

Exercice 1 : Continuité

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tendent vers x_0 (et on notera parfois u pour désigner une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

De plus f désigne une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Rappelez la définition de « la fonction f est continue au point x_0 ».

L'écrire avec des quantificateurs.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

2. Démontrer que si f est continue en x_0 , alors

$$\forall u \in \mathcal{S}, \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(x_0)$$

Bien que ça soit un résultat que vous connaissez, il est demandé de le redémontrer en vous appuyant sur la définition de la continuité (et de la limite) en terme de quantificateurs.

On suppose que f est continue en x_0 , et on prend $u \in \mathcal{S}$.

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f , il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Comme $\lim u_n = x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket$, on ait $|u_n - x_0| < \eta$ (c'est à dire $u_n \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$). On en déduit que (pour tout $n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket$) $|f(u_n) - f(x_0)| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim f(u_n) = f(x_0)$.

3. On souhaite désormais montrer la réciproque, c'est à dire qu'on souhaite montrer la propriété $\mathcal{P}$ suivante : « si pour toute suite $u \in \mathcal{S}$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tends vers $f(x_0)$, alors f est continue en x_0 ».

- i) Énoncer la contraposée de cette propriété $\mathcal{P}$.

On l'écrira avec des quantificateurs précis, issus des définitions de la continuité et de la limite.

La contraposée est « si f n'est pas continue en x_0 , alors il existe $u \in \mathcal{S}$ telle que $f(u_n)$ ne tends pas vers $f(x_0)$ ».

c'est à dire que

$$\begin{aligned} &(\exists \epsilon_1 > 0 : \forall \eta > 0, \exists x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[: |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon_1) \\ &\Rightarrow (\exists u \in \mathcal{S}, \exists \epsilon_2 > 0 : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket : |f(u_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_2) \end{aligned}$$

ii) En déduire une preuve de cette réciproque.

Pour montrer cette réciproque, on suppose qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $\forall \eta > 0, \exists x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[: |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon_1$, et on souhaite montrer que $\exists u \in \mathcal{S}, \exists \epsilon_2 > 0 : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \llbracket N, +\infty \llbracket : |f(u_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_2$.

On pose $\epsilon_2 = \epsilon_1$, et pour $n \in \mathbb{N}$, on construit u_n en posant $\eta = \frac{1}{n+1}$: il existe alors un $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, que l'on notera u_n , tel que $|f(u_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_1$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $n = N$, et on remarque qu'on a bien montré l'existence de $\epsilon_2 > 0$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \llbracket N, +\infty \llbracket : |f(u_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_2$.

De plus par construction de (u_n) , on a pour $n \in \mathbb{N} : x_0 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq x_0 + \frac{1}{n+1}$, donc par le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$, c'est à dire que $u \in \mathcal{S}$. Ainsi on a bien montré l'existence de $u \in \mathcal{S}$ et $\epsilon_2 > 0$ tels que $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \llbracket N, +\infty \llbracket : |f(u_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_2$.

Exercice 2 : Rayon de convergence

1. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières ci-dessous

i) $\sum -\frac{n+3}{\pi^{(n+3)}} z^n$

On commence par calculer la valeur absolue du rapport de deux coefficients consécutifs : pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+4}{\pi^{n+4}} \frac{\pi^{n+3}}{n+3} = \frac{1+4/n}{1+3/n} / \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi}$ donc le rayon de convergence est π .

ii) $\sum \frac{(-5)^n + 5^{-n}}{(5n^2 + 2)} z^n$

On commence par calculer la valeur absolue du rapport de deux coefficients consécutifs : pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{5^{n+1} + (-5)^{-n-1}}{(5(n+1)^2 + 2)} \frac{(5n^2 + 2)}{5^n + (-5)^{-n}} = \frac{5 + (-5)^{-n-1}/5^n}{1 + (-5)^{-n}/5^n} \frac{5 + 2/n^2}{5(1 + 1/n)^2 + 2/n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 5$ donc le rayon de convergence est $1/5$.

iii) $\sum \frac{z^{(n^2+1)}}{n!}$

Trop de coefficients sont nuls pour utiliser facilement les critères sur les séries entières. À la place utilisons directement un critère sur les séries :

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on calcule la valeur absolue du rapport de deux termes consécutifs : $\left| \frac{z^{((n+1)^2+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^{(n^2+1)}} \right| = \frac{|z|^{2n+1}}{n+1}$ qui tends vers 0 (resp vers $+\infty$) quand $|z| < 1$ (resp $|z| > 1$), donc la série entière converge (resp diverge) quand $|z| < 1$ (resp $|z| > 1$), c'est à dire que le rayon de convergence vaut 1.

iv) $\sum \sqrt{\frac{n}{3^n}} z^{3n}$

De même, deux tiers des coefficients sont nuls ce qui nuit à l'utilisation des critères sur les séries entières. À la place utilisons directement un critère sur les séries :

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on calcule la valeur absolue du rapport de deux termes consécutifs : $\sqrt{\left| \frac{n+1}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n} \right|} \left| \frac{z^{3(n+1)}}{z^{3n}} \right| \rightarrow |z|^3 / \sqrt{3}$, et cette limite est inférieure (resp supérieure) à 1 si $|z| < \sqrt[6]{3}$ (resp $|z| > \sqrt[6]{3}$) donc le rayon de convergence est $\sqrt[6]{3}$ (c'est à dire $3^{1/6}$).

2. Déterminer le rayon de convergence, et exprimer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où

les coefficients a_n sont définis (pour $n \in \mathbb{N}$) par $a_n = \frac{2^n}{(n+1)(n+2)}$.

Indication : on pourra commencer par étudier la série entière $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)} z^n$.

On remarque tout d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

Or pour $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^n = \frac{-\ln(1-z)}{z}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} z^n = \frac{-z - \ln(1-z)}{z^2}$,

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} z^n = \frac{z - (z-1)\ln(1-z)}{z^2}.$$

Quant à la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, son rayon de convergence est $1/2$ et pour $z \in D(0,1/2) \setminus \{0\}$, sa

somme est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} (2z)^n = \frac{2z - (2z-1)\ln(1-2z)}{4z^2}$.

Exercice 3 : Équation différentielle

Dans cet exercice, il n'est pas nécessaire de connaître de théorème sur les équations différentielles.

On vous demande de rédiger vos réponses en utilisant les résultats du cours de Math3A, et pas les théorèmes que vous pourriez connaître sur les équations différentielles.

Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière en 0, qui satisfait

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, f''(t) - \omega^2 f(t) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

- Justifier que les coefficients du développement en série entière de f (au voisinage de 0) satisfont une relation de récurrence.

Soit $\sum a_n z^n$ la série entière, de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme est la fonction f sur $] -R, R[$.

Alors pour $t \in] -R, R[$, $f''(t) - \omega^2 f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} - \omega^2 a_n) z^n = 0$. La série $\sum_{n \geq 0} ((n+1)(n+2)a_{n+2} - \omega^2 a_n) z^n$ est donc associée à la fonction nulle, dont les dérivées successives sont nulles, donc chaque coefficient est nul, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)a_{n+2} - \omega^2 a_n = 0$, ce qui constitue bien une relation de récurrence sur les coefficients a_n .

- Les conditions « $f(0) = 1$ » et « $f'(0) = 0$ » imposent-elles une condition supplémentaire sur les coefficients de la série entière ? Déterminer une expression de tous les coefficients de cette série entière.

Cela impose que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Il en découle (d'après la relation de récurrence) que

$$\forall k \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{2k} = \frac{\omega^{2k}}{2k!} \\ a_{2k+1} = 0 \end{cases}$$

- En déduire la valeur du rayon de convergence, et une expression de la fonction f . Vérifier qu'elle satisfait bien $\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) - \omega^2 f(t) = 0$, $f(0) = 1$, et $f'(0) = 0$.

On en déduit que le rayon de convergence est infini et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \cosh(\omega t)$, qui satisfait bien les conditions demandées.

Exercice 4 : Série de Bertrand

On souhaite retrouver dans cette exercice la condition sur les réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sous laquelle la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge.

1. On suppose dans un premier temps que $\alpha = 1$ et que $\beta > 0$.

i) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, on a

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} dx \leq \frac{1}{k(\ln(k))^\beta}.$$

Soit $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Comme $\forall x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} \leq \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln(k))^\beta}$, on

obtient $\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} dx$ qui revient à l'inégalité demandée.

On admet que par un changement variable on a l'égalité (valable pour $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} dx = \int_{\ln k}^{\ln(k+1)} t^{-\beta} dt$$

ii) en déduire que si $\beta > 1$, alors la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge, tandis que si $\beta \leq 1$, alors elle diverge.

On pourra traiter le cas $\beta = 1$ séparément du cas $\beta < 1$.

• Si $\beta < 1$: pour $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, on a

$\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \geq \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} t^{-\beta} dt = \frac{(\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}$ qui est le terme général d'une série positive divergente (car la somme est télescopique et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} = +\infty$). D'où la divergence de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ (par comparaison de séries positives).

• Si $\beta = 1$: pour $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, on a

$\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \geq \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} t^{-1} dt = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$ qui est le terme général d'une série positive divergente (car la somme est télescopique et $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$). D'où la divergence de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ (par comparaison de séries positives).

• Si $\beta > 1$: pour $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$, on a

$\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \leq \int_{\ln(n-1)}^{\ln n} t^{-\beta} dt = \frac{(\ln n)^{1-\beta} - (\ln(n-1))^{1-\beta}}{1-\beta}$ qui est le terme général d'une série convergente (car la somme est télescopique et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} = 0$). De plus, $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \geq 0$. Donc (par comparaison de séries positives) la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge.

2. Si $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un rang à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \geq \frac{1}{n}$. En

déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

Si $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors pour $n \geq 2$, on a $\frac{n^\alpha (\ln n)^\beta}{n} = n^{\alpha-1} (\ln n)^\beta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (par "croissance comparée") donc il existe un rang à partir duquel $\frac{n^\alpha (\ln n)^\beta}{n} \leq 1$, c'est à dire à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$.

De plus $(1/n)$ est le terme général d'une série positive divergente, donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ diverge (par comparaison de séries positives).

3. Si $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un rang à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \leq \frac{1}{n (\ln n)^2}$.

En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

Si $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors pour $n \geq 2$, on a $\frac{n^\alpha (\ln n)^\beta}{n(\ln n)^2} = n^{\alpha-1} (\ln n)^{\beta-2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ (par "croissance comparée") donc il existe un rang à partir duquel $\frac{n^\alpha (\ln n)^\beta}{n(\ln n)^2} \geq 1$, c'est à dire à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

De plus $\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}\right)$ est une suite positive, et $\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$ est le terme général d'une série convergente, donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge (par comparaison de séries positives).