Preuves et réfutations

essai sur la logique de la découverte mathématique

Imré LAKATOS
1976

éd° Hermann, coll° *actualités scientifiques et industrielles* (1984)
titre original *Proofs and Refutations*, publié par Cambridge University Press (1976)
trad. Nicolas BALACHEFF et Jean-Marie LABORDE

53 Zig-zag de la découverte

BÊTA : D'aucuns disent que dans l'ordre de la découverte, les théorème précèdent les preuves : "vous devez deviner un théorème mathématique avant de le prouver". D'autre le refusent et prétendent que la découverte procède en tirant des conclusions d'un ensemble déterminé de prémisses et en relevant celles qui sont intéressantes (si on a assez de chances pour en trouver). Ou, pour utiliser une métaphore délicieuse d'un de mes amis, certains disent que dans une structure déductive, le 'zip' heuristique va de la base (la conclusion) vers le sommet (les prémisses), d'autre disent qu'il va du sommet vers la base. Qu'en pensez-vous ?

ALPHA : Que votre métaphore est inapplicable à l'heuristique. La découverte ne monte ni ne descend, mais elle zigzague : stimulée par les contre-exemples, elle va de la conjecture naïve aux prémisses puis revient encore pour effacer la conjecture naïve et la remplacer par le théorème. Conjecture naïve et contre-exemples n'apparaissent pas dans la structure déductive pleinement achevée ; le zig-zag de la découverte ne peut être discerné dans le produit final.

58 Supposé connu ?

On se demande quand l'expression 'l'auteur confesse son ignorance du domaine *x*' viendra remplacer l'euphémisme autoritaire : 'l'auteur suppose familier le domaine *x*' : sûrement pas avant qu'il ne soit reconnu que la connaissance n'a pas de fondement.

61 Réfutations & preuves-analytiques

ALPHA : Voici comment j'ai découvert le cadre : en cherchant un polyèdre dont la suppression d'une face ne permette pas sa mise à plat.

SIGMA : Ainsi non seulement les réfutations agissent comme ferment de la preuve-analytique, mais la preuve-analytique peut agir comme ferment des réfutations ! Quelle alliance diabolique des ennemis apparents !

[*footnote* : Cette classe est assez avancée. Alpha, Béta et Gamma ont émis des soupçons sur trois lemmes alors qu'aucun contre-exemple global n'était apparu. Historiquement la preuve-analytique est apparue plusieurs dizaines d'années plus tard : pendant une longue période les contre-exemple furent soit étouffés ou exorcisés comme monstres, soit répertoriés comme exceptions. Le mouvement de l'heuristique qui va du contre exemple global vers la preuve-analytique, c'est-à-dire l'application du Principe de rétrocession de la contradiction, fut pour ainsi dire inconnu des mathématiques non formalisées du début du dix-neuvième siècle.]

62 Preuve & doute : origine dialectique des 'axiomes'

GAMMA : Ainsi "la vertu d'une preuve logique n'est pas d'emporter la conviction, mais de suggérer le doute". [*footnote* : Forder […]. Ou encore : "C'est un des principaux mérites des preuves que d'instiller au résultat prouvé un certain scepticisme." (Russell […]).]

[*footnote* : Il est bien connu que la *critique* peut jeter le doute sur les 'vérités *a priori*', et éventuellement les réfuter, et ainsi transformer des *preuve* en de simples *explications*. Il n'est pas aussi connu que *le manque de critique ou de réfutation* puisse changer des conjectures peu plausibles en 'vérités *a priori*' et des tentatives d'explication en preuves, mais cela est tout aussi important. L'émergence et la chute d'Euclide ou de Newton en constituent deux exemples majeurs. L'histoire de leur chute est bien connue, mais celle de leur émergence est d'ordinaire dénaturée.

Il semble qu'Euclide ait présenté sa géométrie en tant que cosmologie […]. Ses 'postulats' ainsi que ses 'axiomes' (ou 'notions communes') furent avancés comme autant de propositions audacieuses, provocatrices pour défier Parménide et Zénon, dont les doctrines entraînaient non seulement la fausseté, mais même la fausseté logique, l'inconcevabilité de ces 'postulats'. C'est seulement plus tard que les 'postulats' furent pris pour indubitablement vrais et que les audacieux 'axiomes' anti-Parménide (comme "le tout est plus grand que la partie") ont été acceptés pour triviaux au point d'être omis dans les preuves-analytiques ultérieures et de s'y changer en 'lemmes cachés'. Cela a commencé avec Aristote qui taxait Zénon de maniaque querelleur et ses arguments de 'sophismes'. Cette histoire a été exposée récemment avec des détails passionnants par Szabó […]. Szabó a montré qu'au temps 'Euclide le mot ‘axiome’, comme le mot ‘postulat’, désignait une proposition avancée dans un débat critique (dialectique) pour être évaluée dans es conséquences *sans* pour autant être acceptée par les participants. C'est par une ironie de l'histoire que sa signification a été renversée. L'autorité d'Euclide a culminé au siècle des lumières. Clairault pressait ses collègues de ne pas “obscurcir les preuves et dégoûter les lecteurs” en énonçant des vérités évidentes : Euclide ne le faisait que pour convaincre les “sophistes obstinés” […].]

65 Part du langage en mathématique

GAMMA : Je suis perdu. Quelle *est* votre position ? Vous étiez d'abord le champion des réfutations.

ALPHA : Oh, ma douleur ! Une intuition, lorsqu'elle est mûrie, écarte la polémique
[…]
ALPHA : J'avais oublié les difficultés de la communication langagière (particulièrement avec les pédants et les sceptiques). Mais le cœur des mathématiques reste l'expérience mental (la preuve). Son articulation linguistique (la preuve-analytique) est nécessaire à la communication mais n'est pas pertinente. Je m'intéresse aux polyèdres, vous au langage. Ne voyez-vous pas la pauvreté de vos contre-exemples ? Ils concernent le langage et non les polyèdres.

66 Quelle rigueur est aujourd'hui questionnée ?

[*footnote* : […] Aujourd'hui l'objet du débat est de déterminer ce qu'est ou n'est pas la rigueur des preuves métamathématiques et ensemblistes, comme le montre la discussion bien connue sur la recevabilité des expériences mentales de Gentzen et Zermelo.]

67 Connaissance imparfaite

[*footnote* : Un lieu commun pour les anciens sceptiques était que même si nous avions une connaissance parfaite, nous ne pourrions la formuler parfaitement […]. Ce qui fut oublié au siècle des lumières et a été redécouvert par les intuitionnistes.]

68 Preuve « négatives »

GAMMA : […] **Seules les réfutations sont probantes ; les preuves relèvent de la psychologie**.

70-73 Unir logique et mathématique

Note : […] L'union, au dix-neuvième siècle, de la logique et des mathématiques a eu deux origines essentielles : la géométrie non-euclidienne et la *révolution weierstrassienne de la rigueur*. Elles déterminèrent l'intégration de la preuve (expérience mentale) et de la réfutation, et amorcèrent le développement de la *preuve-analytique*, en introduisant progressivement une forme déductive dans la preuve-expérience-mentale. Ce que nous avons appelé ‘méthode de preuve et réfutations’ fut leur innovation heuristique : *elle réunit pour la première fois les mathématiques et la logique*. La rigueur weierstrassienne triompha de ses opposants réactionnaires, les tenants de la relégation de monstres et ceux de la thèse du lemme caché, qui utilisaient des slogans tels que “les pesanteurs de la rigueur”, “artificialité contre beauté”, etc. *La rigueur de la preuve-analytique remplaçait la rigueur de la preuve :* mais la plupart des mathématiciens ne s'accommodaient de sa pédanterie que pour autant qu'elle leur promettait une certitude complète.
[…]
les différents niveaux de la rigueur ne diffèrent […] que par l'endroit où l'on trace la ligne de démarcation entre rigueur de la preuve-analytique et rigueur de la preuve, c'est-à-dire *entre là où la critique doit cesser et là où la justification doit commencer.* La ‘certitude’ n'est jamais achevée ; les ‘fondations’ ne sont jamais trouvées.
[…]
OMÉGA : […] un nouveau problème : ***la preuve-analytique si elle accroît la certitude, diminue le continu***. […] *Il nous faudrait un contre-poids à l'effet réducteur de la rigueur sur le contenu.*

94 Spéculations inductive & déductive

LE MAÎTRE : […] enfermé dans l'idée que la découverte chemine des faits à la conjecture et de la conjecture à la preuve (mythe de l'induction), il se peut que vous oubliez complètement l'autre choix heuristique : la spéculation déductive. [*footnote* : D'autre part, ceux qui en viennent à croire, du fait de la présentation habituellement déductive des mathématiques, que la marche de la découverte va des axiomes ou des définitions, aux preuves et théorèmes, sont susceptibles d'oublier complètement la possibilité et l'importance des spéculations naïves. En fait c'est le déductivisme qui est le plus grand danger de l'heuristique mathématique, alors que pour l'heuristique scientifique c'est l'inductivisme.]

Heuristique mathématique et heuristique scientifique sont très semblables, non parce qu'elles sont toutes deux inductives, mais parce que toutes deux se caractérisent par la mise en œuvre de conjectures, de preuves et de réfutations. La différence, important, réside dans la nature respective des conjectures, des preuves (en science, des explications) et des contre-exemples.

130-132 Russell, Poincaré, Tarski : vérité & conséquence logique

KAPPA : […] *Pourquoi ne pas accepter que* ***notre aptitude à spécifier ce que nous voulons dire est nulle****, et qu'ainsi,* ***notre aptitude à prouver est non avenue*** *?* **Si vous voulez des mathématiques pleins de sens, vous devez renoncer à la certitude. Si vous voulez la certitude, laisser tomber la signification.** Vous ne pouvez avoir les deux. *Le galimatias est à l'abri des réfutations, les propositions chargées de sens sont réfutables par extension de concepts.*

[…]

THÊTA : […] Je dirais […] que *si une proposition ne peut être réfutée relativement aux constituants a, b... alors elle est logiquement vrai relativement à ces constituants*. Une telle proposition est le résultat final d'un long processus critico-spéculatif au cours duquel certains termes sont complètement déchargés de signification au profit des termes restant ou de la forme du théorème.

Maintenant tout ce que dit Kappa, c'est qu'il n'y a pas de propositions logiquement vraies relativement à *tous* leurs constituants. Mais il peut y avoir des propositions vraies relativement à *certains* constituants, en sorte que le flot des réfutations ne puisse être libéré que si de nouveaux candidats à l'extension sont ajoutés. Si nous allons jusqu'au bout nous finirons dans l'irrationalisme, mais nous n'y sommes pas forcés. Où donc alors devrions-nous tracer la frontière ? On peut très bien n'admettre l'extension de concepts que pour un sous-ensemble déterminé de constituants qui deviennent les cibles principales de la critique. La vérité logique ne dépendra pas de leur signification.

SIGMA : Ainsi, après tout, avons-nous adopté la position de Kappa : nous avons rendu la vérité indépendante de la signification d'au moins *certains* termes !

THÊTA : C'est vrai. Mais si nous voulons défier le scepticisme de Kappa, et échapper à son infinité vicieuse, nous devons certainement arrêter l'extension de concepts là où elle cesse d'être un engrais pour devenir un herbicide total : il nous faut probablement trouver quels sont les termes dont la signification ne peut être étendue qu'au prix de la destruction des principes de bases de la rationalité. [*footnote* : La critique mathématique du dix-neuvième siècle a étendu de plus en plus de concepts et déplacé la charge sémantique de plus en plus de termes vers la *forme logique* des propositions, et vers la signification de termes peu nombreux, (jusque-là) inextensibles. De 1930 à 1940 ce processus sembla se ralentir, et la ligne de démarcation entre les termes inextensibles (logiques) et extensibles (descriptifs) sembla se stabiliser. Une liste, contenant un petit nombre de termes logiques, finit par recueillir un large consensus, de sorte que la définition générale de la vérité logique devint possible ; la vérité logique ne l'était plus "relativement" à une liste *ad hoc* de constituants. (Cf. Tarski [1935]). Quoi qu'il en soit Tarski était embarrassé par cette démarcation et se demandait si, après tout, il devait revenir à un concept relativisé de contre-exemple et donc de vérité logique (p. 240) ; il en fut de même de Bolzano que, soit dit en passant, Tarski ne connaissait pas. Le résultat le plus intéressant dans cette direction se trouve dans un article de Popper ([1947-1948]) dont il découle qu'on ne peut abandonner davantage de constantes logiques sans abandonner certaines principes fondamentaux du débat rationnel.]

148 DÉFINIR = ABRÉGER

[*footnote* : "Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis" (Pascal [1659]). "Reportez-vous aux définitions" (Pólya [1945] […]).]

158-159 PREUVE FORMELLE

THÊTA : Vous prétendez ainsi que le théorème reste vrai, quoi que je substitue à vos termes parfaitement connus.

EPSILON : Vous pouvez substituer n'importe quoi aux termes parfaitement connus qui sont *spécifiques* de l'algèbre linéaire.

THÊTA : Je ne peux pas remplacer vos termes primitifs non spécifiques, comme 'tout', 'et', '2', etc. ?

EPSILON : Non. Mais vous pouvez mettre n'importe quoi à la place de mes termes *spécifiques* parfaitement connus, comme 'sommet', 'arête', 'face', etc. : de cette façon je pense avoir éclairci ce que je veux dire par réfutation.

[...]

THÊTA : […] Vous caractérisation de l'idée de contre-exemple semble raisonnable. Mais si c'est cela un contre-exemple, la signification de vos 'termes parfaitement connus' est immatérielle. Et cela, si votre prétention est justifiée, est précisément le mérite de votre preuve. Une preuve, si elle est irréfutable, ne repose pas, d'après la notion même d'irréfutabilité d'une preuve, sur la signification des termes spécifiques 'parfaitement bien connus'. Donc le poids de votre preuve, si vous avez raison, repose entièrement sur la signification des termes sous-jacents, non spécifiques, ici l'arithmétique, la théorie des ensembles, la logique, et pas le moins du monde sur la signification de vos termes spécifiques.

J'appellerai *formelle* une telle preuve, car elle ne dépend pas du tout de la signification des termes spécifiques. ***Le degré de formalisme*** **dépend certainement des termes non spécifiques**, le fait que ces termes (que j'appellerai termes formatifs) soient parfaitement connus est vraiment important. **En fixant leur signification nous** énonçons ce qui peut être accepté pour contre-exemple et ce qui ne le peut pas. Nous

régulons ainsi **le débordement des contre-exemples**. S'il n'y a pas de contre-exemples au théorème, nous l'appellerons *tautologie :* dans notre cas une tautologie de la théorie arithmético-ensembliste.

176 Preuves & réfutations depuis 1847 (Seidel)

Seidel a découvert d'un même coup le concept-éprouvette de convergence uniforme et la méthode des preuves et réfutations. Il était pleinement conscient de sa découverte méthodologique qu'il énonça avec beaucoup de clarté dans son article [*footnote* : Seidel [1847], p. 383.] :

"Quand, partant de la certitude ainsi acquise que le théorème n'est pas universellement valide, et de là que sa preuve doit reposer sur quelque présupposition cachée, on soumet alors la preuve à une analyse plus détaillée, il n'est pas très difficile ainsi de découvrir l'hypothèse cachée ; on peut alors déduire en retour que cette hypothèse n'est pas satisfaite par les séries qui représentent des fonctions discontinues, et ce n'est qu'ainsi que l'accord peut être rétabli entre la séquence de la preuve, mis à part cela, correcte et ce qui avait été établi d'autre part.

178-181 Ravages et faillibilité du rigorisme : recherche & enseignement

alors qu[e les rigoristes] s'évertuaient sans relâche à améliorer leurs conjectures par la relégation d'exceptions, l'idée de les *améliorer*, de les éprouver en prouvant, ne leur est jamais venue. Les deux activités de spéculation et de preuve sont strictement séparées dans la tradition euclidienne. L'idée d'une preuve digne de ce nom, mais pas encore concluante, était étrangère aux rigoristes. Les contre-exemples étaient pris pour de graves et désastreux défauts, ils montraient qu'une conjecture était fausse et que l'on devait reprendre la preuve à zéro.

Cela est compréhensible, si l'on considère considère qu'au dix-huitième siècle on appelait preuves de piètres bouts de raisonnement inductif. Et il n'y avait pas moyen d'améliorer *ces* 'preuves'. Elles étaient proprement mises aux rebut comme 'preuves non rigoureuses — ce qui signifie, absence de preuves'. *L'argumentation inductive était faillible ; ainsi donc elle fut jetée aux flammes. L'argumentation déductive prit sa place car elle passait pour infaillible.* "Je fais disparaître toute incertitude" annonçait Cauchy. C'est dans ce contexte que la réfutation du théorème 'rigoureusement' prouvé par Cauchy doit être appréciée. Et cette réfutation ne fut pas un cas isolé ; la preuve rigoureuse donnée par Cauchy de la formule d'Euler fut, comme nous l'avons vu, suivie de la même façon d'articles énonçant les 'exceptions' bien connues.

Il n'y avait que deux issues : soit entièrement réviser la philosophie infaillibiliste des mathématiques sous-jacente à la méthode euclidienne, ou d'une façon ou d'une autre étouffer le problème. Examinons d'abord ce qu'aurait supposé la révision de l'approche infaillibiliste : on aurait certainement dû abandonner l'idée que toutes les mathématiques peuvent se réduire à des trivialités indubitablement vraies, qu'il y a des énoncés sur lesquels notre sens de la vérité ne peut être trompé. Il aurait fallu aussi abandonner l'idée que notre intuition, inférentielle, déductive, est infaillible. Seule cette double reconnaissance pouvait ouvrir la voie au libre développement de la méthode des preuves et réfutations, à son application à l'appréciation critique des l'argumentation déductive et au problème du traitement des contre-exemples.

Aussi longtemps que le contre-exemple a été un défaut flétrissant non seulement le théorème mais aussi le mathématicien qui s'en fait l'avocat, aussi longtemps qu'il n'y eut que des preuves et non-preuves, mais pas de preuves valides souffrant de légères imperfections, la critique mathématique était exclue. C'est le fond philosophique infaillibiliste de la méthode euclidienne qui est à l'origine du genre autoritaire traditionnel en mathématiques, qui empêcha la publication et la discussion de conjectures, et rendit impossible l'émergence de la critique mathématique. La critique littéraire peut exister parce qu'il est possible d'apprécier un poème sans le considérer comme parfait ; la critique mathématique ou scientifique ne peut exister tant que l'on n'apprécie un résultat mathématique ou scientifique que s'il est d'une vérité parfaite. Une preuve est une preuve seulement si elle prouve ; et de deux choses l'une : elle prouve ou elle ne prouve pas. L'idée, si clairement exprimée par Seidel, qu'une preuve peut être respectable sans être parfaite, était révolutionnaire en 1847, et malheureusement, paraît révolutionnaire encore aujourd'hui.

Ce n'est pas une coïncidence si la découverte de la méthode des preuves et réfutations se produit dans les années 1840, quand **l'échec de l'optique newtonienne** (par les travers de Fresnel des années 1810-1820) **et la découverte des géométries non euclidiennes** (par Lobatschewsky en 1829 et Bolyai en 1832) **font voler en éclat la vanité infaillibiliste**. [*footnote* : […] Un passage de De Morgan illustre le nouvel état d'esprit faillibiliste de ces années 40 : "La tendance apparaît quelquefois de rejeter tout ce qui présente quelques difficultés, ou ne livre pas toutes ses conclusions sans soulever de problème à l'examen de contradictions apparentes. Si par cela on veut dire qu'on ne devrait rien utiliser de façon permanente, ou rien accepter implicitement de confiance, qui ne soit vrai avec le sens plein de l'assertion faite, pour ma part, je ne ferais aucune objection à un courant aussi rationnel. Mais si par-là on devrait en déduire que rien de devrait être présenté à l'étudiant, avec ou sans avertissement, qui ne puisse être compris dans toute sa généralité, alors je protesterais, poliment, contre une restriction tendant, selon moi, non seulement à donner une idée fausse de ce qui est effectivement connu, mais aussi à arrêter le progrès dans la recherche. En dehors de la géométrie, il n'est pas vrai que les sciences mathématiques soient, *par tous leurs aspect*, ces modèles de précision définitive que beaucoup supposent. L'imperfection de notre connaissance des confins de l'*analyse* a toujours été à la mesure de notre méconnaissance absolue de ce qui s'étend au-delà des frontières. Mais le moyen d'étendre les colonies n'a pas consisté à n'en pas sortir [cette remarque vise la méthode de relégation des exceptions] mais à entreprendre des voyages exploratoires, et j'ai la conviction profonde que l'*étudiant* devrait être exercé dans ce sens., c'est-à-dire qu'on devrait lui enseigner autant la façon d'examiner les frontières, que d'en cultiver l'intérieur.]

Avant la découverte de la méthode des preuves et réfutations le problème posé par la succession de contre-exemples à un théorème ‘rigoureusement prouvé’ ne pouvait être ‘résolu’ que par la méthode de relégation des exceptions. *La preuve prouve le théorème, mais elle laisse ouverte la question de savoir quelle est son domaine de validité. Nous pouvons déterminer ce domaine en énonçant et en écartant soigneusement les ‘exceptions’ (cet euphémisme est caractéristique de la période). Ces exceptions sont ensuite insérées dans la formulation du théorème.*

La prédominance de la méthode de relégation des exceptions montre comment la méthode euclidienne, dans certains situations problématiques cruciales, peut avoir des effets nuisibles sur le développement des mathématiques. La plupart de ces situations problématiques surgissent dans les théories mathématiques en développement, là où les concepts en formation sont les véhicules du progrès, là où les développements les plus excitants viennent de concepts auparavant non différenciés. Dans ces théories en formation, l'intuition est dépourvue d'expérience, elle patauge et s'égare. Il n'est pas de théorie qui n'ait vécu une telle période de croissance ; qui plus est, cette période est la plus excitante du point du vue historique et pourrait être la plus intéressante du point de vue de l'enseignement. De telles périodes ne peuvent être comprises véritablement sans que soit comprise la méthode des preuves et réfutations, sans adopter une approche faillibiliste.

Voilà pourquoi Euclide a été le mauvais génie particulièrement de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques, tant au niveau propédeutique qu'à celui de la création.

183-184 L'autoritarisme déductiviste euclidien

La méthodologie euclidienne a développé un certain style de présentation auquel je ferai référence par l'expression ‘style déductiviste’. Dans ce style on commence par une liste précautionneuse *d'axiomes*, de *lemmes* ou de *définitions*. Les axiomes et les définitions apparaissent fréquemment artificiels et d'une complication déroutante. On ne dit jamais comment ces complications sont nées. La liste d'axiomes et de définitions est suivie de *théorème* soigneusement mis en mots, encombrés de conditions pesantes ; il semble impossible que quiconque ait jamais pu les inventer. Le théorème est suivi de la *preuve*.

L'étudiant en mathématiques est obligé, dans le rituel euclidien, de suivre ce tour de prestidigitation sans poser de questions sur le contexte ni sur la façon dont est réalisé l'escamotage. S'il découvre par hasard que certaines des définitions incongrues ont été forgées dans les preuves, s'il s'étonne simplement que ces définitions, lemmes et théorèmes puissent vraiment précéder la preuve, l'illusioniste le bannira pour cette démonstration d'immaturité mathématique.

Dans le style déductiviste toute proposition est vraie, toute inférence valide. Les mathématiques sont présentées comme un ensemble toujours plus vaste de vérités éternelles et immuables. Contre-exemples, réfutations, critiques ne peuvent y pénétrer. L'exposé se donne des airs de certitude en commençant par des définitions déguisées, issues de preuves et à l'épreuve des monstres, et par le théorème dans sa forme définitive, faisant disparaître la conjecture primitive, les réfutations et la critique de la preuve. **Le style déductiviste cache la lutte, dissimule l'aventure. L'histoire toute entière disparaît**. Les tentatives successives de formulation du théorème au cours de la procédure de preuve sont vouées à l'oubli cependant que le résultat final est exalté, élevé à une infaillibilité sacrée. [*footnote* : On n'a pas encore pris suffisamment conscience que **l'enseignement mathématique et scientifique actuel est le berceau de l'autoritarisme, qu'il est le pire ennemi d'une pensée indépendante et critique**. Alors qu'en mathématique cet autoritarisme prend la forme *déductiviste* que nous venons de décrire, en sciences il agit sous le couvert de l'*inductivisme*. […] Le stye inductiviste, tout comme son jumeau (et non son contretype) déductiviste, alors qu'il revendique l'objectivité, entretient en fait un jargon d'initiés, atomise la science, étouffe la critique, rend la science autoritaire. Des contre-exemples ne peuvent jamais apparaître dans de telles présentations : on part d'observations (et non de théories), et de façon évidente, à moins qu'on n'ait une théorie préférable, on peut observer de contre-exemple.]

185 Heuristique

[*footnote* : […] *(a)* il n'y a pas de logique *infaillibiliste* de la découverte scientifique, une logique qui conduirait infailliblement aux résultats ; *(b)* mais une logique faillibiliste de la découverte qui est **la logique du progrès scientifique**. Mais Popper, qui a jeté les bases de *cette* logique de la découverte, ne s'intéressait pas à la méta-question de savoir qu'elle était la nature de son investigation, et il n'a pas réalité qu'elle ne relevait ni de la psychologie, ni de la logique, mais qu'il s'agissait d'une discipline indépendante, la logique de la découverte, l'heuristique.]

187 Vie & autonomie du mathématique

l'activité mathématique est une activité humaine. Certains de ses aspects, comme de toute activité humaine, peuvent être étudiés par la psychologie, d'autre par l'histoire. L'heuristique initialement ne s'intéresse pas à ces aspects, mais l'activité mathématique produit des mathématiques et les mathématiques, ce produit de l'activité humaine, “s'aliènent” l'activité humaine qui les a produites. Elles deviennent un organisme qui vit, qui se développe, qui *acquiert une certaine autonomie* par rapport à l'activité qui les produites ; elles développent leurs propres lois de croissance, leur propre dialectique. Le créateur mathématicien authentique n'est qu'une personnification, une incarnation de ces lois qui ne peuvent trouver un e réalisation que dans l'activité humaine. Leur incarnation cependant est rarement parfaite. L'activité de l'homme mathématicien, telle qu'elle apparaît dans l'histoire, n'est qu'une réalisation maladroite de la merveilleuse dialectique des idées mathématiques. Mais tout mathématicien, s'il a du talent, du brillant, du génie est en communion avec cette dialectique d'idées, il sent son mouvement, suit ses règles.

189-190 Deux concepts frères : Riemann-intégrable & variation bornée

Une présentation heuristique montrerait que les deux concepts (d'intégrabilité au sens de Riemann-Stieltjes et de variation bornée) sont deux concepts-éprouvettes, qu trouvent leur origine dans une seule et même preuve : la preuve de Dirichlet de la conjecture de Fourier. C'est elle qui fournit le contexte problématique des deux concepts.

[…]

Toutes ces conditions découlent de la preuve. La preuve-analytique de Dirichlet n'était fautive qu'au regard de la troisième condition. La preuve ne tient en fait qu' la variation bornée de la fonction. Sa preuve-analytique a été critiquée et son erreur a été corrigée par Jordan en 1881 qui devint ainsi le découvreur du concept de variation bornée. Mais il n'a pas inventé le concept, il ne l'a pas ‘introduit’, il l'a plutôt *découvert* dans la preuve de Dirichlet au cours d'un réexamen critique.

Une autre faiblesse de la preuve de Dirichlet était son usage de la définition de Cauchy de l'intégrale qui n'est un outil adapté qu'aux fonctions continues. Selon la définition de Cauchy, les fonctions discontinues ne sont pas intégrables du tout et *ipso facto* elles ne sont pas développables en séries de Fourier. Dirichlet a contourné cette difficulté en considérant l'intégrale d'une fonction discontinue comme la somme des intégrales de la fonction sur les intervalles où elle est continue. Cela peut être facilement réalisé si le nombre des points de discontinuité est fini, mais conduit à des difficultés lorsqu'il est infini. C'est pour cela que Riemann a critiqué le concept d'intégrale de Cauchy et en a inventé un nouveau.

Ainsi les deux mystérieuses définitions, de variations bornée et d'intégrale de Riemann, sont-elles *démythifiées*, dépourvues de leur magie autoritaire ; leur origine peut être retrouvée dans une certaine situation-problème bien définie et dans la critique de tentatives précédentes de solution à ces problème.

193-194 Dirichlet à l'origine des fonctions modernes ? NON !

il est largement évident que Dirichlet n'a pas eu la moindre idée de ce concept [la fonction telle qu'on l'entend aujourd'hui] ; dans son article ([1837] ; p.170) par exemple, quand il examine les fonctions continues par morceaux, il dit qu'aux points de discontinuité la fonction a *deux valeurs :*

> “La courbe d'abscisse β et d'ordonnée $\phi(\beta)$ est constituée de plusieurs morceaux dont l'enchaînement est interrompu au niveau des points de l'axe des *x*, correspondant à certaines valeurs particulières de β et à chacune de ces abscisses correspondent en fait deux ordonnées dont l'une appartient à la portion de courbe qui s'y termine et l'autre à celle qui y commence. Dans ce qui suit, il sera nécessaire de distingue ces deux valeurs de $\phi(\beta)$ et nous les noterons $\phi(\beta - 0)$ et $\phi(\beta + 0)$.”

Cette citation montre à l'évidence à quel point Dirichlet était éloigné du ‘concept de fonction de Dirichlet’.

[…]

Peut-être faut-il identifier ici l'initiateur de la légende selon laquelle Dirichlet aurait formulé la “définition de fonction de Dirichlet”. C'est Hankel [1882] qui, en analysant le développement du concept de fonction, a expliqué comment les résultats de Fourier ont brisé le vieux concept de fonction ; il ajoute :

> “Il ne restait plus […] qu'à abandonner, parce que sans importance, la condition que la fonction soit représentable analytiquement, et en tranchant ce nœud, à fournir l'explication suivante : une fonction est dite *y* de *x* si à chaque valeur de la variable x dans un certain intervalle, correspond une valeur défini y, que *y* dépende ou non de *x* selon la même loi sur l'intervalle tout entier, que cette dépendance puisse être exprimée ou non au moyen d'opérations mathématiques. J'associerai pour la suite le nom de Dirichlet à cette définition purement nominaliste, car elle est à la base de ses travaux sur les séries de Fourier qui ont démontré le caractère insoutenable de l'autre vieux concept”

196 Respecter la genèse d'un concept

On ne devrait jamais arracher un concept-éprouvette de sa preuve-mère et le présenter plusieurs paragraphes ou mêmes chapitres, avant la preuve dont il est heuristiquement second.