

Exercice 1 : Borne supérieure d'une intersection

Soient E un ensemble non vide, et pour chaque $e \in E$, soit A_e un sous ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$.

1. a) Montrer que pour tout $f \in E$, le nombre $\sup(A_f)$ est un majorant de l'ensemble $\bigcap_{e \in E} A_e$.

Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \bigcap_{e \in E} A_e$, on a $x \in A_f$ donc $x \leq \sup(A_f)$ (ce sup existe car A_f est non vide et majoré).

On a donc montré que $\forall x \in \bigcap_{e \in E} A_e$ $\sup(A_f) \geq x$, qui était l'affirmation demandée.

- b) En déduire que si $\bigcap_{e \in E} A_e \neq \emptyset$, alors $\sup \left(\bigcap_{e \in E} A_e \right)$ est bien défini et satisfait

$$\sup \left(\bigcap_{e \in E} A_e \right) \leq \inf \{ \sup(A_f) \mid f \in E \}$$

On vient de montrer $\bigcap_{e \in E} A_e$ est majoré. Si de plus il est non vide, alors il admet

un sup, qui satisfait $\sup \left(\bigcap_{e \in E} A_e \right) \leq \sup(A_f)$ (comme c'est le plus petit majorant, et qu'on vient de montrer que $\sup(A_f)$ est un majorant, il est donc plus petit que $\sup(A_f)$).

Donc si $\bigcap_{e \in E} A_e \neq \emptyset$, on a montré que $\forall f \in E$, $\sup \left(\bigcap_{e \in E} A_e \right) \leq \sup(A_f)$, c'est à dire que $\sup \left(\bigcap_{e \in E} A_e \right)$ est un minorant de l'ensemble (non vide) $\{ \sup(A_f) \mid f \in E \}$, donc il est plus petit que son infimum c'est à dire que $\sup \left(\bigcap_{e \in E} A_e \right) \leq \inf \{ \sup(A_f) \mid f \in E \}$.

2. Dans le cas où $E = \{1, 2\}$ cela s'énonce comme la propriété

$\mathcal{P}$: « Si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$,

alors $\sup(A_1 \cap A_2)$ est bien défini et satisfait $\sup(A_1 \cap A_2) \leq \min(\sup A_1, \sup A_2)$ ».

Dans chacun des cas ci-dessous, indiquer les valeurs de $\sup(A_1 \cap A_2)$ et $\min(\sup A_1, \sup A_2)$ (lorsqu'il existent), et vérifier que la propriété $\mathcal{P}$ est bien satisfaite.

- i) $A_1 = \{0; 10\}$ et $A_2 = [0; 1]$

$A_1 \cap A_2 = \{0\}$, d'où $\sup(A_1 \cap A_2) = 0$, et $\min(\sup A_1, \sup A_2) = \min(10, 1) = 1$, et l'inégalité est bien satisfaite car $0 \leq 1$.

- ii) $A_1 = [0; 1]$ et $A_2 = [1; 2]$

$A_1 \cap A_2 = \{1\}$, d'où $\sup(A_1 \cap A_2) = 1$, et $\min(\sup A_1, \sup A_2) = \min(1, 2) = 1$, et $\mathcal{P}$ est bien satisfaite car $1 \leq 1$.

- iii) $A_1 = [1; 2]$ et $A_2 = \{0; 10\}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, donc $\sup(A_1 \cap A_2)$ n'existe pas, tandis que $\min(\sup A_1, \sup A_2) = \min(2, 10) = 2$. La propriété est bien satisfaite car elle commençait par « Si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, alors ... » (et ici $A_1 \cap A_2 = \emptyset$).

3. Parmi les quatre affirmations ci-dessous, trois sont fausses : identifiez lesquelles et prouver

que chacune des trois est fausse (en fournissant un contre-exemple). Prouvez que l'autre propriété (parmi les quatre) est vraie (en rédigeant une preuve).

- a) « Si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbb{R}$, alors $\sup(A_1 \cap A_2)$ est bien défini et satisfait $\sup(A_1 \cap A_2) \leq \min(\sup A_1, \sup A_2)$. »
Fausse : le iii) est un contre-exemple (A_1 et A_2 sont bien non-vides et majorés, mais $\sup(A_1 \cap A_2)$ n'est pas bien défini).
- b) « Si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbb{R}$, tels que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, alors $\sup(A_1 \cap A_2) \leq \sup(A_1 \cup A_2)$. »
Vraie : Si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbb{R}$, tels que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, alors
- $\sup(A_1 \cap A_2)$ existe d'après la question 1
 - Il existe un majorant M_1 de A_1 et un majorant M_2 de A_2 , donc $\max(M_1, M_2)$ est un majorant de $A_1 \cup A_2$, donc $\sup(A_1 \cup A_2)$ existe.
 - Dès lors, l'inégalité $\sup(A_1 \cap A_2) \leq \sup(A_1 \cup A_2)$ découle de « $(A_1 \cap A_2) \subset (A_1 \cup A_2)$ ».
- c) « Si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbb{R}$, tels que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, alors $\sup(A_1 \cap A_2) < \min(\sup A_1, \sup A_2)$. »
Fausse : le ii) est un contre-exemple (A_1 et A_2 sont bien non-vides et majorés, mais $\sup(A_1 \cap A_2) = \min(\sup A_1, \sup A_2)$).
- d) « Si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbb{R}$, tels que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, alors $\sup(A_1 \cap A_2) = \min(\sup A_1, \sup A_2)$. »
Fausse : le i) est un contre-exemple (A_1 et A_2 sont bien non-vides et majorés, mais $\sup(A_1 \cap A_2) < \min(\sup A_1, \sup A_2)$).

Exercice 2 : Suites adjacentes

Étant donnés $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $a < b$, on définit par récurrence les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n = \frac{b-a}{3^n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$: « $v_n - u_n = \frac{b-a}{3^n}$ ».

- $v_0 - u_0 = b - a$ donc $\mathcal{P}_0$ est satisfaite.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{(b-a)/3^n}{3} = \frac{b-a}{3^{n+1}}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est satisfaite.

Cela montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est satisfaite.

2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{b-a}{3^{n+1}} \geq 0$ donc (u_n) est croissante.
- De même, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n = \frac{u_n - v_n}{3} = -\frac{b-a}{3^{n+1}} \leq 0$ donc (v_n) est décroissante.
- Enfin, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{3^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - u_n = 0$

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire la valeur de la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3} + \frac{u_n+2v_n}{3} = u_n + v_n$. Donc la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, d'où il découle que la suite $\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle aussi constante, égale à $\frac{u_0+v_0}{2} = \frac{a+b}{2}$. Or elle tend vers $\frac{\ell+\ell}{2} = \ell$ (où ℓ désigne la limite commune à (u_n) et (v_n)), donc $\ell = \frac{a+b}{2}$.

Exercice 3 : Limites de suites

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Déterminer la nature des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous, et calculer la limite de celles qui convergent.

- i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \operatorname{Re}(\exp(i^n/n))$ ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^{(n+1)^2/n}}{n^n}$

Sa réponse est ci-dessous :

- i) • Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = e^{(-1)^n/(2n)} = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}$ qui tend vers 1
(car $-\frac{1}{2n} \leq \frac{(-1)^n}{2n} \leq \frac{1}{2n}$ donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0$).
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = \operatorname{Re}(e^{i(-1)^n/(2n+1)}) = \cos((-1)^n/(2n+1))$, qui tend vers $\cos 0$ car $\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ tend vers 0 (par le même théorème de que juste avant).
- Il y a donc au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
- ii) $(n+1)^2 = n^2(1+1/n)^2 \sim n^2$, donc $(n+1)^2/n \sim n$, donc $u_n \sim \frac{n^n}{n^n} = 1$ donc u_n tend vers 1.

1. Cette réponse vous semble-t-elle satisfaisante ? Si elle ne convient pas préciser ce qui pose problème.

i) Non, cette réponse ne va pas car

- $\cos 0 = 1$ donc ce ne sont pas deux valeurs d'adhérences distinctes, ça ne prouve pas du tout que la suite diverge.
- Au début de sa réponse, cet·te étudiant·e écrit que $e^{(-1)^n/(2n)} = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}$, ce qui est faux. Le développement limité serait $e^{(-1)^n/(2n)} = 1 + \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

ii) Cette réponse non plus ne va pas, car l'étudiant·e a fait un équivalent à l'intérieur d'une puissance, ce qui n'a pas de raison d'être correct.

2. Si cette réponse n'est pas satisfaisante, écrire une réponse correcte à cet énoncé.

- i) • Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $i^{2k} = (-1)^k$, donc $u_{2k} = e^{(-1)^k/(2k)}$ (cette quantité est réelle, donc la partie réelle n'a aucun effet). Or $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k/(2k) = 0$ (en utilisant le théorème des gendarmes avec $-\frac{1}{2k} \leq \frac{(-1)^k}{2k} \leq \frac{1}{2k}$), et la fonction $\exp$ est continue, donc (u_{2k}) tend vers $\exp(0) = 1$.

- Toujours pour $k \in \mathbb{N}$, $i^{2k+1} = (-1)^k i$, donc $u_{2k+1} = \operatorname{Re} \left(e^{i(-1)^k/(2k+1)} \right) = \cos \left((-1)^k/(2k+1) \right)$, qui tend vers $\cos 0$ car $\cos$ est continue et $\frac{(-1)^k}{(2k+1)}$ tend vers 0 (par le même théorème des gendarmes que juste avant).
 - Montrons alors que $\lim u_n = 1$. Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in \llbracket N_1, +\infty \llbracket, |u_{2k} - 1| < \varepsilon$ (car $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} = 1$).
De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \llbracket N_1, +\infty \llbracket, |u_{2k+1} - 1| < \varepsilon$ (car $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = 1$).
On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Pour $n \geq N$, si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$, mais $n \geq 2N_1$ donc $k \geq N_1$ et $|u_n - 1| = |u_{2k} - 1| < \varepsilon$. Et si au contraire n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$, mais $n \geq 2N_2 + 1$ donc $k \geq N_2$ et $|u_n - 1| = |u_{2k+1} - 1| < \varepsilon$. Dans les deux cas on obtient bien $|u_n - 1| < \varepsilon$.
On a donc bien montré que $\lim u_n = 1$.
- ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = n^{\frac{(n+1)^2}{n} - n} = n^{\frac{(n+1)^2 - n^2}{n}} = n^{\frac{2n+1}{n}} = n^{2 + \frac{1}{n}} = n^2 \times n^{1/n} \geq n^2$.
Or $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Exercice 4 : Nature de séries

1. Soit $p \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sin(n\pi/p)$. Déterminer si $\lim u_n = 0$ et en déduire la nature de la série $\sum u_n$, puis calculer la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles.

Indication : On pourra utiliser que $\forall n \in \mathbb{N}, \sin(n\pi/p) = \frac{(e^{i\pi/p})^n}{2i} - \frac{(e^{-i\pi/p})^n}{2i}$.

- La sous suite $(u_{2np+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $\sin(\pi/p) \neq 0$, donc u_n ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
- De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{\sum_{k=0}^n e^{ik\pi/p} - \sum_{k=0}^n e^{-ik\pi/p}}{2i} = \frac{\frac{1-e^{i(n+1)\pi/p}}{1-e^{i\pi/p}} - \frac{1-e^{-i(n+1)\pi/p}}{1-e^{-i\pi/p}}}{2i}$$

b) De même, calculer les sommes partielles puis la nature de la série $\sum u_n$ ci-dessous :

$$\sum \left(\ln \left(1 + \frac{p}{n+1} \right) - \ln \left(1 + \frac{p}{n+2} \right) \right)$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{p}{n+1} \right) - \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{p}{n+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \ln \left(1 + \frac{p}{i} \right) - \sum_{i=2}^{n+2} \ln \left(1 + \frac{p}{i} \right) \\ &= \ln(1+p) - \ln \left(1 + \frac{p}{n+2} \right) \end{aligned}$$

- Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n+2} = 0$, donc par continuité de la fonction logarithme, $\ln \left(1 + \frac{p}{n+2}\right)$ tends vers $\ln 1 = 0$.

Donc la suite des sommes partielles tend vers $\ln(1 + p)$, donc la série $\sum u_n$ converge.

2. Déterminer la nature de chacune des séries $\sum u_n$ ci-dessous (*Indication : On pourra s'appuyer sur le i) pour traiter le ii)*).

$$\text{i) } \sum \frac{1}{n!} \quad \text{ii) } \sum \frac{\cos n}{n!} \quad \text{iii) } \sum (-1)^n \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 4} \quad \text{iv) } \sum \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

i) Cette série à termes positifs converge d'après le critère de D'Alembert (en effet pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}/u_n = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0).

ii) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\cos n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}$, et on a vu que la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, donc par comparaison de séries positives, la série $\sum \left|\frac{\cos n}{n!}\right|$ converge.

Ainsi la série $\sum \frac{\cos n}{n!}$ converge absolument (donc converge).

iii) Pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 4} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + 4/n^2}$ qui tends vers 1. Donc (u_n) ne tends pas vers 0, donc la série diverge.

iv) Tout d'abord les termes de la série sont positives car $\ln$ est positive sur $[1, +\infty[$.

De plus, quand $n \rightarrow \infty$, $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc par comparaison de séries positives, $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.