

L'énoncé est constituée d'exercices **indépendants** (il n'est pas nécessaire d'avoir réussi un exercice pour pouvoir faire les autres) dont les deux premiers portent sur le théorème suivant :

Théorème de dérivation d'une limite de fonctions

Soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et telles que

- i) pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- iii) $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et sa dérivée est g .

Exercice 1 : Preuve du théorème

On considère des fonctions f et g et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont les hypothèses i), ii) et iii) du théorème.

Cet exercice vise à démontrer qu'alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et que sa dérivée est g .

1. Justifier que la fonction g est nécessairement continue sur I .
2. Dans cette question, on fixe un nombre $x_0 \in I$. On va chercher à démontrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = g(x_0)$.

- (a) Exprimer avec des quantificateurs l'affirmation « g est continue en x_0 ».
- (b) Exprimer de même l'affirmation « $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers g ».

- (c) Pour $x \in I$, on désigne par $I_0(x)$ l'intervalle $I_0(x) = \begin{cases} [x, x_0] & \text{si } x \leq x_0 \\ [x_0, x] & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, il existe un nombre $h_n(x) \in I_0(x)$ tel que $f_n(x) - f_n(x_0) = (x - x_0)f'_n(h_n(x))$.

- (d) Grâce aux résultats des questions 2a, 2b et 2c, montrez que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \exists N \in \mathbb{N} :$

$\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, |f_n(x) - f_n(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} |x - x_0|.$

Indications :

- Vous serez peut-être amené.e à utiliser le résultat des questions 2a et 2b pour une autre valeur de ε (par exemple $\varepsilon/2$ ou $\varepsilon/3$ ou quelque chose d'analogue).
- Vous serez probablement amené.e à décomposer $f'_n(h_n(x)) - g(x_0)$ sous la forme $(f'_n(h_n(x)) - g(h_n(x))) + (g(h_n(x)) - g(x_0))$.

- (e) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I \setminus \{x_0\},$
 $|f(x) - f(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| < \varepsilon |x - x_0|.$

- (f) Conclure que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = g(x_0)$.

3. Conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f' = g$.

Exercice 2 : Convergence vers la valeur absolue

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}. \end{cases}$

1. Démontrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue.
2. Démontrer que chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
3. Utilisez le *théorème de dérivation d'une limite de fonctions* pour démontrer que $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction (que l'on notera g dans la suite de cet exercice).
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |f'_n(x) - g(x)| = 1$. En déduire que $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. *Indication : on pourra étudier la monotonie de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{nx^2}}} - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ses limites en 0 et en $+\infty$.*
- Soit $\delta > 0$. Montrer que sur $[\delta, +\infty[$, la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

Exercice 3 : Séries entières

- Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières ci-dessous :
 - $\sum (-1)^n \frac{n-1}{n+1} z^n$
 - $\sum z^{n!}$
- Montrer que la fonction $x \mapsto (1-x) \cos(\pi x)$ est développable en série entière au voisinage de 0. Déterminer les coefficients de ce développement en série entière, et son rayon de convergence.

Exercice 4 : Rayon de convergence

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Pour chaque série entière $\sum a_n z^n$ ci-dessous, déterminer son rayon de convergence R , et sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur le disque $D(0, R)$.

- $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n$
- $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n$

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

i) $1/R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} = 1.$

De plus, quand $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-z}.$

ii) D'après

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} = - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}\right)^0 = -1.$$

Donc $R = -1$.

De plus $(-1)^n \frac{n}{n+1} = (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n+1},$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n = \frac{1}{1-z} + \frac{\ln(1+z)}{z}.$$

- Pour chacune des questions (i) et ii), la réponse de l'étudiant·e est-elle correcte ? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux.
- Pour chacune des questions (i) et ii), si vous avez jugé que la réponse l'étudiant·e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrire complètement la réponse en donnant une réponse correcte et satisfaisante.