivent

$$\sum_{k=1}^n u_k = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{-\exp(-1/k)}{k} \right). \text{ La première somme diverge (la série } \sum \frac{1}{n} \text{ est une série de Riemann, qui diverge). La deuxième diverge aussi car } \sum \frac{\exp(-1/n)}{n} \text{ diverge car ses termes sont positifs } (\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\exp(-1/n)}{n} > 0) \text{ et équivalents à } 1/n \text{ (} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-1/n) = 1 \text{ donc } \frac{\exp(-1/n)}{n} \sim \frac{1}{n} \text{).}$$

Ansï, on a la somme de deux séries divergentes, mais cela ne permet pas du tout de dire si ça donne une série convergente ou une série divergente. En effet, la somme de deux séries divergentes est parfois divergente (par exemple $\sum(n + n)$) et parfois convergente (par exemple $\sum(n - n)$).

4. Pour chacune des suite (v_n) ci dessous, quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{v_n}}{\sqrt{v_n}}$?

$$\text{i) } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n^2 \qquad \text{ii) } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = n! \qquad \text{iii) } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left\lceil \frac{1}{n} \right\rceil$$

i) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(-1)^{n^2} = (-1)^n$, donc $\frac{(-1)^{v_n}}{\sqrt{v_n}} = \frac{(-1)^n}{n}$. Or la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante, et elle tend vers 0. Donc d'après le critère des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, c'est à dire que la série $\sum \frac{(-1)^{v_n}}{\sqrt{v_n}}$ converge.

ii) Pour $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$, $n!$ est pair, donc $(-1)^{n!} = 1$. Cette série est donc positive (à partir du rang $n = 2$), on peut utiliser le critère de d'alembert :

Pour $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$, on a $\frac{(-1)^{v_{n+1}}}{\sqrt{v_{n+1}}} / \frac{(-1)^{v_n}}{\sqrt{v_n}} = \sqrt{\frac{n!}{n+1!}} = 1/\sqrt{n+1}$, ce qui tends vers 0. Donc la série $\sum \frac{(-1)^{v_n}}{\sqrt{v_n}}$ converge.

iii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, donc $\left\lceil \frac{1}{n} \right\rceil = 1$, d'où $v_n = 1$ et $\frac{(-1)^{v_n}}{\sqrt{v_n}} = -1$. Donc la série diverge grossièrement.

II. Copie d'un·e étudiant·e

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

a)

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = nu_n \end{cases}$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n/n^2$.

b) Quelle est la nature de la suite $((-1)^n \exp(-n^2))_{n \in \mathbb{N}}$? Si elle converge, déterminer sa limite.

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n : \ll u_n = 0 \gg$

initialisation Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$, d'où $\mathcal{P}_0$

hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\text{Alors } u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+1)0 \text{ par hyp. } \mathcal{P}_n \\ = 0$$

conclusion on a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$

Il en découle que $\sum u_n/n^2$ converge.

b) $\lim ((-1)^n \exp(-n^2)) = \lim((-1)^n) \times \lim(\exp(-n^2)) = \pm 1 \times 0 = 0$

1. Pour chacune des questions (a) et b)), la réponse de l'étudiant-e est-elle correcte? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux.

a) La propriété montrée par récurrence est clairement fautive (elle est incompatible avec la définition qui dit déjà que $u_1 = 1$). L'erreur consiste à utiliser la relation $u_{n+1} = nu_n$ en $n = -1$ (pour l'initialisation), alors u_{-1} n'existe pas et que la propriété $u_{n+1} = nu_n$ n'est valable que pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Cet étudiant-e a écrit le symbole $\lim$ avant de savoir si la limite existe. En particulier, il/elle a écrit « $\lim(-1)^n$ » alors que « $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ » n'existe pas.

2. Pour chacune des questions (a) et b)), si vous avez jugé que la réponse de l'étudiant-e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrire complètement la réponse en donnant une réponse correcte et satisfaisante.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = (n-1)!$, et on va commencer par montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n$:

Pour cela, on observe que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait

$$\begin{cases} v_1 = 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = n! = n \times (n-1)! = nv_{n-1} \end{cases}$$

donc elle est égale à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Remarque : la preuve ci-dessus aurait tout aussi bien pu être rédigée avec une récurrence, cela revient au même.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $0 < u_n$, et $\frac{u_{n+1}}{(n+1)^2} / \frac{u_n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n!}{(n-1)!} = (1 + 1/n)^2 n$, ce qui tend vers $+\infty$. On en déduit que la série $\sum u_n/n^2$ diverge.

- b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $-\exp(-n^2) \leq (-1)^n \exp(-n^2) \leq \exp(-n^2)$. Or $-\exp(-n^2)$ et $\exp(-n^2)$ tendent vers 0, donc d'après le théorème des gendarmes, la suite $((-1)^n \exp(-n^2))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 2 : Encadrement d'une série

Cet exercice porte sur les séries de la forme $\sum f'(n)$ où $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et où f' est la dérivée de f).

I. Nature de $\sum f'(n)$ dans le cas où f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$

On considère dans cette question le cas où la fonction f' est croissante.

- Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis, et l'utiliser pour démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1)$.

- Le théorème des accroissements finis énonce que, si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ (où $a < b$), alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par le théorème des accroissements finis, comme $f \in \mathcal{C}^1([n; n+1])$, il existe $c \in [n; n+1]$ tel que $f(n+1) - f(n) = (n+1 - n) f'(c)$. Comme f' est croissante, on obtient $f'(n) \leq f'(c) \leq f'(n+1)$, d'où $f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1)$.

- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) - f(n-1) \leq f'(n) \leq f(n+1) - f(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède on a

$$\begin{cases} f'(n) \leq f(n+1) - f(n) & \text{(partie gauche de l'inégalité précédente au rang } n, \\ & \text{où on peut bien utiliser cette inégalité car } n \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}). \\ f'(n) \geq f(n) - f(n-1) & \text{(partie droite de l'inégalité précédente au rang } n-1, \\ & \text{où on peut bien utiliser cette inégalité car } n-1 \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

d'où l'on déduit bien l'inégalité demandée.

- Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'(0) + f(n) - f(0) \leq \sum_{k=0}^n f'(k) \leq f(n+1) - f(0)$.

Tout d'abord, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'(n) \leq f(n+1) - f(n)$, on obtient que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n f'(k) \leq \sum_{k=0}^n f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(0).$$

De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f'(n) \geq f(n) - f(n-1)$, on obtient que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n f'(k) = f'(0) + \sum_{k=1}^n f'(k) \geq f'(0) + \sum_{k=1}^n f(k) - f(k-1) = f'(0) + f(n) - f(0).$$

On a ainsi montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f'(0) + f(n) - f(0) \leq \sum_{k=0}^n f'(k) \leq f(n+1) - f(0)$.

4. Montrer que $(f'(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est soit « tout le temps négative » soit « positive à partir d'un certain rang ». En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f'(k)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

indication : on pourra commencer par étudier la négation de « (u_n) est tout le temps négative »

Il s'agit de montrer que si $(f'(n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas « tout le temps négative », alors elle est « positive à partir d'un certain rang » :

Supposons donc qu'elle n'est pas tout le temps négative, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f'(N) > 0$. Alors par croissance de f' on a : $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, f'(n) \geq f'(N) \geq 0$, ce qui montre bien que $(f'(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

Montrons désormais que les sommes partielles admettent une limite :

1^{er} cas : si $(f'(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est tout le temps négative Dans ce cas la suite des sommes partielles est décroissante, donc soit elle admet une limite finie, soit elle tend vers $-\infty$.

2^{ème} cas : si $(f'(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang Dans ce cas la suite des sommes partielles est croissante à partir d'un certain rang, donc soit elle admet une limite finie, soit elle tend vers $+\infty$.

5. De même, justifier que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1^{er} cas : si $(f'(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est tout le temps négative Dans ce cas la suite $(f(n))$ est décroissante car $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1) \leq 0$. Donc soit elle admet une limite finie, soit elle tend vers $-\infty$.

2^{ème} cas : si $(f'(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang Dans ce cas la suite $(f(n))$ est croissante à partir d'un certain rang, car $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) - f(n) \geq f'(n)$. Donc soit elle admet une limite finie, soit elle tend vers $+\infty$.

6. Conclure que la série $\sum f'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}$.

On rappelle que « $\sum f'(n)$ converge » signifie que la suite de ses sommes partielles admet une limite finie.

Maintenant que l'on sait que limites existent, on peut passer à la limite dans la question 3.. On obtient :

$$f'(0) - f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f'(n) \leq -f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$$

Donc si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ est finie, cet encadrement indique que $\sum_{n=0}^{+\infty} f'(n)$ ne peut être ni $+\infty$ ni $-\infty$, donc on a alors la convergence de $\sum f'(n)$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} f'(n)$ est finie, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ ne peut ni être $+\infty$ (car $f'(0) - f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f'(n)$) ni $-\infty$ (car $\sum_{n=0}^{+\infty} f'(n) \leq -f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$), donc on a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}$.

On a bien montré que $\sum f'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}$.

II. Généralisations (ne nécessite pas d'avoir réussi les questions précédentes, mais utilise leur résultat)

1. On considère ici le cas où la fonction f' est décroissante :

Dans ce cas là, la fonction $-f$ a-t-elle une dérivée croissante ? Ou décroissante ? En déduire que $\sum f'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}$.

La dérivée de la fonction $-f$ est la fonction $x \mapsto -f'(x)$, qui est croissante (car f' est décroissante).

Comme la fonction $-f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de dérivée croissante, on peut lui appliquer le résultat de la question 1 : $\sum -f'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} -f(n) \in \mathbb{R}$.

Or la convergence de $\sum -f'(n)$ est équivalente à la convergence de $\sum f'(n)$, et l'affirmation $\lim_{n \rightarrow \infty} -f(n) \in \mathbb{R}$ est équivalente à $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}$. Donc on obtient bien que $\sum f'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}$.

2. On considère enfin un $m \in \mathbb{N}$, et une fonction $g : [m; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ est dont la dérivée est monotone. On désigne par $\sum_{n \geq m} g'(n)$ la série dont les termes

commencent au rang m et dont les sommes partielles sont (pour $n \in \llbracket m; +\infty \rrbracket$)

$$s_n = \sum_{k=m}^n g'(k).$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq m} g'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \in \mathbb{R}$.

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x+m) \end{cases}$ est de classes $(C)^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus sa dérivée est

monotone, donc elle est soit croissante (auquel cas on peut utiliser la partie I.) soit décroissante (auquel cas on peut utiliser la question II.1.).

Dans les deux cas on obtient que la série $\sum_{n \geq 0} f'(n)$ converge si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}.$$

Or la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} f'(n)$ (c'est à dire la série $\sum_{n \geq 0} g'(n+m)$) revient au même que la convergence de la série $\sum_{n \geq m} g'(n)$ (il y a juste un changement d'indice),

et la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ (c'est à dire $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n+m)$) est égale à $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$ (l'existence de ces limites est prouvée par les questions précédentes).

On obtient donc bien que la série $\sum_{n \geq m} g'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \in \mathbb{R}$.

III. Exemple

(ne nécessite pas d'avoir réussi les questions précédentes, mais utilise leur résultat)

Soit $\alpha > 0$. On va utiliser dans cette question les résultats des questions précédentes pour déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln n))^\alpha}$.

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}^*$, déterminer la dérivée de la fonction $g : \begin{cases} [3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 / (\ln(\ln(x)))^\beta \end{cases}$.

On pose $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto 1/x^\beta \end{cases}$, $\varphi : \begin{cases}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$, et $\psi : \begin{cases} [3; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[\\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$.

On remarque alors que $g = h \circ \varphi \circ \psi$. On remarque aussi que ψ est à valeurs dans $]1; +\infty[$ car $3 > \exp(1)$, et que c'est cela qui garantit que g soit bien défini (pas de

division par zéro).

On en déduit que pour $x \in [3; +\infty[$, on a

$$g'(x) = h'(\varphi \circ \psi(x))\varphi'(\psi(x))\psi'(x) = \frac{-\beta}{(\ln(\ln(x)))^{\beta+1}} \times \frac{1}{\ln(x)} \times \frac{1}{x} = \frac{-\beta}{x \ln(x)(\ln(\ln(x)))^{\beta+1}}$$

2. En déduire que la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)(\ln(\ln n))^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

En posant $\beta = \alpha - 1$, on obtient (pour $n \geq 3$) $g'(n) = \frac{-\beta}{x \ln(x)(\ln(\ln(x)))^\alpha}$ qui (après division par $-\beta$) nous donnera la série de l'énoncé. On procède à une disjonction de cas :

Si $\alpha > 1$, alors $\beta > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 0$. De plus $x \mapsto x \ln(x)(\ln(\ln(x)))^{\beta+1}$ est croissante et positive sur $[3; +\infty[$ (comme produit de fonctions croissantes positives), donc $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)(\ln(\ln(x)))^{\beta+1}}$ est décroissante et donc g' est croissante. On peut donc appliquer la question II.2. et déduire (comme $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 0$) que la série $\sum g'(n)$ converge, ce qui implique (après division par $-\beta$) que la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)(\ln(\ln n))^\alpha}$ converge.

Si $\alpha < 1$, alors $-1 < \beta < 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$. De plus $x \mapsto x \ln(x)(\ln(\ln(x)))^{\beta+1}$ est croissante et positive sur $[3; +\infty[$ (comme produit de fonctions croissantes positives), donc $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)(\ln(\ln(x)))^{\beta+1}}$ est décroissante et donc g' est décroissante. On peut donc appliquer la question II.2. et déduire (comme $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = +\infty$) que la série $\sum g'(n)$ diverge, ce qui implique (après division par $-\beta$) que la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)(\ln(\ln n))^\alpha}$ diverge.