

À l'exception de la première question du premier exercice, on vous demande d'accompagner chacune de vos réponses de justifications rigoureuses (démonstrations). La note obtenue s'appuiera essentiellement sur la qualité de ces justifications.

Exercice 1 : Bornes supérieure et inférieure

sur 9 points

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\},$$

$$B = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$C = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$\text{et } D = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}.$$

1. Quelles sont la borne supérieure et la borne inférieure de A ? Ces bornes sont-elles atteintes ? *Contrairement à toutes les autres questions, la réponse à cette question sera acceptée même sans démonstration.*
2. Démontrer que si une suite d'éléments d'un ensemble E tend vers un majorant m de E alors on a : $\sup E = m$.

Pour répondre aux questions suivantes, on admettra sans démonstration que le même résultat existe pour les bornes inférieures : si une suite d'éléments d'un ensemble E tend vers un minorant m de E alors $\inf E = m$.

3. En justifiant vos réponses, déterminer les bornes supérieures et inférieures de chacun des ensembles B , C et D . Ces bornes sont-elles atteintes ?
4. Étant donnés F et G deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on désigne par FG l'ensemble $FG = \{xy \mid (x,y) \in F \times G\}$ (où xy désigne le produit de x par y).

(a) Lorsque $F = [-1,1]$ et $G = [-1,0]$, démontrez que $FG = [-1,1]$.

(b) Soient F et G deux sous-ensembles non vides de l'intervalle $[1;2]$. Démontrer que $\sup(FG) = \sup(F) \sup(G)$.

Dans votre démonstration, il faudra dire clairement à quel moment vous utilisez le fait que F et G soient inclus dans $[1;2]$.

(c) Dans cette question, on ne suppose plus que F et G soient inclus dans $[1;2]$.

Si on suppose que F et G sont des sous ensembles non-vides bornés de $\mathbb{R}$, a-t-on nécessairement $\sup(FG) = \sup(F) \sup(G)$?

Indication : Pour montrer que ce n'est pas le cas il suffit de trouver un contre-exemple.

Exercice 2 : Suites adjacentes

sur 5 points

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_0 = 2, \quad b_0 = 4, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n), \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n). \end{cases}$$

- On définit la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = b_n - a_n$.
La suite (c_n) admet-elle une limite ? Si c'est le cas que vaut cette limite ?
- Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
- On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = a_n + b_n$.
 - Montrer que (t_n) est une suite constante.
 - Déterminer alors la valeur de la limite des suites (a_n) et (b_n) .

Exercice 3 : Calcul de limites

sur 6 points

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Déterminez si chacune des limites suivantes existe. Si elles existent, calculer leur valeur :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n) n^{(-1)^{n+1}};$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1}.$

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

a) On considère $(1 + (-1)^n) \cdot n^{(-1)^{n+1}}$:

Comme $(-1)^n = 1$ pour tout n , on obtient : $1 + (-1)^n = 1 + 1 = 2$.Ensuite $(-1)^{n+1} = -1$, donc : $n^{(-1)^{n+1}} = n^{-1} = \frac{1}{n}$.Ainsi : $(1 + (-1)^n) \cdot n^{(-1)^{n+1}} = 2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$,d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n) n^{(-1)^{n+1}} = 0$.

b) On considère : $n^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1}$:

Comme $\lfloor \frac{1}{n} \rfloor = \frac{1}{n}$, on a : $\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1 = \frac{1}{n} - 1 = \frac{1-n}{n}$.Donc $n^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1} = n^{\frac{1-n}{n}}$.On $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n} = -1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0$.

- Pour chacune des questions (a) et b)), la réponse de l'étudiant·e est-elle correcte ? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux.
- Pour chacune des questions (a) et b)), si vous avez jugé que la réponse de l'étudiant·e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrire complètement la réponse en donnant une réponse correcte et satisfaisante.