

**Exercice 1 : Nature de suites**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Les suivantes sont définies pour  $n \in \mathbb{N}^*$  (vous pourrez les noter  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ). Pour chacune de ces suites, déterminer si elle admet (ou pas) une limite, et lorsqu'elle existe, trouvez cette limite.

i)  $\frac{\sin(n) - n}{x^n}$                       ii)  $\frac{n^x}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$                       iii)  $n^2 \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) \sin \left( n \frac{\pi}{2} \right)$

i) On remarque tout d'abord que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ , d'où il découle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$  d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sin n}{n} = 1$  donc  $n - \sin n \sim n$ . Donc  $u_n \sim -\frac{n}{x^n}$ . On en déduit que

- Si  $x < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0^+$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{x^n} = -\infty$  et on conclue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ .
- Si  $x = 1$ , alors  $u_n \sim -n$  dont  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ .
- Si  $x > 1$ , alors par croissance comparée,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^n} = 0$ .

**Remarque :** Si on souhaite justifier cette limite à partir du programme du cours, on peut remarquer que  $\frac{n+1}{x^{n+1}} / \frac{n}{x^n} \sim \frac{1}{x} < 1$  donc par le critère de d'Alembert la série à termes positifs  $\sum \frac{n}{x^n}$  converge d'où il découle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^n} = 0$ .

Quoi qu'il en soit,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^n} = 0$  nous donne que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

ii) On remarque tout d'abord que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^x}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{n^x (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{n^x \sqrt{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2} \\ &= n^x \sqrt{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right) \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x = +\infty$  (car  $x > 0$ ), et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ , tandis que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 = 2$ . Il en découle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

iii) Tout d'abord, on rappelle que pour  $x \rightarrow 0$ , on a  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , donc  $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , c'est à dire que  $\ln(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2}$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc  $\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2}$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{2}$ .

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sin \left( 2n \frac{\pi}{2} \right) = 0$ , et  $\sin \left( (4n+1) \frac{\pi}{2} \right) = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{4n+1} = -\frac{1}{2}$ . Il en découle que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge (car elle a deux valeurs d'adhérence distinctes).

**Exercice 2 : Croissance d'une limite de fonctions croissantes**

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $f_n$  une fonction réelle  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . De plus, on désigne par  $g$  une autre fonction réelle :  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Dans cette première question, on suppose que les hypothèses

- (i)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Chacune des fonctions } f_n \text{ est croissante.} \end{array} \right.$
- (ii)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{La suite de fonctions } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } g, \end{array} \right.$

sont toutes les deux satisfaites, et on va montrer que dans ce cas la fonction  $g$  est elle même croissante :

- (a) Exprimer à l'aide de quantificateurs la condition (i).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in [x; +\infty[, \quad f_n(x) \leq f_n(y).$$

- (b) De même, exprimer la condition (ii) à l'aide de quantificateurs.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \quad |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

- (c) En utilisant ces deux conditions (i) et (ii), montrez que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in [x; +\infty[, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad g(x) - g(y) \leq \varepsilon$$

*Indication : pour un  $n$  bien choisi, on pourra utiliser l'égalité*

$$g(x) - g(y) = (g(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(y)) + (f_n(y) - g(y)).$$

Soient  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in [x; +\infty[$ , et  $\varepsilon > 0$ .

Par convergence simple de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $g$ ,

$$\text{il existe } N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \llbracket N_1; +\infty \llbracket, |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon/2.$$

De même il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \llbracket N_2; +\infty \llbracket, |f_n(y) - g(y)| \leq \varepsilon/2$ .

On pose alors  $N = \max(N_1, N_2)$ ,

et on a  $g(x) - f_N(x) \leq |g(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon/2$  (car  $N \geq N_1$ ), et  $f_N(y) - g(y) \leq |f_N(y) - g(y)| \leq \varepsilon/2$  (car  $N \geq N_2$ ).

De plus, comme  $y \geq x$  on a (par croissance de  $f_N$ ) l'inégalité  $f_N(x) - f_N(y) \leq 0$ .

Il en découle que

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= (g(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(y)) + (f_N(y) - g(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

- (d) En déduire que la fonction  $g$  est croissante.

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in [x; +\infty[$ . On vient de montrer que  $\forall \varepsilon > 0, g(x) - g(y) \leq \varepsilon$ . Il en découle que  $g(x) - g(y) \leq 0$ . (En effet, si  $g(x) - g(y)$  était strictement positif, en posant  $\varepsilon = \frac{g(x) - g(y)}{2} > 0$ , on aurait  $g(x) - g(y) \leq \varepsilon$ , donc  $0 \geq g(x) - g(y) - \varepsilon = \varepsilon$  qui est contradictoire car  $\varepsilon > 0$ .)

On a donc obtenu que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [x; +\infty[, g(x) \leq g(y)$ , ce qui signifie précisément que la fonction  $g$  est croissante.

2. Si l'on pose  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{n+1} \end{cases}$  existe-t-il une fonction  $g$  telle que  $(f_n)$  converge simplement vers  $g$ ? Qu'est-ce que la question 1 permet de conclure sur cette fonction  $g$ ?

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ .

Donc  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.

De plus chaque fonction  $f_n$  est croissante (sa dérivée est  $\frac{1}{n+1} > 0$ ), donc la question 1 permet de conclure que la fonction nulle est croissante.

3. On conserve les notations précédentes (pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  désigne une fonction réelle  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; de plus  $g$  désigne aussi une fonction réelle  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), et on cherche d'autres résultats similaires à celui montré en question 1. Pour chaque affirmation ci-dessous, on vous demande de fournir soit une preuve de l'affirmation (si elle est correcte) soit un contre exemple (si elle est fausse) :

- (a) L'énoncé ci-dessous est-il correct ?

Si les deux hypothèses  $\begin{cases} (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } g \\ g \text{ est croissante} \end{cases}$  sont satisfaites, alors chacune des fonctions  $f_n$  est croissante.

Cet énoncé est faux :

un contre exemple est fourni par les fonctions  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{-x}{n+1} \end{cases}$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle, qui est croissante (voir question 2), mais aucune

des fonctions  $f_n$  n'est croissante (elles ont pour dérivée  $\frac{-1}{n+1} < 0$ ).

(b) L'énoncé ci-dessous est-il correct ?

Si les deux hypothèses  $\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est strictement croissante} \\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } g \end{cases}$  sont satisfaites, alors  $g$  est strictement croissante.

Cet énoncé est faux :

un contre exemple est fourni par les fonctions  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{n+1} \end{cases}$  de la question 2 : elles sont toutes strictement croissantes et convergent simplement vers la fonction nulle, mais la fonction nulle n'est pas strictement croissante (elle est constante).

### Exercice 3 : Convergence uniforme

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Pour chacune des suites de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ci-dessous, indiquer s'il existe une fonction  $g$  telle que  $(f_n)$  converge simplement vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ , et déterminer si la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

- i)  $f_n : x \mapsto \exp(x - n^3)$       ii)  $f_n : x \mapsto \exp(-n \exp(nx) - \exp(-nx))$

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x - n^3) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x - n^3\right) = \exp(-\infty) = 0$ , donc  $(f_n)$  tend vers la fonction nulle ( $g$  e

De plus chaque  $f_n$  e  
convergence e

ii) Si  $x > 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \exp(nx) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-nx) = 0$   
donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n \exp(nx) - \exp(-nx)) = 0$ .

Au contraire, si  $x < 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \exp(nx) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-nx) = 0$   
donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n \exp(nx) - \exp(-nx)) = \exp(0) = 1$ .

Donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction  $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Cette fonction  $g$  e  
convergence n'e  
 $n$  sont continue

1. Pour chacune des questions (i) et ii), la réponse de l'étudiant·e est-elle correcte? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux. (Si vous affirmez qu'une réponse est erronée, il n'est pas nécessaire de trouver toutes les erreurs commises, il suffit de donner au moins une bonne raison de considérer la réponse sur la limite simple (et/ou sur la limite uniforme) comme insuffisante et/ou fausse.)

- i) • Cet·te étudiant·e a commencé directement par écrire «  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x - n^3) = \dots$  » alors qu'à ce stade on ne sait pas si cette limite existe bien (on ne le sait qu'à la fin du calcul). Il n'est pas acceptable d'écrire ainsi le symbole «  $\lim_{n \rightarrow \infty} \dots$  » lorsqu'on ne sait pas encore si une suite converge.

- La convergence simple de  $(f_n)$  vers  $g$  est l'affirmation que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$ . Il est indispensable de préciser sur sa copie que l'on fait un raisonnement qui est valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$  (et cet·te étudiant·e a oublié de le préciser).
  - De même il faut être précis dans les phrases que l'on écrit : à la place de «  $(f_n)$  tend vers la fonction nulle » il fallait écrire «  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle » (et indiquer ainsi si on parle d'une convergence simple ou d'une convergence uniforme).
  - La conclusion sur la convergence uniforme est parfaitement farfelue : Lorsque les  $f_n$  sont continues, il existe un théorème qui affirme que « Si la convergence est uniforme alors la limite est continue », mais il n'y a pas de réciproque (on ne peut pas du tout affirmer que si la limite est continue alors la convergence est uniforme). Dans le cas présent il se trouve qu'aucun des ensembles  $\{|f_n(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$  n'est majoré (ce que certains notent «  $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = +\infty$  ») et que la convergence n'est donc pas uniforme (voir question ci-dessous pour une rédaction plus précise).
- ii) • L'affirmation sur la convergence doit être une affirmation valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On ne peut donc pas se contenter des cas  $x > 0$  et  $x < 0$  (il manquerait alors le cas où  $x = 0$ ).
- Dans le cas où  $x < 0$ , il est faux de dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-nx) = 0$  (en fait,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-nx) = +\infty$ ). La suite du calcul est fautive pour cette raison.
  - En soit, lorsque les  $f_n$  sont continus, il est correct de dire que « si la limite n'est pas continue alors la convergence n'est pas uniforme ».
- En effet, lors que les  $f_n$  sont continus, un théorème du cours indique que « si la convergence est uniforme alors la limite est continue », ce qui revient au même que de dire (toujours lors que les  $f_n$  sont continus) que « si la limite n'est pas continue alors la convergence n'est pas uniforme » (c'en est la contraposée).
- Toutefois, dans la cas présent la fonction  $g$  calculée par cet·te étudiant·e est fautive (erreurs dans les calculs précédents), la bonne fonction  $g$  est continue et cet argument ne s'applique donc pas.
2. Pour chacune des questions (i) et ii), si vous avez jugé que la réponse l'étudiant·e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrivez-la complètement en donnant une réponse correcte et satisfaisante à l'énoncé auquel répondait cet·te étudiant·e.

- i) • Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x - n^3 = -\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x - n^3) = 0$ .  
Donc  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle (on désigne donc par  $g$  la fonction nulle).
- Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a d'une part  $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - g(x)| = f_n(x)$ , et d'autre part  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$  (car  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - n^3 = +\infty$ ).
- Donc aucun des ensembles  $\{|f_n(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$  n'est majoré (ce que certains notent «  $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = +\infty$  »), ce qui indique que  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $g$ .
- ii) • Soit  $x \in \mathbb{R}$ .
- Si  $x \geq 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \exp(nx) = +\infty$ .  
Or  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq f_n(x) \leq \exp(-n \exp(nx))$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ .

— Si  $x < 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-nx) = +\infty$ .

Or  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq f_n(x) \leq \exp(-\exp(-nx))$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ .

On a donc montré que  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ , c'est à dire que  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle (on désignera par  $g$  cette fonction nulle).

- Pour savoir si la convergence est uniforme, on cherche pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$  à calculer  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)|$  (s'il existe). On commence pour cela par étudier les variations de chaque fonction  $f_n$  :

— Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= (n \exp(-nx) - n^2 \exp(nx)) \exp(-n \exp(nx) - \exp(-nx)) \\ &= (\exp(-2nx) - n) n \exp(nx) f_n(x) \end{aligned}$$

nulle uniquement quand  $n = \exp(-2nx)$ , c'est à dire quand  $x = -\frac{\ln(n)}{2n}$ .

— On obtient donc que cette dérivée est positive quand  $x \leq -\frac{\ln(n)}{2n}$  et négative quand  $x \geq -\frac{\ln(n)}{2n}$ , donc  $f_n$  admet un maximum en  $x = -\frac{\ln(n)}{2n}$ .

— De plus,  $f_n$  est positive et  $g$  est nulle, donc  $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - g(x)| = f_n(x)$ . On déduit que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| &= f_n\left(-\frac{\ln(n)}{2n}\right) \\ &= \exp\left(-n \exp\left(-n \frac{\ln(n)}{2n}\right) - \exp\left(n \frac{\ln(n)}{2n}\right)\right) \\ &= \exp\left(-n \exp\left(-\frac{\ln(n)}{2}\right) - \exp\left(\frac{\ln(n)}{2}\right)\right) \\ &= \exp(-n/\sqrt{n} - \sqrt{n}) = \exp(-2\sqrt{n}) \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-2\sqrt{n}) = 0$ , donc la convergence est uniforme.

#### Exercice 4 : Séries entières

Déterminer le rayon de convergence  $R$  de chacune des séries entières  $\sum a_n z^n$  ci-dessous. Si  $R > 0$ , calculez aussi la somme de la série entière à l'intérieur du disque ouvert de convergence.

i)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^{3n}$

ii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n e^{in\pi/25} z^n$

iii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(2000 + 25n) z^n$

- i) • **Rayon de convergence** : Intuitivement la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^{3n}$  signifie  $1 + z^3 + z^6 + \dots$ .

Quand on désigne la série entière par  $\sum a_n z^n$  cela signifie intuitivement  $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ .

Donc les coefficients  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On ne peut donc pas utiliser la règle de d'Alembert des séries entières (car «  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  » ne définit pas une suite convergente : c'est infini quand  $n \equiv 2 \pmod{3}$  et nul quand  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ).

Une des possibilités est d'utiliser la Formule de Hadamard :

Pour  $n \in \mathbb{N}, |a_n|^{1/n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  donc  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1$  donc le rayon de convergence vaut 1.

- De plus, lorsque  $|z| < 1$ , on a  $|z|^3 < 1$  donc  $\sum_{n=0}^{\infty} (z^3)^n = \frac{1}{1-z^3}$ .

Donc la somme de la série entière (à l'intérieur du disque ouvert de convergence) est  $z \mapsto \frac{1}{1-z^3}$ .

- ii) Cette fois-ci, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_n = n e^{in\pi/25}$  (et donc  $|a_n| = n$ ). Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ , donc le rayon de convergence est 1.

De plus, on note que  $a_0 = 0$ , de sorte qu'on peut commencer les sommes à 1 au lieu de 0.

Enfin, lorsque  $|z| < 1$ , on a  $|e^{i\pi/25}z| < 1$  donc  $\sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\pi/25}z)^n = \frac{1}{1-e^{i\pi/25}z}$ . Comme on

peut dériver terme à terme à l'intérieur du disque ouvert de convergence, on a aussi

$$\frac{e^{i\pi/25}}{(1-e^{i\pi/25}z)^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{1-e^{i\pi/25}z} = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{in\pi/25} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$$

Donc la somme de  $\sum a_n z^n$  (à l'intérieur du disque ouvert de convergence) est  $z \mapsto \frac{ze^{i\pi/25}}{(1-e^{i\pi/25}z)^2}$ .

- iii) Cette fois, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_n = \exp(2000 + 25n) = \exp(2000) \exp(25)^n$ , d'où  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \exp(2000 + 25(n+1) - 2000 - 25n) = \exp(25)$  (ce qui tend vers  $\exp(25)$ ), donc le rayon de convergence est  $R = 1/\exp(25)$ .

De plus, lorsque  $|z| < 1/\exp(25)$ , on a  $|\exp(25)z| < 1$  donc  $\exp(2000) \sum_{n=0}^{\infty} (\exp(25)z)^n = \frac{\exp(2000)}{1-\exp(25)z}$ . Donc la somme de la série entière (à l'intérieur du disque ouvert de convergence) est  $z \mapsto \frac{\exp(2000)}{1-\exp(25)z}$ .