

L'énoncé est constituée d'exercices **indépendants** (il n'est pas nécessaire d'avoir réussi un exercice pour pouvoir faire les autres) dont les deux premiers portent sur le théorème suivant :

Théorème de dérivation d'une limite de fonctions

Soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et telles que

- i) pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- iii) $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et sa dérivée est g .

Exercice 1 : Preuve du théorème

On considère des fonctions f et g et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont les hypothèses i), ii) et iii) du théorème.

Cet exercice vise à démontrer qu'alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et que sa dérivée est g .

1. Justifier que la fonction g est nécessairement continue sur I .

Toutes les fonctions f'_n sont continues, or g est leur limite uniforme sur I , donc g est continue sur I .

2. Dans cette question, on fixe un nombre $x_0 \in I$. On va chercher à démontrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = g(x_0)$.

- (a) Exprimer avec des quantificateurs l'affirmation « g est continue en x_0 ».

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

- (b) Exprimer de même l'affirmation « $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers g ».

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \forall x \in I, |f'_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

- (c) Pour $x \in I$, on désigne par $I_0(x)$ l'intervalle $I_0(x) = \begin{cases} [x, x_0] & \text{si } x \leq x_0 \\ [x_0, x] & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, il existe un nombre $h_n(x) \in I_0(x)$ tel que $f_n(x) - f_n(x_0) = (x - x_0)f'_n(h_n(x))$.

On utilise le théorème des accroissements finis :

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $x \in I$, le caractère $\mathcal{C}^1$ de f_n sur $I(x)$ donne (d'après le théorème des accroissements finis) l'existence d'un nombre dans I_0 (on choisit de noter ce nombre $h_n(x)$) tel que $f_n(x) - f_n(x_0) = (x - x_0)f'_n(h_n(x))$.

- (d) Grâce aux résultats des questions 2a, 2b et 2c, montrez que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \exists N \in \mathbb{N} :$$

$$\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, |f_n(x) - f_n(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} |x - x_0|.$$

Indications :

- Vous serez peut-être amené.e à utiliser le résultat des questions 2a et 2b pour une autre valeur de ε (par exemple $\varepsilon/2$ ou $\varepsilon/3$ ou quelque chose d'analogue).
- Vous serez probablement amené.e à décomposer $f'_n(h_n(x)) - g(x_0)$ sous la forme $(f'_n(h_n(x)) - g(h_n(x))) + (g(h_n(x)) - g(x_0))$.

Soit $\varepsilon > 0$.

En question 2a on avait une affirmation vraie pour tout $\varepsilon > 0$, donc elle est vraie en particulier pour $\varepsilon/3$. Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$.

De même, la question 2b indique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \forall x \in I, |f'_n(x) - g(x)| < \varepsilon/3$.

Pour tout $n \in \llbracket N; +\infty \rrbracket$ et pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$, on a alors

$$\begin{aligned} & |f_n(x) - f_n(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| \\ &= |f'_n(h_n(x)) - g(x_0)| |x - x_0| = |f'_n(h_n(x)) - g(h_n(x)) + g(h_n(x)) - g(x_0)| |x - x_0| \\ &\leq (|f'_n(h_n(x)) - g(h_n(x))| + |g(h_n(x)) - g(x_0)|) |x - x_0| \end{aligned}$$

Mais comme $n \geq N$, on a $|f'_n(h_n(x)) - g(h_n(x))| \leq \varepsilon/3$, et comme $h_n(x) \in I_0(x) \subset]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$, on a $|g(h_n(x)) - g(x_0)| \leq \varepsilon/3$.

Donc $|f_n(x) - f_n(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| \leq (\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}) |x - x_0|$, qui est bien le résultat demandé.

- (e) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I \setminus \{x_0\},$
 $|f(x) - f(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| < \varepsilon |x - x_0|.$

Soit $\varepsilon > 0$. On vient de montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I,$

$$|f_n(x) - f_n(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} |x - x_0|.$$

Pour $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I \setminus \{x_0\}$, on a alors

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_n(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| \quad (\text{par convergence simple de } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vers } f). \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} |x - x_0| \quad \text{car à partir d'un certain rang, tous les termes sont } \leq \frac{2\varepsilon}{3} |x - x_0|. \\ &< \varepsilon |x - x_0| \quad \text{car } |x - x_0| \neq 0 \text{ et } \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

- (f) Conclure que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = g(x_0)$.

On vient de démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I \setminus \{x_0\}, \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Cela indique précisément que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)$.

Donc f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = g(x_0)$.

3. Conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f' = g$.

La démonstration effectuée en question 2 est valable pour tout $x_0 \in I$, donc on a montré que pour tout $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = g(x_0)$.

Cela signifie précisément que f est dérivable sur I avec $f' = g$. Or g est continue, donc f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Exercice 2 : Convergence vers la valeur absolue

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}. \end{cases}$

1. Démontrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 + \frac{1}{n} = x^2 \in \mathbb{R}^+$. De plus, la fonction racine carré est continue sur

$$\mathbb{R}^+, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue.

2. Démontrer que chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $[\frac{1}{n}; +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. De plus la fonction racine carré est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc la fonction f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient (par dérivée de fonctions composées) : $f'_n(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}.$

3. Utilisez le *théorème de dérivation d'une limite de fonctions* pour démontrer que $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

On vient de montrer que l'hypothèse i) du théorème de dérivation est satisfaite. De plus la question précédente montre une convergence uniforme qui implique une convergence simple, que sorte que l'hypothèse ii) est satisfaite avec $f : x \mapsto |x|$.

Si l'hypothèse iii) était aussi satisfaite, le théorème indique que f serait de classe $\mathcal{C}^1$. Ce n'est pas le cas car f n'est pas dérivable en 0. Donc l'hypothèse iii) n'est pas satisfaite, c'est à dire que $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction (que l'on notera g dans la suite de cet exercice).

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 + \frac{1}{n} = x^2$, d'où (par continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x| \text{ et finalement } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |f'_n(x) - g(x)| = 1$. En déduire que $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication : on pourra étudier la monotonie de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n x^2}}} - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ses limites en 0 et en $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'_n(x) - g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n x^2}}} - 1. \text{ Or } x \mapsto \frac{1}{n x^2} \text{ est décroissante sur}$$

$\mathbb{R}_+^*$, donc $x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{n x^2}}$ aussi, donc $x \mapsto 1/\sqrt{1 + \frac{1}{n x^2}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto \left(1/\sqrt{1 + \frac{1}{n x^2}}\right) - 1$ (c'est à dire $f'_n - g$) est aussi croissante.

Or $\left(1/\sqrt{1 + \frac{1}{n x^2}}\right) - 1$ tend vers -1 en 0 et vers 0 en $+\infty$. Donc $|f'_n(x) - g(x)| = g(x) - f'_n(x)$ qui définit une fonction décroissante qui tend vers 1 en 0 et vers 0 en $+\infty$.

Il en découle que $\sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |f'_n(x) - g(x)| = 1$.

Si la suite (f'_n) convergerait *uniformément* sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction, elle convergerait aussi *simplement* vers cette fonction, qui coïnciderait donc avec g (par unicité de la limite).

Or la suite $\left(\sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |f'_n(x) - g(x)|\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tends pas vers 0, donc $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Soit $\delta > 0$. Montrer que sur $[\delta, +\infty[$, la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà montré que $x \mapsto |f'_n(x) - g(x)|$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^*$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

$$\text{Donc } \sup_{x \in [\delta, +\infty[} |f'_n(x) - g(x)| = |f'_n(\delta) - g(\delta)| = 1 - 1/\sqrt{1 + \frac{1}{n \delta^2}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \delta^2} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 1/\sqrt{1 + \frac{1}{n \delta^2}} = 0$, c'est à dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\delta, +\infty[} |f'_n(x) - g(x)| = 0$.

Donc $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $[\delta, +\infty[$.

Exercice 3 : Séries entières

1. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières ci-dessous :

$$\text{i) } \sum (-1)^n \frac{n-1}{n+1} z^n$$

$$\text{ii) } \sum z^{n!}$$

Dans chacun des deux cas, on va désigner par (a_n) les coefficients de la série entière.

i) On constate que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} \right|$ qui tends vers 1 (quand $n \rightarrow \infty$). Donc le rayon de convergence est 1.

ii) Les coefficients de la série $\sum z^{n!}$ sont donnés (pour $i \in \mathbb{N}$) par $a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n : i = n! \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Comme la plupart de ces coefficients sont nuls, une division par 0 empêche généralement de calculer $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

On constate toutefois que si $|z| < 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, |z^{n!}| \leq |z^n|$, or la série $\sum z^n$ converge absolument (car la série entière $\sum z^n$ a rayon de convergence $R = 1$, de sorte que quand $|z| < 1$ on est à l'intérieur du disque de convergence, il y a donc convergence absolue), donc la série $\sum z^{n!}$ converge absolument.

Au contraire si $|z| > 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, |z^{n!}| \geq 1$, d'où la divergence grossière.

Donc le rayon de convergence de $\sum z^{n!}$ vaut 1.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto (1-x) \cos(\pi x)$ est développable en série entière au voisinage de 0. Déterminer les coefficients de ce développement en série entière, et son rayon de convergence.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\pi x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x\pi)^{2n}}{(2n)!}$ où la somme converge bien car le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ est $+\infty$ (de sorte que $x\pi$ est bien à l'intérieur de son disque de convergence).

$$\text{Donc } (1-x) \cos(\pi x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \pi^{2n} - x^{2n+1} \pi^{2n}}{(2n)!},$$

que l'on peut écrire sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{2k} = (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} \\ a_{2k+1} = (-1)^{k+1} \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} \end{cases}$.

On peut aussi l'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\lceil n/2 \rceil} \frac{\pi^{2\lfloor n/2 \rfloor}}{(2\lfloor n/2 \rfloor)!} z^n$.

Le rayon de convergence est $+\infty$ car on a montré que la somme converge quelque soit $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : Rayon de convergence

Un.e étudiant.e a répondu à l'énoncé suivant :

Pour chaque série entière $\sum a_n z^n$ ci-dessous, déterminer son rayon de convergence R , et sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur le disque $D(0, R)$.

$$\text{i) } \sum \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n$$

$$\text{ii) } \sum (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n$$

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

$$i) \quad 1/R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos((n+1)\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{n\pi}{2})} = 1.$$

$$\text{De plus, quand } |z| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\frac{n\pi}{2}) z^n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{1-z}.$$

ii) D'après

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} = - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}\right)^0 = -1.$$

Donc $R = -1$.

$$\text{De plus } (-1)^n \frac{n}{n+1} = (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n+1},$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n = \frac{1}{1-z} + \frac{\ln(1+z)}{z}.$$

1. Pour chacune des questions (i) et ii), la réponse de l'étudiant.e est-elle correcte? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux.

- i) • Dans le critère de d'Alembert, il faut considérer $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ et non pas simplement $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- L'étudiant.e écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ avant d'avoir montré que cette suite converge. En fait, elle diverge, de sorte que l'égalité $1/R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'est pas satisfaite.
- Lorsque n est impair, a_n est nul. Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est nul si n est pair, infini si n est impair, et ne tends pas du tout vers 1.
- L'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\frac{n\pi}{2}) z^n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{1-z}$ ne fait aucun sens : si $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\frac{n\pi}{2}) z^n$ existe, alors elle dépend uniquement de z , mais pas de n (n est une "variable muette").
- ii) • Le critère d'Hadamard est en fait $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, avec une valeur absolue et une limite supérieure.
- L'étudiant.e écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$ avant d'avoir montré que la limite existe.
- L'étudiant.e affirme que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}\right)^0$. Cela n'a rien d'évident et aurait du être justifié.
- Un rayon de convergence est toujours positif. L'affirmation " $R = -1$ " ne fait donc aucun sens.
- Le calcul donnant $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n = \frac{1}{1-z} + \frac{\ln(1+z)}{z}$ n'est pas assez détaillé et il se trouve que son résultat est faux (on le verra en question suivante qui présente un calcul correct).
- Il aurait fallu préciser pour quelles valeur de z l'expression $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n = \frac{1}{1-z} + \frac{\ln(1+z)}{z}$ est valide : Ça ne peut pas être $D(0,1)$ tout entier car il y a une division par z , donc ça nécessite $z \neq 0$.

2. Pour chacune des questions (i) et ii), si vous avez jugé que la réponse l'étudiant.e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrire complètement la réponse en donnant une réponse correcte et satisfaisante.

i) Les termes de la suite $(\cos(\frac{n\pi}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$ sont $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots)$.

Les termes de la suite $(|\cos(\frac{n\pi}{2})|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ valent donc 1 si n est pair et 0 si n est impair. Leur limite supérieure vaut donc 1.

Donc $R = 1$.

Et quand $|z| < 1$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n} = \frac{1}{1-z^4}$ (car $|z^4| < 1$) et $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n+2} = \frac{z^2}{1-z^4}$, donc on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\frac{n\pi}{2}) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n+2} = \frac{1-z^2}{1-z^4} = \frac{1}{1+z^2}.$$

ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^2}{(n+2)n} \right|$ qui tends vers 1, donc le rayon de convergence vaut 1.

$$\text{De plus pour } |z| < 1, \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}.$$

(Remarque : si on ne se souvient pas de ces coefficients, on peut les retrouver en se souvenant que $\ln(1+z)$ a pour dérivée $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n$.)

De plus (toujours pour $|z| < 1$), $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$. En utilisant de plus la relation

“ $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n \frac{n}{n+1} = (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n+1}$ ”, on obtient que pour tout $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n = \frac{1}{1+z} - \frac{\ln(1+z)}{z}.$$

De plus, comme l'énoncé demande l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n$ sur l'ensemble du disque $D(0,1)$ (et pas uniquement sur $D(0,1) \setminus \{0\}$), on précise de plus que quand $z = 0$, cette somme vaut simplement 0 (car tous les termes sont nuls).