

Exercice 1 : Séries équivalentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n+1} \end{cases}$$

1. Indiquez les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 , et u_5 , ainsi que celles de v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 , et v_5 . *Dans cette question spécifique, on ne vous demande pas de justification*

$$\begin{array}{cccccc} u_0 = 2 & u_1 = 0 & u_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} & u_3 = 0 & u_4 = \frac{2}{\sqrt{5}} & u_5 = 0 \\ v_0 = -2 & v_1 = 0 & v_2 = 0 & v_3 = 0 & v_4 = -\frac{2}{5} & v_5 = 0 \end{array}$$

2. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\frac{\pi}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$, et celles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- La suite $(\cos(n\frac{\pi}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend que les valeurs -1, 0, et 1. Il ne peut donc pas y avoir de sous suite qui converge vers autre chose que -1, 0, ou 1. Réciproquement, $-1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos((4n+2)\frac{\pi}{2}))$, $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos((2n)\frac{\pi}{2}))$ et $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos((4n)\frac{\pi}{2}))$ donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\cos(n\frac{\pi}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$ est $\{-1, 0, 1\}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}$, donc la suite (u_n) tends vers 0. L'ensemble de ses valeurs d'adhérence est donc $\{0\}$.

3. Comment définit-on le fait que deux suites soient équivalentes ? (*Rappelez la définition vue en cours.*)

Deux suites (x_n) et (y_n) sont équivalentes s'il existe une suite (z_n) qui tend vers 1 telle qu'à partir d'un certain rang, on ait $x_n = y_n z_n$ (c'est à dire telle que « $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N; \infty \rrbracket, x_n = y_n z_n$ »).

4. Montrer que $u_n \sim u_n + v_n$.

On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, w_{4n+1} = w_{4n+2} = w_{4n+3} = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{4n} = 1 - \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \end{cases}$

- la suite (w_n) tends vers 1 car $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = u_n w_n$: d'une part, si n est multiple de 4 alors $u_n w_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{n+1} = u_n + v_n$, et d'autre part, si n n'est pas multiple de 4, alors $w_n = 1$ et $v_n = 0$, d'où $u_n + v_n = u_n = u_n w_n$.

Donc $u_n \sim u_n + v_n$, car on satisfait bien les propriétés de la question précédente en notant $x_n = u_n$, $y_n = u_n + v_n$ et $z_n = w_n$.

5. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

- La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite alternée : sa valeur absolue est $\frac{2}{\sqrt{2n+1}}$ qui est positive décroissante et tends vers 0, tandis que son signe est alterné (les u_{4n} sont positifs et les u_{4n+2} sont négatifs).
- Donc la série $\sum_{n \geq 0} u_{2n}$ converge, c'est à dire que la suite de ces sommes partielles converge.

- Comme les termes impairs de (u_n) sont nuls, les sommes partielles de

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ sont des sommes partielles de } \sum_{n \geq 0} u_{2n} : \quad \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2k}.$$

- Donc la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, c'est à dire que la série $\sum u_n$ est convergente.

6. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$.

- Montrons tout d'abord que la série $\sum v_n$ diverge. On considère une sous suite de ses sommes partielles : $\sum_{k=0}^{4n} v_k = \sum_{k=0}^n -\frac{2}{4n+1}$. Elle est de même

nature que $\sum_{k=0}^n \frac{2}{4n+1}$ qui diverge par comparaison avec une série de Riemann ($\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{4n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)} \geq 0$). Comme une sous suite des sommes partielles de $\sum v_n$ diverge, il en découle que $\sum v_n$ diverge.

- Donc $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Il en découle qu'elle est divergente. (*Rappel de la preuve que la somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente* : si la série $\sum (u_n + v_n)$ convergerait alors $\sum v_n$ convergerait car $v_n = (u_n + v_n) - u_n$, ce qui est faux).

Exercice 2 :

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières $\sum a_n z^n$ ci dessous :

i) $\sum \frac{1}{n^4+3} z^{4n}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{1}{n^4+3}$, et on a : $\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{n^4+3}{(n+1)^4+3} = \frac{1+\frac{3}{n^4}}{(1+\frac{1}{n})^4+\frac{3}{n^4}}$ qui

tend vers 1. Donc le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est un. En conséquence, $\sum a_n z^n = \sum b_n z^{4n}$ converge si $|z^4| < 1$ (c'est à dire si $|z| < 1$) et diverge si $|z^4| > 1$ (c'est à dire si $|z| > 1$). Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est donc égal à 1.

$$\text{ii) } \sum \left(-\frac{3n}{n+1}\right)^n z^n$$

Méthode 1

On remarque tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ qui tends vers $\exp(-1)$ (par continuité de $\exp$, sachant que $-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tends vers -1). Donc $a_n \sim (-3)^n e^{-1}$, et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim 3$, donc le rayon de convergence est $1/3$.

Méthode 2

On remarque que (pour $n \in \mathbb{N}$) $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3n}{n+1}$ tends vers 3, donc le rayon de convergence est $1/3$.

$$\text{iii) } \sum \sqrt{(n+2)!} z^n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{n+3}$ qui tend vers $+\infty$. Donc le rayon de convergence est nul.

Exercice 3 : Suites adjacentes ?

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{u_n}{3+u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{P}_n$ la propriété « $u_n > -1$ », que l'on, va montrer par récurrence :

- $u_0 = 1 > -1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors $u_{n+1} + 1 = \frac{3}{3+u_n}$, où $3+u_n > 0$ (car $u_n > -1$ par hypothèse de récurrence). Donc $u_{n+1} + 1 > 0$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Donc par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante tandis que la sous-suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est négative et croissante. *Indication : on pourra par exemple écrire une relation de récurrence satisfaite par chacune de ces deux sous-suites.*

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = -\frac{-\frac{u_n}{3+u_n}}{3-\frac{u_n}{3+u_n}} = \frac{u_n}{9+2u_n}$. Le dénominateur satisfait $9+2u_n \geq 7$ donc u_{n+2} a le même signe que u_n , et $|u_{n+2}| \leq |u_n|$.
- Or $u_1 = -\frac{1}{4} < 0 < 1 = u_0$. Par récurrence, tous les termes pairs sont positifs et tous les termes impairs sont négatifs.
- On a vu que chacune des sous suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est de valeur-absolue décroissante (car $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+2}| \leq |u_n|$). Donc la suite positive $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, tandis que la suite négative $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3. Déduire que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, et déterminer leur limite.

- Donc la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et on note $\ell_0 = \lim u_{2n}$ sa limite. De même la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0, donc elle converge et on note $\ell_1 = \lim u_{2n+1}$ sa limite.
- En utilisant la relation de la question précédente, on a donc $\lim u_{2n+2} = \frac{\lim u_{2n}}{9 + \lim u_{2n}}$, c'est à dire $\ell_0 = \frac{\ell_0}{9 + \ell_0}$, donc $\ell_0^2 + 8\ell_0 = 0$ d'où $\ell_0 \in \{-8, 0\}$. Or la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est positive donc $\ell_0 \geq 0$, donc $\ell_0 = 0$.
- De même $\lim u_{2n+3} = \frac{\lim u_{2n+1}}{9 + \lim u_{2n+1}}$, donc $\ell_1 = \frac{\ell_1}{9 + \ell_1}$ et $\ell_1 \in \{-8, 0\}$. Or la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par -1 , donc sa limite ne peut pas être -8 . Donc $\ell_1 = 0$.
- Les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent donc toutes les deux vers 0.

4. Les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles adjacentes ? *N'oubliez pas de justifier votre réponse (comme à toutes les questions d'ailleurs).*

- On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+1} \leq u_{2n}$ (car $u_{2n+1} \leq 0 \leq u_{2n}$), que la sous suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et la sous-suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ croissante.
- De plus $u_{2n+1} - u_{2n}$ tends vers $0 - 0 = 0$.

Donc les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes (mais   a ne nous est pas très utile car on avait déjà montré qu'elles convergent).

Exercice 4 : Nature de séries de fonctions

On considère deux suites de fonctions réelles $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq |g_n(x)|$.

1. On suppose dans un premier temps que toutes les fonctions f_n et g_n sont positives : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \min(f_n(x), g_n(x)) \geq 0$. *Pour chaque question ci dessous, si l'affirmation est correcte, démontrez le à partir des résultats vus en concours. Si elle est fausse, donnez un contre-exemple qui montre que ce n'est pas le cas.*

- (a) Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge **simplement** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **simplement** sur $\mathbb{R}$?

Montrons que c'est bien le cas, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge :

Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est à termes positifs, et ses termes sont majorés par les $g_n(x)$ dont la somme converge. Donc $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

- (b) Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge **uniformément** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **uniformément** sur $\mathbb{R}$?

Oui c'est bien le cas, et on peut le montrer à partir du critère de Cauchy uniforme :

Si $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \llbracket N; +\infty \llbracket$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sup_{w \in P} |g_{n+1}(w) + \cdots + g_{n+p}(w)| < \epsilon.$$

Comme les f_n sont plus petits que les g_n , on a aussi (pour ces même n et p),

$$\sup_{w \in P} |f_{n+1}(w) + \cdots + f_{n+p}(w)| < \epsilon.$$

Donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ satisfait elle aussi le critère de Cauchy uniforme, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$,

- (c) Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge **normalement** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **normalement** sur $\mathbb{R}$?

Oui c'est bien le cas : Si $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement, alors la suite réelle positive $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)|$ converge. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq |g_n|$, on déduit que les $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$ existent aussi, avec $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)|$.

Les termes de la série réelle positive $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$ sont donc plus petits que ceux de la série convergente $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)|$, donc $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$ converge, c'est à dire que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. Dans cette deuxième question, on ne suppose plus que les fonctions soient positives (mais on continue à supposer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq |g_n(x)|$).

On pose à nouveau les mêmes trois questions, auxquelles vous devez indiquer si l'affirmation est vraie, et apporter soit une preuve (si elle est vraie) soit un contre-exemple (qui montre qu'elle est fausse).

- (a) Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge **simplement** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **simplement** sur $\mathbb{R}$?

Ce n'est pas vrai et un contre-exemple s'obtient en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = u_n + v_n$ et $g_n(x) = u_n$, où (u_n) et (v_n) sont les suites définies dans l'exercice 1. En effet dans cet exemple, $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f_n(x) \leq g_n(x)$, mais la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ diverge.

- (b) Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge **uniformément** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **uniformément** sur $\mathbb{R}$?

Ce n'est pas vrai et un contre-exemple s'obtient avec le même contre exemple : $f_n(x) = u_n + v_n$ et $g_n(x) = u_n$, où (u_n) et (v_n) sont les suites définies dans l'exercice 1. Dans cet exemple, $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge uniformément car ces fonctions sont constantes, donc la convergence uniforme et la convergence simple sont la même chose (les sups disparaissent de la définition de la convergence uniforme) ; et la suite $\sum_{n \geq 0} f_n$ diverge.

- (c) Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge **normalement** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **normalement** sur $\mathbb{R}$?

Oui, avec la même preuve qu'en question 1.c. En effet, cette preuve n'utilisait pas la positivité des fonctions f_n et g_n mais uniquement de leur valeurs absolues.

3. On considère désormais une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, |u_0(x)| \leq |\cos(x)| \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \left| \frac{\cos(x)}{n!} \right| \end{cases}$$

- (a) Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que les fonctions u_n soient les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$.

$$\text{On pose } \begin{cases} f_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n = u_n - u_{n-1} \end{cases}.$$

$$\text{Alors Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on a bien } \sum_{k=0}^n f_k = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n.$$

- (b) Dédurre de ce qui précède que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = \frac{\cos(x)}{n!}$, d'où $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n!}$. Or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ converge (car la série entière qui définit l'exponentielle a rayon de convergence infini), donc $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement. On en déduit (d'après la question 2.c) que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément. Ses sommes partielles convergent uniformément, c'est à dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.