

Exercice 1 : Suite négligeable

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites à valeurs complexes.

On dit que « La suite (u_n) est négligeable par rapport à (ν_n) » et on note « $u_n = o(\nu_n)$ » si il existe une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tends vers 0, et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \llbracket N, +\infty \llbracket, u_n = \omega_n \nu_n$.

1. Rappelez la définition de « $u_n \sim \nu_n$ » (qui affirme que deux suites sont équivalentes).
2. Soient (u_n) et (ν_n) deux suites telles que $u_n \sim \nu_n$.
Soit (x_n) une suite telle que $x_n = o(u_n)$. Montrez que $x_n = o(\nu_n)$.
3. Soient (a_n) , (b_n) , (u_n) , (ν_n) et (x_n) cinq suites telles que :

$$\begin{cases} a_n = u_n + o(x_n) \\ b_n = \nu_n + o(x_n) \end{cases}$$

Montrer que $a_n - b_n = u_n - \nu_n + o(x_n)$. Peut-on aussi affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n = u_n - \nu_n$?
Pour rappel, les notation $a_n = u_n + o(x_n)$ et $b_n = \nu_n + o(x_n)$ signifient que $a_n - u_n = o(x_n)$ et $b_n - \nu_n = o(x_n)$.

4. Soient (u_n) et (ν_n) deux suites telles que $u_n = o(\nu_n)$.

Montrer que si la série $\sum \nu_n$ converge absolument, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.

Donner par ailleurs un exemple où la série $\sum \nu_n$ converge (mais pas absolument), et où la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2 : Convergence de suites et de séries

1. Déterminer si les suites suivantes admettent une limite dans $\mathbb{R}$:

(a) $(n^2 (\cos(1/n) - \cos(2/n)))_{n \geq 1}$

(b) $((-1)^n n^2)_{n \in \mathbb{N}}$

(c) $((-1)^n e^{-n^2})_{n \in \mathbb{N}}$

(d) Selon la valeur de $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer si la suite $\left(\frac{n^2 + n + n \ln(n)}{x^n} \right)_{n \geq 1}$ admet une limite réelle.

2. Déterminer si les séries suivantes convergent :

(a) $\sum_{n \geq 0} \ln(n+1) - \ln(n+1/2)$.

(b) $\sum_{n \geq 1} n^2 (\cos(1/n) - \cos(2/n))$.

(c) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \arctan(1/n)$.

(d) Selon la valeur de $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^n$ converge.

Exercice 3 : Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{2-u_n^2}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

On pourra factoriser $\frac{2-u_n^2}{4} = (\sqrt{2} - u_n) \frac{\sqrt{2}+u_n}{4}$ et majorer $\frac{\sqrt{2}+u_n}{4}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation satisfaite par $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}$.

En déduire que (u_n) est une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$, mais qu'elle n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 : Convergence d'une série

On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{\sin x}{x+1} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
2. Exprimer les sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} f(n+3) - f(n)$.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} f(n+3) - f(n)$ converge.
4. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on étudie désormais la convergence de $\sum_{n \geq 0} f(n+\alpha) - f(n)$.

Étudier la convergence de chacune des trois séries $\sum \cos\left(\frac{1}{n+1+\alpha}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$, $\sum \frac{\sin(n+\alpha)}{n+1+\alpha}$ et $\sum \frac{\sin n}{n+1}$.

En déduire que $\sum_{n \geq 0} f(n+\alpha) - f(n)$ converge.

Indication : pour certaines de ces séries on pourra utiliser les théorèmes de comparaison vus en cours, ou bien la "transformée d'Abel" qui affirme que si (a_n) est décroissante et tends vers 0 et si les sommes partielles de $\sum b_n$ sont bornées, alors la série $\sum a_n b_n$ converge.