

Rapport sur le manuscrit
Combinatoire algébrique et géométrie des nombres de Hurwitz
présenté par Marc Sage pour obtenir le titre de
docteur en informatique de l'université Paris-Est.

À qui de droit,

La thèse de Marc Sage porte sur un problème d'énumération dont les origines sont plus que centenaire, le calcul des nombres d'Hurwitz, qui comptent certains revêtements ramifiés de la sphère par elle-même, ou, de manière équivalente, certaines factorisations de permutations en transpositions. Ce sujet, introduit par Hurwitz au tournant du 18^{ème} siècle puis un peu oublié, est resurgi dans les années 90 à la rencontre de plusieurs domaines : physique mathématique (Cressimano-Taylor 1995), géométrie algébrique (Arnol'd 1996) et combinatoire (Goulden-Jackson 1997) ; il fait depuis l'objet d'une abondante littérature, en particulier en lien avec l'étude de l'espace des modules de courbes complexes pointées et de la gravité quantique 2d.

D'un point de vue combinatoire le problème d'Hurwitz est élémentaire à énoncer : il s'agit de compter le nombre de façons d'écrire une permutation fixée des entiers $\{1, \dots, n\}$ en produit de m transpositions sous la condition que le graphe dont les sommets sont les entiers $\{1, \dots, n\}$ et les arêtes sont données par les transpositions soit connexe. Lorsque le nombre de transpositions utilisés est minimal ces factorisations se représentent par certains dessins planaires et les nombres d'Hurwitz prennent une forme close toute simple, observée déjà en 1891 par Hurwitz. Malgré cela la demi-douzaine de preuves différentes connues de cette formule sont toutes surprenamment complexes.

Au cours de ces dix dernières années des liens profonds ont été mis à jour entre nombres d'Hurwitz et certaines intégrales de Hodges d'un côté (Ekedahl et al. 2001) et des hiérarchies d'équations différentielles de l'autre (Okounkov 2000). Ces travaux et leurs suites ont permis notamment à Shadrin, Zvonkine et Kazarian de généraliser largement les résultats d'Hurwitz pour décrire des nombres de Hurwitz généralisés aux travers notamment de propriétés de leurs séries génératrices.

C'est de l'énoncé de ces liens profonds (notamment la formule ELSV) que repart Marc Sage dans son mémoire : après les avoir exposés, il les utilise pour donner une lecture explicitée des travaux touffus de Kazarian, puis pour en déduire des résultats asymptotiques et des algorithmes de calculs pour les nombres de Hurwitz généralisés.

Pour aller plus loin dans la discussion, je donne maintenant une lecture détaillée de la thèse, chapitre par chapitre.

Le mémoire s'ouvre sur un court chapitre d'introduction qui reprend les grandes lignes de chaque chapitre pour situer rapidement les résultats de la thèse.

Dans un premier chapitre, Marc Sage expose ce qui lui sert de notions algébriques plus ou moins classiques (algèbre de groupes et de monoïde, représentations, éléments de Jucys-Murphy,...) et combinatoires (partitions, partitions d'entier, permutations scindées,...). On remarque dès les premières pages le soin mis par le candidat à choisir ses conventions et notations : la gageure est ici de réussir à alléger la manipulation des complexes formules des chapitres 3 et 4 sans perdre en précision, le candidat s'y essait en introduisant de subtiles variantes d'objets, paramètres et structures classiques ; l'exercice est difficile, mais fort heureusement illustré par de nombreux petits exemples concrets. De manière générale la présentation s'accompagne d'une foule de « tests de sureté » (selon la terminologie de l'auteur) qui sont autant de vérifications croisées des énoncés à l'aide de calculs explicites de petits cas.

Une fois ces notions classiques revisitées, Marc Sage aborde le coeur de son sujet en en détaillant 3 aspects fondamentaux. En premier lieu, il présente l'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$ dans laquelle vivent les séries d'Hurwitz qui l'intéressent, et sur laquelle se base une bonne partie des développements ultérieurs du mémoire. Il en reprouve les propriétés (dues principalement à Dimitri Zvonkine) par d'habiles calculs algébriques et quelques considérations combinatoires et donne de nouvelles propriétés d'une déformation utile de l'algèbre initiale. Le candidat se tourne ensuite vers la description du contexte topologique dans lequel le problème d'Hurwitz trouve ses origines : bien que ce point de vue ne soit pas celui utilisé dans le reste du manuscrit, il en donne une présentation synthétique agréable. Enfin Marc Sage énonce une série de résultats de géométrie énumérative (relation des cordes et du dilaton pour les chevrons de Witten, théorème de Konsevitch et formule ELSV) à partir desquels il détaille la preuve d'un théorème de Kazarian qui lie séries de Hurwitz, algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$ et intégrales de Hodge. Ce résultat sera à la base des résultats asymptotiques du chapitre suivant.

Au chapitre 3 le candidat présente les formules asymptotiques et exactes nouvelles qu'il a pu obtenir : dans un premier temps il ré-obtient, à partir des ingrédients du chapitre précédent, l'asymptotique des nombres de Hurwitz à une partition, déjà décrite par Dimitri Zvonkine ; en rendant complètement explicite une formule de réduction utilisée implicitement par le même auteur pour montrer que les séries d'Hurwitz vivent dans l'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$, Marc Sage obtient, au prix de considérations assez complexes, son principal résultat nouveau, l'asymptotique des nombres de Hurwitz à plusieurs partitions. Le chapitre se conclut par une formule explicite pour la série des nombres de Hurwitz doubles indexés par deux partitions de longueur 1 : la preuve de ce résultat illustre bien la dextérité calculatoire de son auteur. Les nombres de Hurwitz doubles faisant l'objet d'un intérêt particulier dans la littérature on peut regretter ici que le candidat ne mette pas mieux en valeur son résultat en le rapprochant des résultats généraux connus par ailleurs.

Le chapitre 4 explore une approche originale, consistant à algébriser la condition de tran-

sitivité imposée dans le problème d’Hurwitz aux factorisations considérées : alors que l’approche classique pour imposer la transitivité utilise le lien entre la construction “ensemble” et l’exponentielle des séries génératrices (ou de manière équivalente des considérations d’inclusion-exclusion), le candidat expose l’idée, obtenue avec P.-L. Méliot, de décrire les nombres de Hurwitz comme constantes de structure de l’algèbre des invariants d’un monoïde de permutations scindées. Contre toute attente la structure de cette algèbre peut être un peu décortiquée au moins dans le cas des transpositions et ce programme conduit à un joli algorithme de calcul des famille à degré constants de nombres de Hurwitz à une partition. Finalement cet algorithme est comparé à une approche plus générale inspirée encore une fois des travaux de Kazarian, mais dont la complexité n’est pas claire.

Il convient de signaler que plusieurs des résultats qui ne sont “que” redémontrés dans ce mémoire (essentiellement des résultats dus à Dimitri Zvonkine et Maxim Kazarian) sont ici exposées pour la première fois de manière complètement détaillée et accessible à un lecteur combinatoriste : le travail d’explicitation et de reformulation effectué par le candidat est louable et difficile.

En conclusion la thèse de Marc Sage est un document dense et utile, qui nous aide à aborder une littérature difficile et y apporte une contribution intéressante : ce manuscrit restera sur ma table de travail un bon moment. Il donne l’image d’un candidat à l’aise avec des outils mathématiques allant des plus abstraits aux plus calculatoires, et capable de présenter de manière accessible des développements conséquents. Je considère donc qu’il s’agit d’une thèse tout à fait digne d’être soutenue en l’état.

À Palaiseau, le 21 mai 2012,

Gilles Schaeffer
Directeur de recherche au CNRS
Habilitation à diriger des recherches