Devoir surveillé 7

samedi 18 mai 2013

La calculatrice est interdite. Pour tout le sujet, on fixe un entier $d \in \mathbf{N}^*$.

Cadeaux. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$.

1. *On suppose* $\deg P = 2013$. *Montrer que* P *possède une racine réelle.*
2. *On suppose que* P *s'annule* 42 *fois. Montrer que* P' *s'annule* 41 *fois.*
3. *On suppose* P *scindé. Montrer que* P' *est scindé.*
4. *Soit* $a \in \mathbf{R}$. *Montrer que* $P' - aP$ *est scindé.*
5. *Soit* $(A, B) \in M_d(\mathbf{K})^2$ *tel que* $AB = I_d$. *Montrer que* $BA = I_d$.

Exercice 1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $v =: (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. On note

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ x & \longmapsto & v \times x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ x & \longmapsto & (v \cdot x)\, v \end{array} \right.$$

(où $\times$ désigne le produit vectoriel et $\cdot$ le produit scalaire).

1. (a) *Montrer que* f *et* g *sont des endomorphismes de* $\mathbf{R}^3$.
   (b) *Donnner les matrices de* f *et* g *dans la base* $\mathcal{B}$.
   (c) *Comparer* $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f)^2$ *et* $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, g) - \|v\|^2 I_3$. *Commenter.*
2. Soit $R \in M_3(\mathbf{R}) \setminus S_3(\mathbf{R})$. On suppose que les colonnes de R forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.
   (a) *Montrer* ${}^tRR = I_3$. *En déduire que les lignes de* R *forment une base orthonormée de* $\mathbf{R}^3$.
   (b) *Montrer* $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}\,,\ R - {}^tR = \begin{pmatrix} \circ & -\gamma & \beta \\ \gamma & \circ & -\alpha \\ -\beta & \alpha & \circ \end{pmatrix}$.
   (c) *Soit* $(\alpha, \beta, \gamma) =: u \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ *comme à la question précédente. Montrer* $\mathrm{Ker}\left(R^2 - I_3\right) = \mathrm{Vect}\,\{u\}$.

Exercice 2. On note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_d[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_d[X] \\ P & \longmapsto & P(1+X) \end{array} \right.$.

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme de* $\mathbf{K}_d[X]$.
2. *Donner la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbf{K}_d[X]$.
3. *En déduire que la matrice* $\left(\binom{i}{j}\right)_{\substack{0 \le i \le d \\ 0 \le j \le d}}$ *de* $M_{d+1}(\mathbf{K})$ *est inversible et expliciter son inverse.*
4. *Soient* u *et* v *deux* $(d+1)$*-uplets de scalaires tel que*

$$\forall i \in \{0, 1, ..., d\}\,,\ u_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} v_j.$$

   En utilisant les questions précédentes, montrer

$$\forall j \in \{0, 1, ..., d\}\,,\ v_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} u_i.$$

Exercice 3. Pour tout $(n, M, P) \in \mathbf{N} \times M_n(\mathbf{K}) \times \mathbf{K}[X]$, on note $P(M)$ la matrice obtenue en remplaçant, dans toute écriture de P, l'indéterminée par M (remarquer que $1(M) = X^0(M) = M^0 = I_n$) et l'on définit

$$\mathbf{I}(M) := \{p \in \mathbf{K}[X] \ ; \ p(M) = 0\}.$$

On fixe une matrice $A \in M_d(\mathbf{K})$ pour la suite de l'exercice.

1. (a) *Montrer que $\mathbf{I}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par multiplication par n'importe quel polynôme de $\mathbf{K}[X]$.*

   (b) *Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$. Montrer que $X^2 - (a+d)X + (ad - bc) \in \mathbf{I}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.*

   (c) *Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{K}^3$. Montrer que $X^3 - \gamma X^2 - \beta X - \alpha \in \mathbf{I}\begin{pmatrix} \circ & \circ & \alpha \\ 1 & \circ & \beta \\ \circ & 1 & \gamma \end{pmatrix}$.*

   (a) *Montrer que $\operatorname{rg}\left\{A^k \ ; \ 0 \le k \le d^2\right\} \le d^2$. En déduire que $\mathbf{I}(A) \neq \{0\}$.*
   (hint : traduire en termes de liaison)

   (b) *Montrer que $\mathbf{I}(A)$ possède un élément unitaire de degré minimal.*
   (hint : considérer la partie $\{\deg p \ ; \ p \in \mathbf{I}(A) \text{ et } p \text{ unitaire}\}$)

   (c) *Soit $\mu \in \mathbf{I}(A)$ unitaire de degré minimal. Montrer l'équivalence $P \in \mathbf{I}(A) \iff \mu \mid P$.*
   (hint : utiliser une division euclidienne)

Problème. On note Φ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}$ et χ la fonction $t \mapsto \det(\Phi - tI_2)$.

1. *Montrer l'existence et l'unicité d'une suite d'éléments de $\mathbf{R}^2$, notée $\left(\begin{pmatrix} F_n \\ G_n \end{pmatrix}\right)$, telle que*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} F_{n+1} = F_n + G_n \\ G_{n+1} = F_n \end{cases} \\ F_0 = 0 \quad \text{et} \quad G_0 = 1 \end{cases}.$$

2. *Montrer que $\begin{pmatrix} F_d \\ G_d \end{pmatrix} = \Phi^{d-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.*
3. *Montrer que χ est polynomiale et calculer ses racines.*
4. *Pour chaque racine λ de χ, résoudre l'équation $\Phi X = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbf{R}^2$.*
5. *En déduire (et expliciter) une matrice $P \in GL_2(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}\Phi P$ soit diagonale.*
6. *En utilisant tout ce qui précède, montrer que $F_d = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^d - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^d$.*
7. *Montrer que la suite $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ tend vers un réel que l'on précisera.*
8. **(culture)** *Comment s'appelle la suite (F_n) ? et le réel $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n}$?*