

Exercice 1 : Bornes supérieure et inférieure

sur 9 points

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\},$$

$$B = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$C = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$\text{et } D = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}.$$

1. Quelles sont la borne supérieure et la borne inférieure de A ? Ces bornes sont-elles atteintes ? *Contrairement à toutes les autres questions, la réponse à cette question sera acceptée même sans démonstration.*

$A =]-\sqrt{2} ; \sqrt{2}[$, donc $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$, et ces bornes ne sont pas atteintes.

2. Démontrer que si une suite d'éléments d'un ensemble E tend vers un majorant m de E alors on a : $\sup E = m$.

Soit m un majorant de E tel qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de E qui tendent vers m.

Soit m' un autre majorant de E. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq m'$, donc par passage à la limite, $m = \lim u_n \leq m'$. Ainsi tous les autres majorants de E sont supérieurs ou égaux à m.

Donc m est le plus petit majorant de E, c'est donc sa borne supérieure.

Remarque : il était aussi possible de le montrer en utilisant la caractérisation de la borne supérieure, c'est à dire en montrant que $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq m - \epsilon$.

Pour répondre aux questions suivantes, on admettra sans démonstration que le même résultat existe pour les bornes inférieures : si une suite d'éléments d'un ensemble E tend vers un minorant m de E alors $\inf E = m$.

3. En justifiant vos réponses, déterminer les bornes supérieures et inférieures de chacun des ensembles B, C et D. Ces bornes sont elles atteintes ?

B) Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$, on obtient que 0 est un minorant et 1 est un majorant. De plus $0 \in B$ (il correspond à $n = 1$) donc c'est un minimum (une borne inférieure qui est atteinte).

Enfin la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite à valeur dans B qui tends vers 1 (qui est un majorant) donc 1 est une borne supérieure. Elle n'est pas atteinte car $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} < 1$.

C) (première étape pas nécessaire mais peut aider à comprendre : en regardant les premiers termes on comprend que l'ensemble contient 0 (pour $n = 1$), $\frac{3}{2}$ (pour $n = 2$), $-\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $-\frac{4}{5}$, $\frac{7}{6}$ etc, avec des termes qui se rapprochent de 1 (termes pairs) et de -1 (termes impairs). On devine alors que le plus grand est $\frac{3}{2}$ et la borne inférieure est -1, comme on va le montrer ci-dessous :)

Pour $n = 1$, $(-1)^n + \frac{1}{n} = 0$ tandis que pour $n \in \llbracket 2 ; +\infty \rrbracket$, on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, d'où $-1 < (-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$. Par disjonction de cas (en séparant $n = 1$ des autres), on donc montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < (-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$.

Donc -1 est un minorant et $\frac{3}{2}$ est un majorant. Or $\frac{3}{2} \in C$ (il correspond à $n = 2$) donc c'est un maximum (borne supérieure qui est atteinte). De plus la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeur dans C (on a pris les termes impairs de la définition de C) et tend vers -1 (qui est un minorant), donc -1 est la borne inférieure. Elle n'est pas atteinte car $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < (-1)^n + \frac{1}{n}$.

D) On constate tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \frac{1}{n} \leq 1$. Quand on fait l'union avec $\{0\}$, on obtient que $D \subset [0,1]$. Donc 0 est un minorant et 1 est un majorant. De plus 0 et 1 sont dans D , donc ils sont respectivement minimum (borne inférieure qui est atteinte) et maximum (borne supérieure qui est atteinte).

4. Étant donnés F et G deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on désigne par FG l'ensemble $FG = \{ xy \mid (x,y) \in F \times G \}$ (où xy désigne le produit de x par y).

(a) Lorsque $F = [-1,1]$ et $G = [-1,0]$, démontrez que $FG = [-1,1]$.

⊂) Si $x \in [-1,1]$ et $y \in [-1,0]$, alors $|xy| = |x| |y| \leq 1 \cdot 1 = 1$ donc $FG \subset [-1,1]$.

⊃) Soit $z \in [-1,1]$. On pose $x = -z \in F$ et $y = -1 \in G$, et on a $z = xy \in FG$.
donc $[-1,1] \subset FG$

On a bien montré que $FG = [-1,1]$.

(b) Soient F et G deux sous-ensembles non vides de l'intervalle $[1;2]$. Démontrer que $\sup(FG) = \sup(F) \sup(G)$.

Dans votre démonstration, il faudra dire clairement à quel moment vous utilisez le fait que F et G soient inclus dans $[1;2]$.

- Tout d'abord, F , G , et FG sont non vides, F et G sont majorés par 2 et FG est majoré par 4 . Donc $\sup(FG)$, $\sup F$, et $\sup G$ existent bien, en on peut se poser la question de l'égalité entre $\sup(FG)$ et $\sup(F) \sup(G)$.
- Pour tout $(x,y) \in F \times G$, on a $0 < x \leq \sup F$ et $0 < y \leq \sup G$ donc $0 < xy \leq \sup(F) \sup(G)$ (où la positivité découle de l'inclusion de F et G dans $[1,2]$). Donc $\sup(F) \sup(G)$ est un majorant de FG .
- Pour conclure que c'est une borne supérieure, on cherche à montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists z \in FG : z > \sup(F) \sup(G) - \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$. Par caractérisation $\sup F$ et de $\sup G$, il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x > \sup(F) - \epsilon/4$ et $y > \sup(G) - \epsilon/4$.

Alors $xy > x(\sup(G) - \epsilon/4) = x\sup(G) - x\epsilon/4$, (où l'inégalité découle de $x > 0$)
 $> (\sup(F) - \epsilon/4)\sup(G) - x\epsilon/4$, (car $\sup G > 0$).

Or $\sup(G) + x \leq 4$ (on rappelle que F et G sont majorés par 2) donc
 $xy > \sup(F)\sup(G) - \epsilon \frac{\sup(G)+x}{4} \geq \sup(F)\sup(G) - \epsilon$.

Cela permet bien de conclure que $\sup(FG) = \sup(F) \sup(G)$ (car on a montré que $\sup(F) \sup(G)$ est un minorant et que $\forall \epsilon > 0, \exists z \in FG : z > \sup(F) \sup(G) - \epsilon$).

(c) Dans cette question, on ne suppose plus que F et G soient inclus dans $[1;2]$.

Si on suppose que F et G sont des sous ensembles non-vides bornés de $\mathbb{R}$, a-t-on nécessairement $\sup(FG) = \sup(F) \sup(G)$?

Indication : Pour montrer que ce n'est pas le cas il suffit de trouver un contre-exemple.

On pose $F = [-1,1]$ et $G = [-1,0]$. Alors $FG = [-1,1]$

et $\sup(FG) = 1 \neq 0 = \sup(F) \sup(G)$.

Ce contre-exemple est bien constitué de sous ensembles non-vides bornés de $\mathbb{R}$, et montre que cela ne suffit pas à obtenir nécessairement $\sup(FG) = \sup(F) \sup(G)$.

Exercice 2 : Suites adjacentes

sur 5 points

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_0 = 2, \quad b_0 = 4, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n), \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n). \end{cases}$$

1. On définit la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = b_n - a_n$.

La suite (c_n) admet-elle une limite ? Si c'est le cas que vaut cette limite ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{a_n+3b_n}{4} - \frac{3a_n+b_n}{4} = \frac{2b_n+2a_n}{4} = \frac{c_n}{2}$.

Comme $c_0 = 2$, on en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n = 2^{1-n}$, donc c_n tend vers 0.

2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a de même $a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n+b_n}{4} - a_n = \frac{b_n-a_n}{4} = \frac{c_n}{4} = 2^{-n-1} > 0$. Donc (a_n) est croissante.

De plus on a aussi $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n+3b_n}{4} - b_n = \frac{a_n-b_n}{4} = -\frac{c_n}{4} = -2^{-n-1} > 0$. Donc (b_n) est décroissante.

Comme on a déjà montré que la suite $(b_n - a_n)$ tend vers 0, on obtient que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3. On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = a_n + b_n$.

- (a) Montrer que (t_n) est une suite constante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a de même $t_{n+1} = \frac{3a_n+b_n}{4} + \frac{a_n+3b_n}{4} = \frac{4a_n+4b_n}{4} = t_n$. Donc la suite (t_n) est constante.

- (b) Déterminer alors la valeur de la limite des suites (a_n) et (b_n) .

Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 2\ell$. Or (t_n) est la suite constante égale à $t_0 = 4 + 2 = 6$, donc on déduit que $2\ell = 6$ donc $\ell = 3$.

En conséquence, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$.

Exercice 3 : Calcul de limites

sur 6 points

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Déterminez si chacune des limites suivantes existe. Si elles existent, calculer leur valeur :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n)^n ((-1)^{n+1})$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor^{-1}$.

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

a) On considère $(1 + (-1)^n) \cdot n^{(-1)^{n+1}}$:
 Comme $(-1)^n = 1$ pour tout n , on obtient : $1 + (-1)^n = 1 + 1 = 2$.
 Ensuite $(-1)^{n+1} = -1$, donc : $n^{(-1)^{n+1}} = n^{-1} = \frac{1}{n}$.
 Ainsi : $(1 + (-1)^n) \cdot n^{(-1)^{n+1}} = 2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$,
 d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n) n^{(-1)^{n+1}} = 0$.

b) On considère : $n^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1}$:
 Comme $\lfloor \frac{1}{n} \rfloor = \frac{1}{n}$, on a : $\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1 = \frac{1}{n} - 1 = \frac{1-n}{n}$.
 Donc $n^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1} = n^{\frac{1-n}{n}}$.
 On $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n} = -1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0$.

1. Pour chacune des questions (a) et b)), la réponse de l'étudiant·e est-elle correcte ? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux.

a) L'affirmation $(-1)^n = 1$ n'est valable que pour n pair. En conséquence $(1 + (-1)^n) \cdot n^{(-1)^{n+1}} = 2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ n'est montré que pour n pair. Il faudrait déterminer si pour n impair c'est vrai aussi (ou pas).

b) • La propriété « $\lfloor \frac{1}{n} \rfloor = \frac{1}{n}$ » n'est vraie que si $\frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$, ce qui n'est le cas que pour $n = 1$.

Quand $n \in \llbracket 2 ; +\infty \llbracket$, on a au contraire $\lfloor \frac{1}{n} \rfloor = 0$, et l'affirmation $n^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1} = n^{\frac{1-n}{n}}$ est fausse.

• Pour trouver la limite de $n^{\frac{1-n}{n}}$, on ne peut *a priori* pas faire $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n}\right)}$ comme l'a fait cet·te étudiant·e.

2. Pour chacune des questions (a) et b)), si vous avez jugé que la réponse de l'étudiant·e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrire complètement la réponse en donnant une réponse correcte et satisfaisante.

a) On pose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left((1 + (-1)^n) n^{((-1)^{n+1})} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } \begin{cases} u_{2k} = (1 + 1) (2k)^{-1} = \frac{2}{2k} \\ u_{2k-1} = (1 - 1) (2k - 1)^1 = 0. \end{cases}$$

Donc (en posant $n = 2k$ ou $n = 2k - 1$) on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$. Par le théorème des gendarmes, il en découle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

b) Pour $n \in \llbracket 2 ; +\infty \llbracket$, on a $\lfloor \frac{1}{n} \rfloor = 0$, donc $n^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1} = n^{-1} = \frac{1}{n}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor - 1} = 0.$