

Exercice 1 : Limite inférieure

Exercice 2 : Séries entières

- ### Exercice 3 : Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des des séries entières ci-dessous :

b) $\sum \left(\frac{z}{n+1}\right)^n.$

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

Donc $R = 1/\exp(-1) = e$.

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}.$$

Donc le rayon de convergence vaut 1.

- Cela sera très bien si vous identifiez précisément pourquoi l'étudiant·e s'est trompé·e. Mais si à la place vous démontrez rigoureusement quelque chose qui contredit une affirmation de cet·te étudiant·e cela sera accepté aussi comme réponse.*

- page 1/2

Exercice 4 : Convergence simple, ou uniforme ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1 + \exp(x - n)} \end{cases}$

1. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, la convergence est-elle uniforme sur $] -\infty ; a]$?

Exercice 5 : Équivalence de suites et de séries

Rappel : Si vous ne savez pas traiter certaines questions vous pouvez admettre le résultat pour l'utiliser dans les questions suivantes.

1. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Rappelez la définition de la propriété « $a_n \sim b_n$ »
2. Soient désormais deux suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N ; +\infty \llbracket, (1 - \varepsilon) x_n \leq y_n \leq (1 + \varepsilon) x_n.$$

a) Montrer qu'il existe un rang N_1 à partir duquel x_n s'annule si et seulement y_n s'annule aussi.

C'est à dire qu'il faut montrer que $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N_1 ; +\infty \llbracket, (x_n = 0 \Leftrightarrow y_n = 0)$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n = 0 \\ \frac{y_n}{x_n} & \text{si } x_n \neq 0. \end{cases}$

- i) Étudier la convergence de la suite (z_n) .
- ii) En déduire que $x_n \sim y_n$.
3. Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives (c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_n \geq 0$ et $\beta_n \geq 0$). Montrer que
$$(\alpha_n \sim \beta_n) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N ; +\infty \llbracket, (1 - \varepsilon) \alpha_n \leq \beta_n \leq (1 + \varepsilon) \alpha_n).$$

Indication : il y a l'un des deux sens de l'équivalence pour lequel il suffit d'utiliser une question précédente.

4. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives, telles que $u_n \sim \nu_n$, et que la série $\sum u_n$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.

a) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \in \llbracket N ; +\infty \llbracket, \forall p \in \llbracket m ; +\infty \llbracket,$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=m}^p u_k \leq \sum_{k=m}^p \nu_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=m}^{\infty} u_k.$$

b) Dédurre que l'on peut définir une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $q_n = \sum_{k=n}^{\infty} \nu_k$, et que cette suite satisfait « $q_n \sim r_n$ ».

- c) Si on désigne par $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum \nu_n$ (c'est à dire que pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $t_n = \sum_{k=0}^n \nu_k$), a-t-on nécessairement aussi « $s_n \sim t_n$ » ?

Indication : vous pourrez construire un contre-exemple en modifiant le premier terme de la série convergente de votre choix.