Rapport sur la thèse de doctorat de

MARC SAGE

intitulée

Combinatoire algébrique et géométrique des nombres de Hurwitz

Dimitri Zvonkine

La thèse de Marc sage est dédiée à l'énumération de revêtements ramifiés de la sphère, un problème posé initialement par Hurwitz en 1902 en qui a connu un important regain d'intérêt récemment grâce à des liens découverts avec la physique théorique et la géométrie d'espaces des modules.

Un nombre de revêtements ramifiés de la sphère, appelé aussi *nombre de Hurwitz* est déterminé à partir d'un degré (le degré du revêtement) un genre (le genre de la surface revêtante) et plusieurs partitions (les types de ramification aux points de branchement non triviaux).

Les deux premiers chapitres du manuscrit constituent une synthèse des résultats connus sur les nombres de Hurwitz obtenus par des méthodes de géométrie algébrique, de la théorie des représentations du groupe symétrique, ainsi que par des méthodes combinatoires. Ce choix de méthodes n'est pas exhaustif (il manque, en particulier, les systèmes intégrables et les matrices aléatoires), mais la présentation des sujets choisis est très complète.

Les chapitres 3 et 4 présentent des résultats originaux (plusieurs d'entre eux ont été obtenus conjointement avec J.-P. Méliot) dont voici une brève description.

1. L'élucidation de la structure de l'algèbre du monoïde des permutations scindées. Une permutation scindée est une permutation dont les cycles sont regroupés en plusieurs parts. Ces permutations sont utiles pour faire la distinction entre les revêtements connexes ou non connexes, les permutations elle-mêmes décrivant les monodromies d'un revêtement tandis que les parts correspondent à des composantes connexes. Les permutations scindées forment un monoïde. Il s'avère que l'algèbre de ce monoïde a une décomposition en somme directe d'algèbres de matrices. Les coefficients de cette décompsition font intervenir les caractères du groupe symmétrique aisni que la fonction de Möbius. Ainsi en travaillant avec cette algèbre on trouve une expression des nombres de Hurwitz qui incorpore automatiquement la formule de Frobenius (formule des caractères) et le théorème d'inclusion-exclusion.

2. Une expression explicite des nombres de Hurwitz à plusieurs partitions en fonction des nombres de Hurwitz à une partition. L'existence d'une telle relation est simple à établir, mais il est plus difficile de l'écrire explicitement, notamment à cause de l'apparition de revêtements non connexes.

3. L'asymptotique des nombres de Hurwitz à plusieurs partitions lorsque le degré des revêtements tend vers l'infini. L'asymptotique en question était connue dans le cas d'une seule partition. L'auteur déduit le cas général de ce cas particulier grâce aux relations du (2).

4. Une expression pour les nombres de Hurwitz de genre 0 à deux partitions ayant une part chacune. C'est une très curieuse formule qui ne ressemble à rien que j'aie vu auparavant. Malheureusement elle reste relativement compliquée.

5. Un algorithme de calcul des nombres de Hurwitz dont la complexité dépend du degré des revêtements, mais pas du genre. Cet algorithme est en réalité une version de l'algorithme connu basé sur la formule de Forbenius et la formule d'inclusion-exclusion.

6. L'asymptotique des nombres de Hurwitz à une partition de degré fixé lorsque le genre tend vers l'infini. Cette asymptotique peut être interprétée de la manière suivante: lorsqu'on multiplie beaucoup de transpositions prises au hasard dans le groupe symétrique S_n la probabilité d'obtenir une classe de conjugaison donnée est proportionnelle à la taille de cette classe, tandis que la probabilité que le groupe engendré par ces transposition n'est pas transitif tend vers 0.

Ainsi Marc Sage a fait preuve de sa compétence en tant que chercheur et obtenant plusieurs résultats originaux dans un domaine important est relativement complexe dont il a fait une synthèse dans son manuscrit. Il mérite pleinement de devenir docteur.

Dimitri Zvonkine Stanford, 16 mai 2012