Solution proposée.

Préliminaires.

1. *Idée 1.*

 Revenir à l'exponentielle (posons $N := n+1$ et $\beta := \frac{b}{2}$ par commodité)

$$\begin{aligned} & \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \cdots + \cos(a+nb) \\ = \ & \operatorname{Re} e^{ia} + \operatorname{Re} e^{i(a+b)} + \operatorname{Re} e^{i(a+2b)} + \cdots + \operatorname{Re} e^{i(a+nb)} \\ = \ & \operatorname{Re}\left[e^{ia}\left(1 + e^{ib} + e^{2ib} + \cdots + e^{nib}\right)\right]. \end{aligned}$$

 Or le crochet se simplifie en $e^{ia}\frac{e^{iNb}-1}{e^{ib}-1} = e^{ia}\frac{e^{iN\beta}}{e^{i\beta}}\frac{2i\sin N\beta}{2i\sin\beta} = e^{i(a+n\beta)}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$, d'où (en prenant la partie réelle)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left[e^{ia}\left(1 + e^{ib} + e^{2ib} + \cdots + e^{nib}\right)\right] \\ = \ & \operatorname{Re}\left[e^{i(a+n\beta)}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right] \\ = \ & \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\operatorname{Re} e^{i(a+n\beta)} \\ = \ & \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\cos(a+n\beta). \end{aligned}$$

 Idée 2.

 Si l'on connaît le résultat, on sait que multipler par $\sin\beta$ devrait donner quelque chose de simple. En effet, cela va introduire un télescopage après linéarisation (on multiplie par deux pour tuer d'avance la fraction qui va apparaître) :

$$\begin{aligned} & 2\sin\beta\left[\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots + \cos(a+nb)\right] \\ = \ & 2\sin\beta\cos a + \sin\beta\cos(a+2\beta) + \sin\beta\cos(a+4\beta) + \cdots + \sin\beta\cos(a+2n\beta) \\ = \ & \left[\sin(\beta-a) - \sin(\beta+a)\right] + \left[\sin(\beta+a) - \sin(3\beta+a)\right] + \left[\sin(3\beta-a) - \sin(5\beta+a)\right] \\ & + \cdots + \left[\sin([2n-1]\beta+a) - \sin([2n+1]\beta-a)\right] \\ = \ & \sin(\beta-a) - \sin([2n+1]\beta-a) \\ = \ & 2\cos(a+\beta)\sin N\beta. \end{aligned}$$

2. Le 34 dans le membre de gauche nous incite à faire sortir du 17 de la racine en écrivant

$$\sqrt{34 \pm 2\mathfrak{r}} = \sqrt{2\mathfrak{r}^2 \pm 2\mathfrak{r}} = \sqrt{2\mathfrak{r}}\sqrt{\mathfrak{r} \pm 1}.$$

 Essayons de transformer le membre de droite d'une manière proche : après factorisation des coefficients $\begin{cases} 680 = 2\cdot 340 = 8\cdot 17\cdot 5 \\ 152 = 2\cdot 78 = 8\cdot 19 \end{cases}$, il vient

$$\sqrt{680 + 152\mathfrak{r}} = \sqrt{8}\sqrt{5\mathfrak{r}^2 + 19\mathfrak{r}} = 2\sqrt{2\mathfrak{r}}\sqrt{5\mathfrak{r} + 19}.$$

 L'égalité souhaitée est donc équivalente à

$$\begin{aligned} 8\sqrt{34+2\mathfrak{r}} + (1-\mathfrak{r})\sqrt{34-2\mathfrak{r}} & \overset{?}{=} \sqrt{680+152\mathfrak{r}}. \\ \Longleftrightarrow 8\sqrt{2\mathfrak{r}}\sqrt{\mathfrak{r}+1} - \sqrt{\mathfrak{r}-1}^2\sqrt{2\mathfrak{r}}\sqrt{\mathfrak{r}-1}+ & \overset{?}{=} 2\sqrt{2\mathfrak{r}}\sqrt{5\mathfrak{r}+19} \\ \underset{\text{par } \sqrt{2\mathfrak{r}}}{\overset{\text{simplifier}}{\Longleftrightarrow}} 8\sqrt{\mathfrak{r}+1} - \sqrt{\mathfrak{r}-1}^3 & \overset{?}{=} 2\sqrt{5\mathfrak{r}+19} \end{aligned}$$

 Si les deux membres étaient positifs, leur égalité équivaudrait à celle de leurs carrés. Or le membre de droite est clairement positif et celui de gauche est minoré par $1\sqrt{\mathfrak{r}+0} - \sqrt{\mathfrak{r}-0} = 0$. Il suffit donc, pour conclure, de montrer que le carré du membre de gauche vaut celui $4(5\mathfrak{r}+19)$ du membre de droite.

 Lorsque l'on va développer le carré de $8\sqrt{\mathfrak{r}+1} - \sqrt{\mathfrak{r}-1}^3$, le terme le plus compliqué qui va sortir est le produit croisé $\sqrt{\mathfrak{r}+1}\sqrt{\mathfrak{r}-1}^3$. Travaillons-le donc en premier :

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathfrak{r}+1}\sqrt{\mathfrak{r}-1}^3 & = \sqrt{\mathfrak{r}+1}\left(\sqrt{\mathfrak{r}-1}\sqrt{\mathfrak{r}-1}^2\right) = \sqrt{(\mathfrak{r}+1)(\mathfrak{r}-1)}(\mathfrak{r}-1) \\ & = \sqrt{\mathfrak{r}^2-1}(\mathfrak{r}-1) = \mathfrak{r}(\mathfrak{r}-1) = 4(\mathfrak{r}-1). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\left(8\sqrt{\mathfrak{r}+1}-\sqrt{\mathfrak{r}-1}^3\right)^2 &= 64\left(\mathfrak{r}+1\right)-16\cdot 4\left(\mathfrak{r}-1\right)+\sqrt{\left(\mathfrak{r}-1\right)}^6\\ &= 128+\left(\mathfrak{r}-1\right)^3\\ &= 128+17\mathfrak{r}-3\cdot 17+3\mathfrak{r}-1\\ &= 20\mathfrak{r}-76\\ &= 4\left(5\mathfrak{r}-19\right),\ c.\ q.\ f.\ d..\end{aligned}$$

Problème.
Pour la suite de la solution, on abrégera

$$\vartheta := \frac{\pi}{17},$$

de sorte que l'on a pour tout entier k relatif

$$k' = \cos k\vartheta.$$

1. Soit k dans $\mathbb{Z}$. On a

$$(-k)' = \cos\left[(-k)\,\vartheta\right] = \cos\left(-k\vartheta\right) \overset{\cos\text{ pair}}{=} \cos\left(k\vartheta\right) = k'$$

et

$$(17-k)' = \cos\left[(17-k)\,\vartheta\right] = \cos\left(\pi-k\vartheta\right) \overset{\text{cours}}{=} -\cos k\vartheta = -k'.$$

2. Soient k et l dans $\mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}2k'l' &= 2\cos k\vartheta\cos l\vartheta \overset{\text{linéarisation}}{=} \cos\left(k\vartheta+l\vartheta\right)+\cos\left(k\vartheta-l\vartheta\right)\\ &= \cos\left[(k+l)\,\vartheta\right]+\cos\left[(k-l)\,\vartheta\right] = (k+l)'+(k-l)' \overset{1.}{=} |k-l|'+(k+l)'.\end{aligned}$$

3. On commencera par observser (par exemple sur le cercle trigo) que chacun des nombre k' (pour k décrivant $\mathbb{Z}$) vaut à un signe près l'un des cosinus $1', 2', ..., 8'$ et que ces derniers sont positifs et rangés par ordre décroissant :

$$1' \geq 2' \geq 3' \geq \cdots \geq 8' \geq 0.$$

Cela permet d'obtenir rapidement les comparaisons demandées :

$$\begin{aligned}\beta &= 7'-6' \geq 0,\\ \beta &= 7'-6' \leq 7' \leq 5' \leq 5'+3' = \alpha,\\ \gamma &= 1'+13' = 1'-4' \geq 0,\\ \delta &= 9'+15' = -8'-2' \leq 0.\end{aligned}$$

4. On explicite :

$$\begin{aligned}\chi &= \cos\vartheta+\cos 3\vartheta+\cos 5\vartheta+\cos 7\vartheta+\cos 9\vartheta+\cos 11\vartheta+\cos 13\vartheta+\cos 15\vartheta\\ &= \cos\vartheta+\cos\left(\vartheta+\boxed{2\vartheta}\right)+\cos\left(\vartheta+2\boxed{2\vartheta}\right)+\cos\left(\vartheta+3\boxed{2\vartheta}\right)+\cdots+\left(\vartheta+7\boxed{2\vartheta}\right).\end{aligned}$$

Cela appelle le lemme avec $a=\vartheta$, $h=2\vartheta$ (donc $\beta=\vartheta$) et $n=7$ (donc $N=8$) :

$$\chi = \frac{\sin 8\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\left(\vartheta+7\vartheta\right).$$

Le numérateur se simplifie en $\sin 8\vartheta\ \ \cos 8\vartheta = \frac{1}{2}\sin 16\vartheta$ et le cercle nous rappelle que l'angle $16\vartheta = \pi-\vartheta$ a même sinus que ϑ. On en déduit

$$\chi = \frac{\frac{1}{2}\sin 16\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{1}{2}.$$

5. On développe tout et on linéarise :

$$\begin{array}{rcl} 2\sigma\tau & = & 2\times \begin{matrix}[3'+5'+7'-6"]\\ [1'-8'-4'-2']\end{matrix} \\ & \overset{\text{développer}}{=} & 2\times \left[\begin{array}{l} 3'1'-3'8'-3'4'-3'2' \\ +5'1'-5'8'-5'4'-5'2' \\ +7'1'-7'8'-7'4'-7'2' \\ -6'1'+6'8'+6'4'+6'2' \end{array}\right] \\ & \overset{\text{question 2}}{=} & \begin{array}{l} (2'+4')-(5'+11')-(1'+7')-(1'+5') \\ +(4'+6')-(3'+13')-(1'+9')-(3'+7') \\ +(6'+8')-(1'+15')-(3'+11')-(5'+9') \\ -(5'+7')+(2'+14')+(2'+10')+(4'+8') \end{array} \end{array}$$

(sanity check pour simplifier $2k'l'$: les entiers $k+l$ et $k-l$ doivent être de même parité). En choisissant de garder les représentants "impairs", la somme qui précède se réécrit (en utilisant $k'+(17-k)'=0$)

$$\begin{array}{l} -15'-13'-5'-11'-1'-7'-1'-5' \\ -13'-11'-3'-13'-1'-9'-3'-7' \\ -11'-9'-1'-15'-3'-11'-5'-9' \\ -5'-7'-15'-3'-15'-7'-13'-9' \end{array} = -4\left(1'+3'+5"+7'+9'+11'+13'+15'\right).$$

Nous venons donc de montrer que $2\sigma\tau = -4\chi \overset{4}{=} -2$, ce qui se réécrit

$$\sigma\tau = -1.$$

6. Les réels σ et τ annulent le polynôme

$$\begin{array}{rcl} (X-\sigma)(X-\tau) & = & X^2-(\sigma+\tau)X+\sigma\tau \\ & \overset{4 \text{ et } 5}{=} & X^2-\frac{1}{2}X-1 \\ & = & \left(X-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-1 \\ & = & \left(X-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{\mathfrak{r}}{4}\right)^2 \\ & = & \left(X-\frac{1}{4}-\frac{\mathfrak{r}}{4}\right)\left(X-\frac{1}{4}+\frac{\mathfrak{r}}{4}\right), \end{array}$$

donc valent $\frac{1\pm\mathfrak{r}}{4}$. Puisque la racine $\frac{1-\mathfrak{r}}{4}$ est strictement négative (on peut par exemple écrire $\mathfrak{r}=\sqrt{17}>\sqrt{16}=4>1$), elle ne peut valoir σ d'après la question 1. On en déduit

$$\sigma = \frac{1+\mathfrak{r}}{4} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1-\mathfrak{r}}{4}.$$

7. Comme en 5, on développe tout et on linéarise : on a d'une part

$$\begin{array}{rcl} 2\alpha\beta & = & 2\times(3'+5')(7'-6') \\ & = & 2\times(3'7'-3'6'+5'7'-5'6') \\ & = & (4'+10')-(3'+9')+(2'+12')+(1'+11') \\ & = & -13'-7'-3'-9'-15'-5'-1'-11' \\ & = & -\chi = -\frac{1}{2}, \end{array}$$

d'autre part

$$\begin{array}{rcl} 2\gamma\delta & = & 2\times(1'-4')(-8'-2') \\ & = & 2\times(4'-1')(8'+2') \\ & = & 2\times(4'8'+4'2'-1'8'-1'2') \\ & = & (4'+12')+(2'+6')-(7'+9')-(1'+3') \\ & = & -13'-5'-15'-11-7'-9'-1'-3' \\ & = & -\chi = -\frac{1}{2}, \end{array}$$

d'où l'on déduit

$$\alpha\beta = -\frac{1}{4} = \gamma\delta.$$

8. Les réels α et β sont racines du polynôme (on multiplie par 4 pour tuer les fractions à venir)

$$4(X-\alpha)(X-\beta) = 4X^2 - 4(\alpha+\beta)X + 4\alpha\beta = 4X^2 - (1+\mathfrak{r})X - 1.$$

Son discriminant vaut $(1+\mathfrak{r})^2 - 4(4)(-1) = 34 + 2\mathfrak{r} = 2\mathfrak{r}(1+\mathfrak{r})$, d'où les valeurs de α et β :

$$\frac{(1+\mathfrak{r}) \pm \sqrt{34+2\mathfrak{r}}}{8}.$$

Puisque $\alpha \geq \beta$ d'après la question 3, il en résulte

$$\alpha = \frac{1+\mathfrak{r}+\sqrt{34+2\mathfrak{r}}}{8} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1+\mathfrak{r}-\sqrt{34+2\mathfrak{r}}}{8}.$$

Concernant γ et δ, le seul changement est le signe devant $\mathfrak{r}$; vu les comparaisons de la question 3, on en déduit les valeurs

$$\gamma = \frac{1-\mathfrak{r}+\sqrt{34-2\mathfrak{r}}}{8} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{1-\mathfrak{r}-\sqrt{34-2\mathfrak{r}}}{8}.$$

9. On linéarise

$$1'13' = \frac{12'+14'}{2} = -\frac{5'+3'}{2} = -\frac{\alpha}{2}.$$

Puisque l'on connaît par ailleurs la somme $1' + 13' = \gamma$, on en déduit (vu les signes $1' > 0 > 13'$) que $1'$ est la racine positive du trinôme (on multiple d'avance par 16)

$$16(X-1')(X-13') = 16X^2 - 16\gamma X - 8\alpha.$$

En notant Δ' son discriminant réduit, on obtient donc

$$1' = \frac{\gamma+\sqrt{\Delta'}}{16}.$$

Puisque l'on demande de montrer

$$16 \times 1' = \gamma + \sqrt{68 + 12\mathfrak{r} + 2\sqrt{680+152\mathfrak{r}}},$$

il s'agit de prouver que Δ' vaut le contenu du second radical, à savoir $68 + 12\mathfrak{r} + 2\sqrt{680+152\mathfrak{r}}$.

Commençons le calcul :

$$\begin{aligned}
\Delta' &= (8\gamma)^2 + 16(8\alpha) \\
&= \left(1-\mathfrak{r}+\sqrt{34-2\mathfrak{r}}\right)^2 + 16\left(1+\mathfrak{r}+\sqrt{34+2\mathfrak{r}}\right) \\
&= (1-2\mathfrak{r}+17) + 2(1-\mathfrak{r})\sqrt{34-2\mathfrak{r}} + (34-2\mathfrak{r}) \\
&\quad +16 + 16\mathfrak{r} + 16\sqrt{34+2\mathfrak{r}} \\
&= 68 + 12\mathfrak{r} + 16\sqrt{34+2\mathfrak{r}} + 2(1-\mathfrak{r})\sqrt{34-2\mathfrak{r}}.
\end{aligned}$$

Or on veut comparer ce dernier à $68 + 12\mathfrak{r} + 2\sqrt{680+152\mathfrak{r}}$: vu le terme commun $68 + 12\mathfrak{r}$ et le facteur 2 en commun dans ce qui reste, nous sommes amenés à montrer

$$16\sqrt{34+2\mathfrak{r}} + (1-\mathfrak{r})\sqrt{34-2\mathfrak{r}} \stackrel{?}{=} \sqrt{680+152\mathfrak{r}},$$

ce qui fait précisément l'objet du préliminaire 2 – et permet ainsi de conclure le problème.