Devoir surveillé 2

La calculatrice est interdite.

Définitions. *Donner les définitions des objets ou actions suivants D'APRÈS LE COURS :*

1. e^{it} où t est un réel ;
2. orienter un plan ;
3. le produit mixte et le déterminant de trois vecteurs dans l'espace ;
4. l'équation d'un lieu géométrique ;
5. la distance entre deux lieux géométriques ;
6. une fonction ;
7. appliquer une fonction sur un objet de son ensemble source ;
8. les flèches $\longrightarrow$ et $\longmapsto$;
9. la fonction identité d'un ensemble ;
10. les itérées d'une application ;
11. une fonction injective ;
12. une application croissante ;
13. une correpondance bijective ;
14. une rotation ;
15. une homothétie ;
16. une translation ;
17. une isométrie.

Propriétés. *Les questions 1 à 13 suivantes n'exigent pas de démonstration à l'exception éventuelle de la 8.*

1. Soit k un réel : simplifier $\sin\left(k+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(\pi-k)$, $\cos\left(k-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(k+\pi)$ et $\tan(k+\pi)$.
2. Caractériser géométriquement les nullités respectives d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel, d'un produit mixte de deux vecteurs, d'un déterminant de trois vecteurs.
3. Énoncer les *deux* comparaisons de Buniakowski-Cauchy-Schwarz *avec* les cas d'égalité correspondants.
4. Exprimer le produit scalaire de deux vecteurs en fonctions de leurs coordonnées (on précisera les propriétés de la base utilisée).
5. Soient a, b et c trois vecteurs (deux à deux distincts) de l'espace. Exprimer, pour toute permutation σ de l'ensemble $\{a,b,c\}$, le produit mixte $[\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c)]$ en fonction du déterminant $\operatorname{Det}(a,b,c)$.
6. La composition des fonctions est-elle commutative ? associative ? admet-elle des neutres ?
7. Écrire l'injectivité d'une application sous forme d'un énoncé universel. On demande *deux* énoncés.
8. Une fonction monotone est-elle necéssairement injective ? Une fonction injective est-elle nécessairement monotone ? (On demande des preuves ou des contre-exemples.)
9. Donner l'inverse de la composée de deux bijections données lorsque cette composée fait sens.
10. Soient deux applications $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ telles que $g\circ f$ soit bijective. Que peut-on dire de f et de g ?
11. Donner un critère pour qu'une partie donnée de $\mathfrak{S}$ soit un sous-groupe de $\mathfrak{S}$.
12. Quelle est la composée de deux translations ? de deux rotations ? de deux homothéties ?
13. Donner six sous-groupes distincts de $\mathfrak{S}$.

Démonstrations. *Énoncer et démontrer les neuf théorèmes suivants :*

1. la relation d'Al-Kashi ;
2. l'équivalence $u\parallel v\iff(u=0\text{ ou }\exists\lambda\in\mathbf{R},\ v=\lambda u)$ où u et v sont deux vecteurs donnés ;
3. l'égalité exprimant la distance d'un point à un plan donné par une équation ;

4. l'existence d'une perpendiculaire commune à deux droites dans l'espace ;
5. $\sqrt{2}$ est irrationnel ;
6. si $i : A \hookrightarrow B$ est une injection, on a alors $\left\{ \begin{array}{c} \forall a \in A,\ f^{-1}\left(f\left(a\right)\right) = a \\ \forall b \in \operatorname{Im} f,\ f\left(f^{-1}\left(b\right)\right) = b \end{array} \right.$;
7. la fonction tan croît sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;
8. la composée de deux réflexions est ou bien une rotation ou bien une translation ;
9. pour toute quasi-isométrie positive φ, on a l'égalité (avec λ et θ des réels et Ω un point)

$$\varphi \circ {}^{\lambda}\operatorname{sim}_{\Omega}^{\theta} \circ \varphi^{-1} = {}^{\lambda}\operatorname{sim}_{\varphi(\Omega)}^{\theta}.$$

Exercices.

1. *(trigonométrie)*

   (a) Quels réels ont pour cosinus celui de leur triple ?

   (b) Déterminer tous les réels κ tels que $\cos\left(3\kappa - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (c) Y a-t-il des réels τ non multiples entiers de π tels que $\tan(2\tau + 1) = \tan(\tau + 1)$?

   (d) On considère un réel ρ. Montrer l'égalité $\frac{\sin\rho}{1+\cos\rho} = \tan\frac{\rho}{2} = \frac{1-\cos\rho}{\sin\rho}$ et préciser pour quels ρ elle ne fait pas sens.

   (e) Exprimer les sinus, cosinus et tangente d'un réel donné en fonction de la tangente de sa moitié. On explicitera les valeurs du réel concerné pour lesquelles les identités trouvées n'ont pas de sens.

2. *(vecteurs)*

   (a) Déterminer la distance entre le point $(2, 2, 3)$ et le plan d'équation $2x + 3y + 5z = 0$.

   (b) On se donne six réels $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. Montrer la comparaison
   $$(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 \leq \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right).$$

   (c) Donner une condition portant sur un réel λ qui soit équivalente à l'alignement des trois points $\binom{2}{3}$, $\binom{4}{1}$ et $\binom{5}{\lambda}$.

   (d) Déterminer l'équation de la droite passant par le point $(1, 5, 0)$ et dirigée par le vecteur $(-2, 3, 1)$.

   (e) Préciser le projeté orthogonal du vecteur $(3, -1, 1)$ sur la droite passant par l'origine et le point $(2, 1, -2)$

3. *(fonctions)*

   (a) Déterminer parmi les correspondances suivantes lesquelles sont des fonctions, des applications, des injections, des surjections ou des bijections :

      i. à un être humain associer sa mère ;
      ii. à un être vivant associer son cousin ;
      iii. à un couple (d'êtres humains) associer leur enfant ainé ;
      iv. à un élève associer sa note à une interro de cours ;
      v. à un croissant dans une boulangerie associer son prix ;

   (b) Expliquer comment construire les graphes des fonctions suivantes à partir des graphes des fonctions usuelles :

      i. $\frac{5\,\mathrm{Id}+7}{3-\mathrm{Id}}$;
      ii. $3\,\mathrm{Id} - \mathrm{Id}^{\times 2} + 1$;
      iii. $4 - \left|\frac{\mathrm{Id}}{3} - 1\right|$;
      iv. $3\cos(2\cdot)$;
      v. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\cdot}{2} + 3}$.

   (c) Pour chacun des couples (f, g) d'applications suivantes, déterminer si les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ font sens et les calculer le cas échéant :

      i. $f : \left\{\begin{array}{ccc} [2, \infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & \sqrt{a-2} \end{array}\right.$ et $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ b & \longmapsto & b^2 + 4 \end{array}\right.$;

      ii. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \sigma & \longmapsto & \frac{2\sigma+3}{\sigma-1} \end{array}\right.$ et $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \tau & \longmapsto & \frac{\tau+1}{\tau-3} \end{array}\right.$;

      iii. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ \varphi & \longmapsto & \left\{\begin{array}{c} \frac{\varphi}{2} \text{ si } \varphi \text{ est pair} \\ -\frac{\varphi+1}{2} \text{ si } \varphi \text{ est impair} \end{array}\right. \end{array}\right.$ et $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ \psi & \longmapsto & \left\{\begin{array}{c} 2\psi \text{ si } \psi \geq 0 \\ -2\psi - 1 \text{ si } \psi < 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$.

4. *(transformations géométriques)*

   (a) Déterminer l'expression complexe de chacune des transformations suivantes :

      i. la translation de vecteur $2 - i$;

ii. la rotation de centre 3 et d'angle $\frac{\pi}{6}$;

iii. la similitude de centre $-1-i$, rapport 2 et angle $\frac{\pi}{3}$;

iv. la réflexion glissée d'axe d'équation $2y+x=3$ et de vecteur $-4+2i$;

v. la similitude indirecte d'axe d'équation $3y+x=2$, centre $-1+i$ et rapport 4.

(b) On idenfie chacune des cinq transformations précédentes au chiffre latin minuscule de la question correspondante. Déterminer les sept composées $i \circ ii$, $ii \circ i$, $i \circ iii$, $iii \circ i$, $iii \circ ii$, $ii \circ iii$ et $i \circ v$ (quel que soit le chemin parcouru, on demande *in fine* de reconnaître les caractéristiques *géométriques* des transformations considérées.).

(c) Soit ABC un triangle. On construit sur chaque côté un triangle équilatéral dont le troisième sommet est extérieur à ABC. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles équilatéraux forment un triangle équilatéral.

(d) Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et $[AT]$ une tangente à C en A. On note B et U les images de A et T par $\mathrm{rot}_O^{\frac{17\pi}{42}}$. Montrer que la droite (AB) recoupe le segment $[TU]$ en son milieu.