

On vous demande d'accompagner chacune de vos réponses de justifications rigoureuses (démonstrations). La note obtenue s'appuiera essentiellement sur la qualité de ces justifications.

Si vous ne savez pas traiter certaines questions vous pouvez admettre le résultat pour l'utiliser dans les questions suivantes.

Exercice 1 : Convergence de suites et de séries

- I. 1. Déterminer la limite supérieure de la suite $\left(\frac{n+5}{n+3} \cos\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$
2. Déterminer la limite supérieure de la suite $\left(\sqrt{\exp(-n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \frac{\exp(-1/n)}{n}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
4. Pour chacune des suite (v_n) ci dessous, quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{v_n}}{\sqrt{v_n}}$?
- i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n^2$ ii) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n!$ iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left\lceil \frac{1}{n} \right\rceil$

II. Copie d'un·e étudiant·e

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

a)

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = nu_n \end{cases}$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n/n^2$.

b) Quelle est la nature de la suite $((-1)^n \exp(-n^2))_{n \in \mathbb{N}}$? Si elle converge, déterminer sa limite.

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la pro $\mathcal{P}_n$: « $u_n = 0$ »

initialisation Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0, u_{-1} = 0$, d'où $\mathcal{P}_0$

hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

Alors $u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+1)0$ par hy $\mathcal{P}_n$
 $= 0$

conclusion on a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$

Il en découle que $\sum u_n/n^2$ converge.

b) $\lim((-1)^n \exp(-n^2)) = \lim((-1)^n) \times \lim(\exp(-n^2)) = \pm 1 \times 0 = 0$

- Pour chacune des questions (a) et b)), la réponse de l'étudiant·e est-elle correcte ? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux.
- Pour chacune des questions (a) et b)), si vous avez jugé que la réponse de l'étudiant·e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrire complètement la réponse en donnant une réponse correcte et satisfaisante.

Exercice 2 : Encadrement d'une série

Cet exercice porte sur les séries de la forme $\sum f'(n)$ où $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et où f' est la dérivée de f).

I. Nature de $\sum f'(n)$ dans le cas où f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$

On considère dans cette question le cas où la fonction f' est croissante.

1. Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis, et l'utiliser pour démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1)$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) - f(n-1) \leq f'(n) \leq f(n+1) - f(n)$.
3. Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'(0) + f(n) - f(0) \leq \sum_{k=0}^n f'(k) \leq f(n+1) - f(0)$.
4. Montrer que $(f'(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est soit « tout le temps négative » soit « positive à partir d'un certain rang ». En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f'(k)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
5. De même, justifier que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
6. Conclure que la série $\sum f'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}$.

On rappelle que « $\sum f'(n)$ converge » signifie que la suite de ses sommes partielles admet une limite finie.

II. Généralisations (ne nécessite pas d'avoir réussi les questions précédentes, mais utilise leur résultat)

1. On considère ici le cas où la fonction f' est décroissante :
Dans ce cas là, la fonction $-f$ a-t-elle une dérivée croissante ? Ou décroissante ? En déduire que $\sum f'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}$.
2. On considère enfin un $m \in \mathbb{N}$, et une fonction $g : [m; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ est dont la dérivée est monotone. On désigne par $\sum_{n \geq m} g'(n)$ la série dont les termes commencent au rang m et dont les sommes partielles sont (pour $n \in \llbracket m; +\infty \rrbracket$)
$$s_n = \sum_{k=m}^n g'(k).$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq m} g'(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \in \mathbb{R}$.

III. Exemple (ne nécessite pas d'avoir réussi les questions précédentes, mais utilise leur résultat)

Soit $\alpha > 0$. On va utiliser dans cette question les résultats des questions précédentes pour déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln n))^\alpha}$.

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}^*$, déterminer la dérivée de la fonction $g : \begin{cases} [3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 / (\ln(\ln(x)))^\beta \end{cases}$.
2. En déduire que la série $\sum \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln n))^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.