

Exercice 1 : Limites de suites réelles

1. La suite $\left(n \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? Si c'est le cas, combien vaut cette limite ?

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, on a $\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Donc $n \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim n$, donc cette suite tend vers $+\infty$.

2. La suite $\left((-1)^n \cos\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? Si c'est le cas, combien vaut cette limite ?

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, la sous-suite $\left((-1)^{2n} \cos\left(\frac{1}{2n+2}\right)\right)$ tend vers 1 tandis que la sous suite $\left((-1)^{2n+1} \cos\left(\frac{1}{2n+1+2}\right)\right)$ tend vers -1 . En conséquence, la suite $\left((-1)^n \cos\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite (parce qu'elle admet deux valeurs d'adhérence distinctes).

Exercice 2 : Sommes partielles

1. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{k+2026}{k+2025}\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{k+2026}{k+2025}\right) &= \sum_{k=0}^n (\ln(k+2026) - \ln(k+2025)) \\ &= \sum_{i=2026}^{2026+n} \ln(i) - \sum_{i=2025}^{2025+n} \ln(i) = \ln(2026+n) - \ln(2025) \end{aligned}$$

- b) En déduire la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{n+2026}{n+2025}\right)$; si elle converge, calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2026}{n+2025}\right).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(2026+n) = +\infty$ (donc aussi

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(2026+n) - \ln(2025) = +\infty$). Donc la série $\sum \ln\left(\frac{n+2026}{n+2025}\right)$ diverge

(et $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2026}{n+2025}\right) = +\infty$).

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^n \exp(2026 - k)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \exp(2026 - k) = \exp(2026) \sum_{k=0}^n (1/e)^k = \exp(2026) \frac{(1/e)^{n+1} - 1}{(1/e) - 1}$$

- b) En déduire la nature de la série $\sum \exp(2026 - n)$; si elle converge,

calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(2026 - n)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/e)^{n+1} - 1}{(1/e) - 1} = \frac{-1}{(1/e) - 1}$, on déduit que la série converge et que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp(2026 - k) = \exp(2026) \frac{-1}{(1/e) - 1} = \exp(2026) \frac{e}{e-1} = \frac{e^{2027}}{e-1}.$$

Exercice 3 : Série positive Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

On considère une série $\sum x_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0$.

- a) Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_k > 0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n > 0$.
- b) En déduire que si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0$, alors les x_n sont tous nuls.

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

a) Si $x_k > 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x_k > \varepsilon$ (par exemple on peut prendre $\varepsilon = x_k/2$). Alors $\sum_{k=0}^n x_k > \sum_{k=0}^n \varepsilon = n\varepsilon$.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} n\varepsilon = +\infty$, donc $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = +\infty$.

De plus $+\infty > 0$, donc $\sum_{n=0}^{\infty} x_n > 0$.

b) La contraposée $(\exists k \in \mathbb{N} : x_k > 0) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n > 0 \right) \gg \text{e}$
 $(\forall k \in \mathbb{N} : x_k = 0) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0$. Cela montre que si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0$, alors on aura bien $\forall k \in \mathbb{N} : x_k = 0$.

1. Pour chacune des questions (a) et b)), la réponse de l'étudiant·e est-elle satisfaisante? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux.

Cela sera très bien si vous identifiez précisément pourquoi l'étudiant·e s'est trompé·e. Mais si à la place vous démontrez rigoureusement quelque chose qui contredit une affirmation de cet·te étudiant·e cela sera accepté aussi comme réponse.

- a) • La preuve de « $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = +\infty$ » est nécessairement fausse, puisqu'il y a des cas où ce n'est pas vrai (par exemple si $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{(n+1)^2}$).
- Dans le détail de ce qu'à écrit l'étudiant·e, le premier problème est de ne pas avoir défini précisément les nombres qu'il/elle manipule et les quantificateurs (que sont k et n ? Les affirmations sont elles valables pour une valeur précise de k ou pour toutes les valeurs de k ? même question pour n).
- Ensuite, en rédigeant mal, l'étudiant·e s'est trompé·e : la propriété « $x_k > \varepsilon$ » n'est *a priori* vraie qu'à un rang précis : le rang k pour lequel l'énoncé indique que $x_k > 0$. Or pour écrire $\sum_{k=0}^n x_k > \sum_{k=0}^n \varepsilon$ il aurait fallu que « $x_k > \varepsilon$ » soit vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (avec un ε qui ne dépend pas de k). C'est pour ça que l'étudiant·e arrive à une conclusion fausse.
- Enfin, il y a une autre erreur (mais qui est sans conséquence sur le raisonnement de l'étudiant·e) : en fait $\sum_{k=0}^n \varepsilon$ est égal à $(n+1)\varepsilon$ (parce qu'il y a $n+1$ termes dans cette somme).
- b) • Il y a une erreur sur la contraposée : la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $(\text{non}B) \Rightarrow (\text{non}A)$. Donc dans le cas présent,

la contraposée de « $(\exists k \in \mathbb{N} : x_k > 0) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n > 0\right)$ » est
« $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq 0\right) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N} : x_k \leq 0)$ ».

- La conclusion ne correspond pas à ce qu'a affirmé l'étudiant.e. Sa conclusion « si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0$, alors on aura bien $\forall k \in \mathbb{N} : x_k = 0$ », correspondrait à une implication dans le sens contraire du « $(\forall k \in \mathbb{N} : x_k = 0) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0$ » qu'il/elle avait écrit.

2. Pour chacune des questions (a) et b)), si vous avez jugé que la réponse de l'étudiant.e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrire complètement la réponse en donnant une réponse correcte et satisfaisante.

- a) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_k > 0$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x_k > \varepsilon$ (par exemple on peut prendre $\varepsilon = x_k/2$).

Pour $n \in \llbracket k; +\infty \rrbracket$, on a alors $\sum_{i=0}^n x_i \geq x_k > \varepsilon$ (c'est parce que la somme

$\sum_{i=0}^n x_i$ contient le terme x_k , plus d'autres termes positifs ou nuls, que l'on

a $\sum_{i=0}^n x_i \geq x_k$). Les sommes partielles de la série $\sum x_n$ sont donc (à partir du rang k) toutes supérieures à ε .

Or on a vu que en cours qu'une série à termes positifs est soit convergente (vers un nombre réel, fini), soit de somme infinie. Donc la limite

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ existe nécessairement (mais pourrait être infinie).

Ainsi, les sommes partielles ont une limite, or elles sont toutes supérieures à ε , donc leur limite est au moins égale à ε .

On a donc montré que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \geq \varepsilon > 0$.

- b) La question a) a montré que « $(\exists k \in \mathbb{N} : x_k > 0) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n > 0\right)$ ».

La contraposée est donc vraie elle aussi, c'est à dire qu'on a

« $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq 0\right) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N} : x_k \leq 0)$ ».

En conséquence, quand on a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0$ (comme dans l'énoncé), on a

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq 0$, d'où il découle que « $\forall k \in \mathbb{N} : x_k \leq 0$ ». Or l'énoncé indique que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0$.

Exercice 4 : Théorème des gendarmes

1. Soient a, b, c , et d quatre nombres réels tels que $a \leq b \leq c$. Montrer que $|b - d| \leq \max(|a - d|, |c - d|)$.

Indication : on pourra procéder par disjonction de cas, en montrant que si $d > b$ alors $|b - d| \leq |a - d|$ et que si $d \leq b$ alors $|b - d| \leq |c - d|$.

On procède par disjonction de cas :

Si $d > b$: alors $a - d < b - d < 0$,

donc $|b - d| = d - b \leq d - a = |a - d| \leq \max(|a - d|, |c - d|)$.

Si $d \leq b$: alors $0 \leq b - d \leq c - d$,

donc $|b - d| = b - d \leq c - d = |c - d| \leq \max(|a - d|, |c - d|)$.

On a bien obtenu que dans tous les cas, $|b - d| \leq \max(|a - d|, |c - d|)$.

2. Soient trois suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tels qu'on ait à la fois $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \leq x_n \leq z_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell$.

(a) Montrer que

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_3 \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N_3 ; +\infty \rrbracket : \max(|y_n - \ell|, |z_n - \ell|) < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \in \llbracket N_1, +\infty \rrbracket, |y_n - \ell| < \varepsilon$.

De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell$, donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \in \llbracket N_2, +\infty \rrbracket, |z_n - \ell| < \varepsilon$.

Posons $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Alors, quand $n \in \llbracket N_3 ; +\infty \rrbracket$, on a à la fois $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, d'où $|y_n - \ell| < \varepsilon$ et $|z_n - \ell| < \varepsilon$ donc $\max(|y_n - \ell|, |z_n - \ell|) < \varepsilon$.

(b) **En déduire** que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $a = y_n$, $b = x_n$, $c = z_n$ et $d = \ell$, la question 1 nous indique que $|x_n - \ell| \leq \max(|y_n - \ell|, |z_n - \ell|)$. Cela montre que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \ell| \leq \max(|y_n - \ell|, |z_n - \ell|)$.

Dès lors le résultat de la question 2a implique que

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_3 \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N_3 ; +\infty \rrbracket : |x_n - \ell| < \varepsilon$. Cela indique précisément que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$.

3. Soient trois suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et deux nombres réels ℓ_1 et ℓ_2 tels qu'on ait à la fois $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \leq x_n \leq z_n$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ell_1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell_2$.

(la seule différence avec la question 2 est que l'on ne suppose pas que les suites (y_n) et (z_n) aient la même limite)

Peut-on alors conclure que la suite (x_n) converge ?

Indication : on pourra par exemple penser à la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Non, on ne peut pas en conclure que la suite (x_n) converge. Par exemple, si (pour $n \in \mathbb{N}$) on pose $x_n = (-1)^n$, $y_n = -1$ et $z_n = 1$, alors en posant $\ell_1 = -1$ et $\ell_2 = 1$ on satisfait les hypothèses de la question (à savoir que $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \leq x_n \leq z_n$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ell_1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell_2$). Pourtant cette suite (x_n) ne converge pas, car les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) admettent deux limites différentes (1 et -1).

Dans la suite de l'exercice, on cherche à généraliser ce résultat à des séries :

On considère donc trois séries réelles $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$, dont les termes généraux satisfont : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n$.

4. On considère tout d'abord le cas où les deux séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent et admettent la même limite : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$.

Démontrer que dans ce cas on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n = w_n$, et que la série $\sum u_n$ converge donc et admet elle aussi la même limite : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$.

Indication : Que vous ayez réussi ou pas à faire l'exercice 3, vous êtes autorisé·e à utiliser le résultat montré en question b) de cet exercice 3. Vous

pourrez par exemple vous intéresser (pour $n \in \mathbb{N}$) aux termes $x_n = w_n - \nu_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = w_n - \nu_n$. Alors les x_n sont tous positifs, et comme les deux séries $\sum w_n$ et $\sum \nu_n$ convergent leur différence aussi et $\sum_{n=0}^{\infty} (w_n - \nu_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n - \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n = 0$. On a donc $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0$.

Donc d'après la question b) de l'exercice 3, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0$.

Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, comme u_n est entre ν_n et w_n (qui sont égaux), on a $\nu_n = u_n = w_n$. Puis comme les trois séries $\sum u_n$, $\sum \nu_n$ et $\sum w_n$ sont égales elles ont toutes la même nature (donc convergente comme $\sum \nu_n$) et leur somme est la même.

5. Dans cette question on suppose toujours que $\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n \leq u_n \leq w_n$ et que les deux séries $\sum \nu_n$ et $\sum w_n$ convergent, mais cette fois ci on considère le cas où $\sum_{n=0}^{\infty} \nu_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} w_n$.

- (a) Démontrer que sous ces hypothèses, la série $\sum (u_n - \nu_n)$ est de terme général positif et est convergente.

De l'inégalité de l'énoncé ($\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n \leq u_n \leq w_n$) il découle que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \nu_n \leq w_n - \nu_n$. Ainsi la série $\sum (u_n - \nu_n)$ est de terme général positif, et est majorée par la série convergente $\sum (w_n - \nu_n)$ (qui converge comme différence de deux séries convergentes). Par comparaison de séries positives, elle converge donc.

- (b) Peut-on en déduire que (sous ces hypothèses) la série $\sum u_n$ converge ?

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \underbrace{u_n - \nu_n}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{\nu_n}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série} \\ \text{convergente}}}$$

u_n est donc le terme général d'une série convergente (comme somme de deux séries convergentes), c'est à dire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 5 : Série entière

On considère la série entière $\sum (-z^{2n}/3^n)$.

- Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
- Pour $z \in D(0, R)$, calculer sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} (-z^{2n}/3^n)$.
- Déterminer toutes les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ où cette série converge simplement.

Indication : vous n'êtes pas obligé.e de faire les trois sous-questions dans cet ordre, ce qui compte c'est d'avoir répondu à chacune des trois sous-questions par une démonstration rigoureuse

- Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z^2/3| < 1$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} (z^2/3)^n = \frac{1}{1-z^2/3}$.

Or pour $z \in \mathbb{C}$, $(|z^2/3| < 1) \Leftrightarrow (|z^2| < 3) \Leftrightarrow (|z| < \sqrt{3})$.

Donc on a montré que $\forall z \in D(0, \sqrt{3}), \sum_{n=0}^{\infty} (-z^{2n}/3^n) = \frac{-1}{1-z^2/3}$.

- Puisque la série entière converge sur $D(0, \sqrt{3})$, le rayon de convergence satisfait $R \geq \sqrt{3}$.
- Or quand $|z| = \sqrt{3}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, |-z^{2n}/3^n| = 3^n/3^n = 1$, donc la série diverge alors grossièrement. Il en découle que $R \leq \sqrt{3}$.

En conséquence, le rayon de convergence est $\sqrt{3}$,
on a $\forall z \in D(0, R), \sum_{n=0}^{\infty} (-z^{2n}/3^n) = \frac{-1}{1-z^2/3}$, et on a montré que la série entière diverge sur le bord du disque de convergence (quand $|z| = \sqrt{3}$). Donc le domaine où elle converge est $D(0, \sqrt{3})$.