

Exercice 1 : Suite négligeable

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites à valeurs complexes.

On dit que « La suite (u_n) est négligeable par rapport à (ν_n) » et on note « $u_n = o(\nu_n)$ » si il existe une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tends vers 0, et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \llbracket N, +\infty \llbracket, u_n = \omega_n \nu_n$.

1. Rappelez la définition de « $u_n \sim \nu_n$ » (qui affirme que deux suites sont équivalentes).

C'est l'existence d'une suite (ω_n) qui tends vers 1 telle que $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket N, \infty \llbracket, u_n = \omega_n \nu_n$.

Remarque : Cela n'est pas équivalent à $\lim \frac{u_n}{\nu_n} = 1$.

En effet, par exemple les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1+(-1)^n}{2 \exp(1/(n+1))} \right)_{n \in \mathbb{N}} = (\exp(-1), 0, \exp(-1/3), 0, \exp(-1/5), 0, \dots)$ sont équivalentes (car $\lim \exp(-1/(n+1)) = 1$) mais on n'a pas $\lim \frac{u_n}{\nu_n} = 1$, car $\frac{u_n}{\nu_n}$ n'existe même pas quand n est impair.

2. Soient (u_n) et (ν_n) deux suites telles que $u_n \sim \nu_n$.

Soit (x_n) une suite telle que $x_n = o(u_n)$. Montrez que $x_n = o(\nu_n)$.

Comme $x_n = o(u_n)$, il existe une suite $(\omega_n^{(0)})$ qui tends vers 0 et un rang $N^{(0)} \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \llbracket N^{(0)}, \infty \llbracket, x_n = \omega_n^{(0)} u_n$.

De plus, comme $u_n \sim \nu_n$, il existe une suite $(\omega_n^{(1)})$ qui tends vers 1 et un rang $N^{(1)} \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \llbracket N^{(1)}, \infty \llbracket, u_n = \omega_n^{(1)} \nu_n$.

On pose alors $N = \max(N^{(0)}, N^{(1)})$ et on remarque que pour $n \in \llbracket N, \infty \llbracket, x_n = \omega_n^{(0)} \omega_n^{(1)} \nu_n$.

Comme la suite $(\omega_n^{(0)} \omega_n^{(1)})$ tend vers 0, on en déduit que $x_n = o(\nu_n)$.

3. Soient (a_n) , (b_n) , (u_n) , (ν_n) et (x_n) cinq suites telles que :

$$\begin{cases} a_n = u_n + o(x_n) \\ b_n = \nu_n + o(x_n) \end{cases}$$

Montrer que $a_n - b_n = u_n - \nu_n + o(x_n)$. Peut-on aussi affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n = u_n - \nu_n$?
Pour rappel, les notation $a_n = u_n + o(x_n)$ et $b_n = \nu_n + o(x_n)$ signifient que $a_n - u_n = o(x_n)$ et $b_n - \nu_n = o(x_n)$.

- Comme $a_n - u_n = o(x_n)$, il existe une suite $(\omega_n^{(a)})$ qui tends vers 0 et un rang $N^{(a)} \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \llbracket N^{(a)}, \infty \llbracket, a_n = u_n + \omega_n^{(a)} x_n$.

De même, comme $b_n - \nu_n = o(x_n)$, il existe une suite $(\omega_n^{(b)})$ qui tends vers 0 et un rang $N^{(b)} \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \llbracket N^{(b)}, \infty \llbracket, b_n = \nu_n + \omega_n^{(b)} x_n$.

Alors, en posant $N = \max(N^{(a)}, N^{(b)})$, on remarque que pour $n \in \llbracket N, \infty \llbracket, a_n - b_n = u_n - \nu_n + (\omega_n^{(a)} - \omega_n^{(b)}) x_n$. Comme la suite $(\omega_n^{(a)} - \omega_n^{(b)})$ tends vers 0, on déduit que $a_n - b_n = u_n - \nu_n + o(x_n)$.

- On ne peut pas affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n = u_n - \nu_n$. Par exemple, si on prend (a_n) , (b_n) et (u_n) qui sont la suite nulle et $(x_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$ et $(\nu_n) = \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$, alors on a bien $a_n = u_n + o(x_n)$ et $b_n = \nu_n + o(x_n)$, mais pour $n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{a_n - b_n}_0 \neq \underbrace{u_n - \nu_n}_{-\frac{1}{(n+1)^2}}$.
4. Soient (u_n) et (ν_n) deux suites telles que $u_n = o(\nu_n)$.
Montrer que si la série $\sum \nu_n$ converge absolument, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
Donner par ailleurs un exemple où la série $\sum \nu_n$ converge (mais pas absolument), et où la série $\sum u_n$ diverge.
- Comme $u_n = o(\nu_n)$, il existe une suite (ω_n) qui tend vers 0 et un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \llbracket N_1, \infty \rrbracket, u_n = \omega_n \nu_n$.
Comme (ω_n) tend vers 0 il existe (en prenant $\epsilon = 1$) un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \llbracket N_2, \infty \rrbracket, |\omega_n| < 1$.
En posant $N = \max(N_1, N_2)$, on remarque que $\forall n \in \llbracket N, \infty \rrbracket, |u_n| \leq |\nu_n|$.
Donc si $\sum |\nu_n|$ converge les sommes partielles de la série positive $\sum |u_n|$ sont majorées par $\sum_{k=0}^{N_1-1} |u_k| + \sum_{n=0}^{\infty} |\nu_n|$, de sorte qu'alors la série $\sum |u_n|$ converge.
 - Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n}$ et $\nu_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, alors $\sum \nu_n$ converge comme série alternée, et $u_n = o(\nu_n)$, mais $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2 : Convergence de suites et de séries

1. Déterminer si les suites suivantes admettent une limite dans $\mathbb{R}$:

(a) $(n^2 (\cos(1/n) - \cos(2/n)))_{n \geq 1}$

On fait un développement limité, en utilisant qu'en zéro, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$:

$$\begin{aligned} n^2 (\cos(1/n) - \cos(2/n)) &= n^2 \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{8}{n^3}\right) \right) \right) \\ &= n^2 \left(\frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = \frac{3}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\cos(1/n) - \cos(2/n)) = 3/2$

(b) $((-1)^n n^2)_{n \in \mathbb{N}}$

Cette suite diverge car la sous suite des termes pairs est $((2n)^2)$ qui tend vers $+\infty$, tandis que la sous suite des termes impairs est $-(2n+1)^2$ qui tend vers $-\infty$ (ces deux limites sont distinctes donc la suite diverge).

(c) $((-1)^n e^{-n^2})_{n \in \mathbb{N}}$

La suite $(e^{-n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, donc d'après l'encadrement (valable pour $n \in \mathbb{N}$) $-e^{-n^2} \leq (-1)^n e^{-n^2} \leq e^{-n^2}$, la suite $((-1)^n e^{-n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers 0.

- (d) Selon la valeur de $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer si la suite $\left(\frac{n^2+n+n \ln(n)}{x^n}\right)_{n \geq 1}$ admet une limite réelle.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $n^2 + n + n \ln(n) = n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}\right)$ où $\lim 1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} = 1$. Donc $n^2 + n + n \ln(n) \sim n^2$ et $\frac{n^2+n+n \ln(n)}{x^n} \sim \frac{n^2}{x^n}$.

- si $|x| > 1$, alors cette suite tend vers 0.
- si $|x| \leq 1$, alors cette suite elle tend vers $+\infty$, donc elle n'a pas de limite réelle.

2. Déterminer si les séries suivantes convergent :

- (a) $\sum_{n \geq 0} \ln(n+1) - \ln(n+1/2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\ln(n+1) - \ln(n+1/2) = \ln\left(\frac{n+1}{n+1/2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1/2}{n+1/2}\right) \sim \frac{1/2}{n+1/2} \sim \frac{1}{2n}$.

Or $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, donc par positivité des termes de ces deux séries, $\sum_{n \geq 0} \ln(n+1) - \ln(n+1/2)$ diverge.

- (b) $\sum_{n \geq 1} n^2 (\cos(1/n) - \cos(2/n))$.

On a déjà vu que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\cos(1/n) - \cos(2/n)) = 3/2$. Donc $\sum_{n \geq 1} n^2 (\cos(1/n) - \cos(2/n))$ diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0).

- (c) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \arctan(1/n)$.

La suite $(\arctan(1/n))_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0. D'où la convergence de la série alternée $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \arctan(1/n)$.

- (d) Selon la valeur de $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^n$ converge.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle est $\sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$ (car $x \neq -1$).

Elle converge si et seulement si $|-x| < 1$, c'est à dire si et seulement si $x < 1$.

Exercice 3 : Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{2-u_n^2}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

On pourra factoriser $\frac{2-u_n^2}{4} = (\sqrt{2} - u_n) \frac{\sqrt{2}+u_n}{4}$ et majorer $\frac{\sqrt{2}+u_n}{4}$.

On procède par récurrence :

- $u_0 = 2$ donc l'inégalité $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$. Montrons que $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ (et qu'en particulier l'inégalité $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ est encore vraie au rang $n+1$.)

On note tout d'abord que $0 \leq \frac{\sqrt{2}+u_n}{4} \leq \frac{\sqrt{2}+2}{4} \leq 1$, d'où il découle que

$$\sqrt{2} - u_n \leq (\sqrt{2} - u_n) \frac{\sqrt{2}+u_n}{4} \leq 0, \text{ d'où } \underbrace{u_n + \sqrt{2} - u_n}_{\sqrt{2}} \leq \underbrace{u_n + (\sqrt{2} - u_n) \frac{\sqrt{2}+u_n}{4}}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{u_n}_{\leq 2}.$$

donc on a bien montré que $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

Il en découle d'une part que par récurrence, l'inégalité $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$, et qu'en conséquence on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$.

On a montré que la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, donc elle converge dans $\mathbb{R}$.

3. Déterminer une équation satisfaite par $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, si on désigne par ℓ cette limite alors on a :

$$\ell = \ell + \frac{2 - \ell^2}{4}$$

On en déduit que $2 - \ell^2 = 0$. De plus $\ell \geq 0$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2} \geq 0$, donc la limite est forcément positive), donc $\ell = \sqrt{2}$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}$.

En déduire que (u_n) est une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$, mais qu'elle n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$.

On le montre par récurrence :

- D'une part, $u_0 = 2 \in \mathbb{Q}$.
- d'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \mathbb{Q}$, on a $u_{n+1} = u_n + \frac{2-u_n^2}{4} \in \mathbb{Q}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}$.

La suite (u_n) est de Cauchy car elle converge vers $\sqrt{2}$. Mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, donc la suite (u_n) n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$. C'est donc une suite de Cauchy à valeur dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Remarque : Cela n'est pas contradictoire car $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Exercice 4 : Convergence d'une série

On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{\sin x}{x+1} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1$ car $\frac{1}{n+1}$ tends vers 0 et $\cos$ est continue. De plus pour $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, donc $\frac{\sin n}{n+1}$ tends vers 0. En conséquence la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tends vers 1.

2. Exprimer les sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} f(n+3) - f(n)$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(k+3) - f(k) &= \sum_{k=3}^{n+3} f(k) - \sum_{k=0}^n f(k) \\ &= f(n+1) + f(n+2) + f(n+3) - f(0) - f(1) - f(2). \end{aligned}$$

3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} f(n+3) - f(n)$ converge.

Les sommes partielles que l'on vient de calculer tendent vers $3 - f(0) - f(1) - f(2)$. D'où la convergence de cette série.

4. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on étudie désormais la convergence de $\sum_{n \geq 0} f(n + \alpha) - f(n)$.

Étudier la convergence de chacune des trois séries $\sum \cos\left(\frac{1}{n+1+\alpha}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$, $\sum \frac{\sin(n+\alpha)}{n+1+\alpha}$ et $\sum \frac{\sin n}{n+1}$.

En déduire que $\sum_{n \geq 0} f(n + \alpha) - f(n)$ converge.

Indication : pour certaines des ces séries on pourra utiliser les théorèmes de comparaison vus en cours, ou bien la "transformée d'Abel" qui affirme que si (a_n) est décroissante et tends vers 0 et si les sommes partielles de $\sum b_n$ sont bornées, alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

- En zéro, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Donc quand $n \rightarrow \infty$,

$$\cos\left(\frac{1}{n+1+\alpha}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1/2}{(n+1+\alpha)^2} - 1 + \frac{1/2}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1+\alpha)^3}\right) + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$= \frac{\alpha(n-2+\alpha)}{(n+1+\alpha)^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{\alpha}{n^3}.$$

Donc, par comparaison de séries positives, la série $\sum \cos\left(\frac{1}{n+1+\alpha}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$ converge.

- Montrons que $\sum \frac{\sin(n+\alpha)}{n+1+\alpha}$ converge en utilisant le résultat rappelé dans l'énoncé. Pour traiter en même temps la troisième série, on va en fait montrer la convergence de $\sum \frac{\sin(n+\alpha)}{n+1+\alpha}$ pour $\alpha \geq 0$:

— La suite $\frac{\sin(n+\alpha)}{n+1+\alpha}$ est décroissante et tends vers 0.

— On calcule la somme partielle de $\sum \sin(n + \alpha)$: Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \sin(k + \alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{i(k+\alpha)} - e^{-i(k+\alpha)}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} \frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^i} - e^{-i\alpha} \frac{1-e^{-i(n+1)}}{1-e^{-i}}}{2i},$$

donc $\left| \sum_{k=0}^n \sin(k + \alpha) \right| \leq \frac{\frac{2}{|1-e^i|} + \frac{2}{|1-e^{-i}|}}{2}$; les sommes partielles de $\sum \sin(n + \alpha)$ sont majorées.

Donc la somme $\sum \frac{\sin(n+\alpha)}{n+1+\alpha}$ converge.

- En considérant $\alpha = 0$ dans ce qui précède, on obtient que la série $\sum \frac{\sin(n)}{n+1}$ converge elle aussi.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n + \alpha) - f(n)$ est égale à la somme $\cos\left(\frac{1}{n+1+\alpha}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{\sin(n+\alpha)}{n+1+\alpha} - \frac{\sin n}{n+1}$, donc par convergence de chacune de ces trois séries, leur somme $\sum_{n \geq 0} f(n + \alpha) - f(n)$

converge elle aussi.