

Brevet des Collèges

lundi 1er juillet 2024

Mathématique

Correction critique proposée

Exercice 1 – probabilités

L'énoncé ne précisant pas si la roue s'arrête de tourner, il serait loisible d'imposer nulle la « même probabilité de s'arrêter sur chaque numéro ». Tâchons d'aller au-delà, en supposant le contraire.

Que peut bien signifier maintenant « une roue [...] numérotée » ? Est-on en train de numérotter plusieurs roues à la suite, avec un numéro par roue ? Il est étrange de numérotter une roue tout court. En numérotter toutefois *certaines parties* paraît davantage sensé.

Nous supposerons donc, soutenus par la figure fournie, que :

1. notre expérience aléatoire ne comporte qu'une seule roue ;
2. cette roue comporte *certaines* régions qui sont autant de positions finales possibles de la bille après arrêt de la roue ;
3. chacune de ces régions est identifiée par l'un des nombres (entiers) de 0 à 36 (notre interprétation de « roue [...] numérotée de 0 à 36 ») ;
4. il n'y a aucun recoupement de région, çàd la bille ne peut se trouver à cheval sur plusieurs positions finales (univocité des "sorties de l'expérience"¹).

Ces quatre suppositions étant faites, il devient raisonnable de "coder" une issue (cf. point 2) par un élément du segment entier $[0, 36]$ (cf. point 3), ce qui revient à *choisir* ce dernier comme univers des possibles (çàd comme ensemble des issues).

L'énoncé imposant enfin *équiprobabilité* (cf. sa 3e phrase), nous n'avons aucune marge quant au choix de l'aléa : en notant u le cardinal de l'univers (çàd le nombre d'issues possibles), nous *devons* imposer la probabilité de chaque issue valant $\frac{1}{u}$. La probabilité de chaque événement vaudra alors cette probabilité $\frac{1}{u}$ multipliée par le nombre d'issues composant ledit événement.

Le segment $[0, 36]$ contenant $36 - 0 + 1 = 37$ éléments², la probabilité commune $\frac{1}{u}$ ci-dessus vaut $\frac{1}{37}$.

1. L'événement décrit « la bille s'arrête sur le numéro 7 » comporte une seule issue (celle codée par l'entier 7), sa probabilité vaut donc $\boxed{1} \frac{1}{u} = \frac{1}{37}$, c. q. f. d.
2. Listons les cases sur lesquelles apparaît un nombre pair³ et dont le *fond*⁴ est noir : en appelant n leur nombre, la probabilité cherchée vaudra alors $\frac{n}{37}$.

Parcourir la roue de la figure en sens horaire depuis les deux cases blanches contigües (vers midi) donne successivement les issues correspondant à ces cases :

4, 2, 6, 8, 10, 24, 20, 22, 28, 26.

Il y en a 10 et la probabilité demandée vaut $\frac{10}{37}$.

3. (a) L'événement correspondant à « la bille s'arrête sur un[e case dont le] numéro⁵ est inférieur ou égal à 6 » est le segment entier $[0, 6]$. Ce dernier ayant $6 - 0 + 1 = 7$ éléments, la probabilité de cet événement est $\frac{7}{37}$.
- (b) Chez les nombres *entiers*⁶, "valoir au moins 7" équivaut à "ne pas valoir au plus 6" : l'événement considéré est donc le complémentaire de l'événement $[0, 6]$ de la question 3a, sa probabilité est par conséquent le complémentaire à 1 de celle de $[0, 6]$, à savoir $1 - \frac{7}{37} = \frac{30}{37}$.

¹ on pourrait sinon sortir de l'expérience par *plusieurs* issues à la fois !

² Attention aux histoires de poteaux et d'intervalles : il y a toujours *un poteau de plus* que d'intervalles !

• - • - • - • - •

(*exception notable* : le dernier poteau "boucle" sur le premier)

³ quel autre sens donner à la *parité d'une région* de la roue qualifiée de « case » ?

⁴ par « case [...] noire » on pourrait interpréter que son *numéro* est noir (c'est bien ce que l'on a fait pour la parité, non ?)

⁵ la bille s'arrête sur une *case*, pas sur un numéro...

⁶ ce serait *faux* chez les fractions !

- (c) L'affirmation étudiée se reformule en « l'événement de la question 3b a une probabilité valant plus⁷ de $\frac{3}{4}$ », çàd en « $\frac{30}{37}$ vaut plus que $\frac{30}{40}$ ». La mise au même **numérateur** est ici un coup de chance car permet de se concentrer sur les dénominateurs, à savoir 37 et 40, que l'on saura ordonner strictement $40 > 37$. Diviser cette dernière minoration par $37 \cdot 40$ donne alors la minoration $\frac{1}{37} > \frac{1}{40}$, puis multiplier par 30 livre celle $\frac{30}{37} > \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$, ce qui permet de donner raison au joueur affirmateur.

Exercice 2 – algorithmie

1. (a) Appliquons pas à pas les étapes du programme A :

- Choisir un nombre. L'énoncé nous impose $\boxed{5}$.
- Prendre le carré du nombre choisi. On élève $\boxed{5}$ au carré (on ne "prend" pas son carré...), ce qui donne $\boxed{5}^2 = 25$.
- Multiplier le résultat par 2. On double⁸ le carré obtenu 25, on obtient le double $2 \cdot 25 = 50$.
- Ajouter le double du nombre de départ. Ajoutons au double obtenu 50 le double de $\boxed{5}$, à savoir $2 \cdot 10$, cela donne la somme $50 + 10 = 60$.
- Soustraire 4 au résultat. Retranchons de la somme obtenue 60 quatre unités, cela donne la différence $60 - 4 = 56$.

- (b) Appliquons pas à pas les étapes du programme B :

1. Quand [drapeau] est cliqué. Non applicable (condition de départ).
2. demander $\boxed{\text{Choisir un nombre}}$ et attendre. Non applicable – l'énoncé nous impose de choisir -9 .
3. mettre $\boxed{\text{nombre choisi}}$ à réponse. On remplit la case $\boxed{\text{nombre choisi}}$ avec la réponse précédente, çàd avec la réponse du programme à l'instruction⁹ « choisir un nombre », à savoir -9 .
4. mettre $\boxed{\text{Résultat 1}}$ à nombre choisi + 2. On remplit la case $\boxed{\text{Résultat 1}}$ avec la somme "valeur de $\boxed{\text{nombre choisi}}$ " plus "valeur de 2", çàd avec $-9 + 2 = -7$.
5. mettre $\boxed{\text{Résultat 2}}$ à nombre choisi - 1. On remplit la case $\boxed{\text{Résultat 2}}$ avec la différence "valeur de $\boxed{\text{nombre choisi}}$ " moins "valeur de 1", çàd avec $-9 - 1 = -10$.
6. Dire $\boxed{\text{Regrouper } \boxed{\text{Le résultat est}} \text{ et } \boxed{\text{Résultat 1}} * \boxed{\text{Résultat 2}}}$. On commence (cadre tout à droite avec le symbole $*$ que nous interprétons comme une *multiplication*) par multiplier la valeur de $\boxed{\text{Résultat 1}}$ avec celle de $\boxed{\text{Résultat 2}}$, ce qui donne le produit $(-7)(-10) = 10$, puis on concatène¹⁰ "Le résultat est" avec une chaîne de caractères désignant le produit précédent. On affiche¹¹ enfin la concaténée obtenue, ce qui donne :

Le résultat est 10

Telle est la sortie, le résultat (oui, sans ponctuation finale...), de notre programme appliqué au nombre -9 .

On voit alors surgir une ambiguïté de taille : le résultat est-il « Le résultat est 10 » (la sortie *stricto sensu*) ou bien simplement 10 (si l'on interprète le résultat précédent)? Qui sait... c'est tellement plus clair d'être flou.

Afin d'anticiper sur la comparaison des résultats des deux programmes (comparaison demandée à la question 3), nous choisirons *la 2de voie*. Suivant ce choix :

le résultat du programme B appliqué sur -9 est 10.

2. La notation x n'est pas très claire : nous prenons la liberté de croire qu'il s'agit d'une *appellation*, çàd du résultat de l'acte d'appeler – de nommer – à l'aide de la lettre x le nombre choisi par « On » (dans « **On** choisit un nombre »).

⁷noter l'ambiguïté sur l'aspect *strict* ou *large* de la comparaison... cette question ne sera ici finalement pas pertinente mais il FAUT l'avoir aperçue!

⁸oui, le français a inventé les verbes *doubler*, *tripler*, *quadrupler*... *décupler*...

⁹on serait bien en mal de chercher la réponse à une éventuelle *question*

¹⁰notre interprétation de « Regrouper [...] et »

¹¹notre interprétation de « Dire »

- (a) L'énoncé semble donner un ordre (à l'infinitif) sous forme interrogative (cf. ponctuation finale) : que sommes-nous censés comprendre ? ! Nous choisissons d'ignorer l'interrogation de l'énoncé – ce qui a pour effet immédiat de faire disparaître la nôtre.

Revient ensuite l'ambiguïté (déjà mentionnée en fin de question 1b) quant à *l'objet de l'ordre*, à savoir « le résultat obtenu par le programme B ». Nous nous sommes déjà exprimé sur la voie choisie pour lever cette ambiguïté.

Toujours dans les prétentions péniblement inutiles, l'énoncé parle de « l'expression qui donne » : mais a-t-il seulement établi *l'unicité* d'une telle expression pour pouvoir s'autoriser à employer l'article défini "l'" ? ? Il se pourrait très bien que certaines coïncident suivant la valeur du nombre x . Employer l'article indéfini « une » aurait été bien plus humble et convenable.

Cette dernière prétention soulève d'ailleurs le problème du sens de « expression qui *donne* » : pourquoi le même verbe *donner* que pour un programme – "donnant un résultat" ? L'expression $1 + 1$ donne-t-elle 2 ? *Vaut*-elle 2 ? Semble ici régner la confusion entre opération et résultat, entre programme et sortie. Il nous paraît bien plus clair de parler d'« une expression qui *est/vaut* (voire : *qui dénote*) le résultat obtenu par le programme B ». Et quitte à reformuler & simplifier, que dire tout simplement de :

Parmi les trois propositions ci-dessous [blabla], laquelle est le résultat du programme B ?

Last but not least, l'énoncé ne précise pas l'entrée¹² du programme. Nous avons la faiblesse de croire qu'il s'agit toujours du nombre x choisi par « On ».

Ces ((très) nombreux) flous commentés – à défaut d'être parfaitement dissipés –, nous pouvons enfin nous concentrer sur suivre les étapes du programme B :

1. & 2. Non applicables comme à la question 1b – l'énoncé impose de choisir le même nombre que « On », à savoir x .
3. *mettre* [nombre choisi] à réponse. On remplit la case [nombre choisi] avec la réponse précédente, çàd avec x .
4. *mettre* [Résultat 1] à nombre choisi + 2. On remplit la case [Résultat 1] avec la somme "valeur de [nombre choisi]" plus "valeur de 2", çàd avec $x + 2$.
5. *mettre* [Résultat 2] à nombre choisi - 1. On remplit la case [Résultat 2] avec la différence "valeur de [nombre choisi]" moins "valeur de 1", çàd avec $x - 1$.
6. *Dire* [Regrouper [Le résultat est] et [Résultat 1 * Résultat 2]]. On commence par multiplier la valeur de [Résultat 1] avec celle de [Résultat 2], ce qui donne le produit $(x + 2)(x - 1)$, puis on concatène "Le résultat est" avec une chaîne de caractères désignant le produit précédent. On affiche enfin la concaténée obtenue, ce qui donne :

Le résultat est [une description du produit $(x + 2)(x - 1)$]

La phrase ci-dessus est la sortie de notre programme appliqué au nombre x .

Concluons. Chacune des trois expressions données est une *égalité*, de la forme $E_i = [\dots]$ où i est un entier entre 1 et 3, donc NE commence PAS par « Le résultat est » : aucune d'elle ne peut donc convenir !

En revanche, si les trois égalités où apparaissent E_1 , E_2 et E_3 sont autant de *définitions*¹³ de ces derniers¹⁴, alors le programme B obtient pour résultat *stricto sensu*

« Le résultat est E_2 »

où il convient de remplacer l'expression E_2 par ce qu'elle abrège. Finalement, suivant notre décision prise à la question 1b, il convient de recopier simplement " E_2 ".

Remarque importante : si, dans le cadre tout à droite, il avait également été question de *concaténation* (au lieu, implicitement, d'*évaluer un produit*), nous aurions obtenu $x + 2 * x - 1$ et été tentés de recopier l'expression E_3 . Or le symbole $*$ n'a alors aucune raison d'exprimer une

¹²Pourquoi appliquerait-on le programme B sur le nombre que l'on vient d'appeler x ? On pourrait très bien garder x au chaud et appliquer B sur autre chose en attendant, par exemple pour faire quelques observations avant d'énoncer quelque généralité.

¹³et non des « propositions » d'« expressions » comme le dit l'énoncé, entretenant par là même la confusion

¹⁴On a ici un cas d'école sur l'intérêt de la notation "==" (qui *définit*) en regard de l'égalité simple "=" (simple relation binaire dont la vérité pourrait s'évaluer).

multiplication : concaténer ne s'occupe que la *forme* des caractères, non de leur sens. Voici deux éléments qui nous aident ici à bien distinguer les deux (produit VS concaténée). D'une part l'ordre (instruction) correspondant à l'opération en jeu : la présence de « regrouper » pour le concaténé, rien pour le produit (*idem* pour la somme ou la différence aux étapes 4 et 5 du programme). D'autre part, le connecteur utilisé : la conjonction française « et » pour le concaténé, le symbole $*$ pour un produit (comme nous avons $+$ pour une somme).

- (b) Même flou, même remarque, même rôle, même croyance.

(Sans rapport aucun, la ponctuation finale de l'énoncé manque : s'agirait-il d'un nouveau point d'interrogation semant la confusion dans l'ordre donné ?)

Suivons à présent les étapes du programme A :

- *Choisir un nombre.* Nous avons cru bon choisir le x pas très clairement introduit ci-dessus.
- *Prendre le carré du nombre choisi.* On élève $\boxed{x}$ au carré, ce qui donne x^2 .
- *Multiplier le résultat par 2.* On double le carré obtenu x^2 , on obtient le double $2x^2$.
- *Ajouter le double du nombre de départ.* Ajoutons au double obtenu $2x^2$ le double de $\boxed{x}$, à savoir $2x$, cela donne la somme $2x^2 + 2x$.
- *Soustraire 4 au résultat.* Retranchons de la somme obtenue $2x^2 + 2x$ quatre unités, cela donne la différence $2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2)$.

Reformulation (sans les x pas clairs). Au vu des nombreux flous sus-mentionnés, toute la question 2 gagnerait à être reformulée. Il s'agit en effet de démontrer que,

pour chaque nombre,

le résultat du programme B quand on choisit ce nombre au départ est...

et celui du programme A quand on choisit ce nombre au départ est...

Un tel énoncé, commençant par « *pour chaque* » s'appelle une *généralité*¹⁵. Or une généralité s'établit naturellement en commençant par *évoquer*¹⁶ un objet – ici un nombre – *via* la formule magique

« *Soit n un nombre* », la lettre choisie (ici n) étant arbitraire¹⁷.

Le nombre évoqué prend alors autant de sens que n'importe quel nombre ($3, -7, \sqrt{2}, \pi \dots$) et l'on pourra le manipuler en conséquence, l'idée *fondamentale* étant que

tout ce qui sera prouvé sur ce nombre n le sera alors POUR CHAQUE NOMBRE.

Ainsi, pour établir une généralité, au lieu de démontrer autant d'énoncés qu'il y a de nombres (ce qui pourrait à juste titre effrayer), il suffit d'en démontrer *un seul*¹⁸ – celui portant sur le nombre évoqué !

Bref. Notre proposition de reformulation pour la question 2 est la suivante :

2. *Soit n un nombre.*

a. *On exécute le programme B en choisissant n comme nombre de départ.*

Parmi les trois propositions ci-dessous [blabla], laquelle est le résultat obtenu ?

b. *On exécute le programme A en choisissant n comme nombre de départ.*

Exprimer en fonction de n le résultat obtenu.

3. Soit un nombre, appelons-le d (comme "départ") et appliquons-y les programmes resp. A et B.

D'après la question 2a, le programme B a pour "résultat" (pas *stricto sensu*) l'expression E_2 où l'on a remplacé le nom x (ancien) du nombre choisi par le nom d (nouveau) du nombre que nous venons d'évoquer, à savoir $(d + 2)(d - 1)$. Développer donne

$$d^2 - 1d + 2d - 2 \cdot 1 = d^2 + d - 2.$$

Par ailleurs, d'après la question 2b, le programme A a pour résultat le double $2(d^2 + d - 2)$, ce qui est bien le double du résultat ci-dessus.

¹⁵ car sa portée est *générale*. On parle aussi d'*énoncé universel* – car de portée... universelle !

¹⁶ *évoquer* = créer par la magie. Ce terme n'est pas officiel mais aide à capter – en le nommant – un acte *fondamental* de la pratique mathématique.

¹⁸ C'est cette règle de déduction qui éclaire le qualificatif « *quelconque* » trop souvent attribué aux objets évoqués, caractère nous rappelant que nous contrôlons autant l'objet évoqué que la couleur des yeux de la prochaine personne que nous allons rencontrer – à savoir aucunement. Cette vue de l'esprit est toutefois dispensable et il convient surtout de connaître la règle sus-mentionnée !

Exercice 3 – géométrie plane

- Le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ (d'après la 2e hypothèse), donc sa longueur est le double du rayon du même cercle, lequel rayon vaut 4,5 cm (d'après la 1re hypothèse), d'où l'égalité

$$AB = 2 \cdot 4,5 \text{ cm} = 9 \text{ cm}, \text{ c. q. f. d.}$$

- D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, il suffit¹⁹ pour conclure d'établir l'égalité des aires $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Or les trois longueurs-racines en jeu sont connues : nous venons d'évaluer AB , les deux autres BD et AD nous sont données par la dernière hypothèse.

Afin de nous épargner des calculs fastidieux (qui veut élever 5,4 au carré à la main ?), faisons ici une remarque utile : si nous trouvons un nombre a vérifiant l'égalité

$$\left(\frac{AB}{a}\right)^2 = \left(\frac{AD}{a}\right)^2 + \left(\frac{BD}{a}\right)^2,$$

alors multiplier cette dernière par a^2 donnera exactement l'égalité à prouver (il suffit de tout développer, les a^2 disparaissent tous). À nous de trouver des candidats a qui simplifient la vérification de l'égalité à démontrer !

Commençons déjà par éliminer les unités en divisant nos trois longueurs par cm, puis par nous débarrasser des virgules en décuplant nos trois longueurs : ces deux opérations successives reviennent à une division par $\frac{\text{cm}}{10} = 1 \text{ mm}$. Nous obtenons les trois nombres 72, 54 et 90, apparaissant tous dans la table de 9. Leurs neuvièmes valent resp. 8, 6 et 10, tous pairs, de moitiés resp. 4, 3 et 5. Total, si l'on choisit $a := \frac{\text{cm}}{10} \cdot 9 \cdot 2 = 1,8 \text{ cm}$, on est ramené à établir l'égalité

$$\underbrace{4^2 + 3^2}_{16+9} \stackrel{?}{=} \underbrace{5^2}_{25}, \text{ laquelle est bien vérifiée.}$$

(La lectrice aura bien sûr reconnu le fameux triangle triangle 3-4-5, déguisé par l'énoncé à l'aide du facteur 1,8 cm, un déguisement bien coûteux en calculs.)

Élégant, non ?²⁰

- Le parallélisme $(BD) \parallel (EF)$ donné en 4e hypothèse nous incite à tenter d'appliquer le théorème de Thalès. De fait, les points A, E, B d'une part et A, F, D d'autre part sont alignés (d'après la 3e hypothèse) et ce *dans cet ordre* (d'après la figure) ; avec le parallélisme précédent, les hypothèses du théorème de Thalès sont réunies et livrent en conclusion l'égalité²¹ $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$. Or, trois des longueurs en jeu sont connues (AE et AD d'après la dernière hypothèse, AB d'après la question 1) et la 4e est précisément celle demandée²² :

$$\begin{aligned} \frac{AF}{\text{mm}} &= \frac{AE}{AB} \frac{AD}{\text{mm}} = \frac{27 \text{ mm}}{90 \text{ mm}} \frac{72 \text{ mm}}{\text{mm}} = \frac{27}{90} 72 = \frac{3 \cdot 9}{10 \cdot 9} 72 = \frac{3}{10} (70 + 2) \\ &= \frac{3(70 + 2)}{10} = \frac{3 \cdot 70 + 3 \cdot 2}{10} = \frac{210 + 6}{10} = \frac{216}{10}. \text{ D'où } AF = 21,6 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Sanity check : la longueur trouvée est d'une part plus petite que celle 27 mm du segment $[AE]$ (dont elle mesure le projeté orthogonal²³ sur la droite (AD)), d'autre part plus petite que $AD = 72 \text{ mm}$ (le point F est entre A et D).

Autre solution (trigonométrique) : l'angle $\widehat{A}$ vaut à la fois $\widehat{BAD}$ et $\widehat{EAF}$ (d'après la figure²⁴), d'où l'égalité des cosinus $\cos \widehat{BAD} = \cos \widehat{EAF}$, ce qui s'écrit $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE}$, simple remaniement (permuter AD

¹⁹le (sens direct du) théorème de PYTHAGORE nous dit même que cette égalité est *nécessaire* ; le résultat demandé *équivaut* donc à cette égalité (il suffit *et il faut* l'établir)

²⁰La lectrice dubitative pourra toujours se lancer dans de douloureux calculs en évaluant d'une part l'aire

$$\begin{aligned} AB^2 &= (9 \text{ cm})^2 = 9^2 \text{ cm}^2 = 81 \text{ cm}^2, & \text{d'autre part la somme} \\ AD^2 + BD^2 &= (7,2 \text{ cm})^2 + (5,4 \text{ cm})^2 = 7,2^2 \text{ cm}^2 + 5,4^2 \text{ cm}^2 \\ &\stackrel{\text{calculs}}{=} 51,84 \text{ cm}^2 + 29,16 \text{ cm}^2 = \underbrace{(51,84 + 29,16)}_{= 52,00 + 29,00 = 81} \text{ cm}^2. \\ &\text{pénibles} \end{aligned}$$

²¹on laisse de côté le rapport $\frac{EF}{BD}$ puisqu'il contient une longueur inconnue et non demandée, à savoir EF

²²on divise par mm pour d'une part éviter l'encombrante répétition de l'unité, d'autre part pour se débarrasser des virgules

²³projeter orthogonalement *diminue* les distances

²⁴c'est une autre façon de dire les deux alignements affirmés ci-dessus

et AE) de l'égalité obtenue ci-dessus *via* le théorème de Thalès – on poursuivra donc comme dans la 1^{re} solution.

Remarque importante : l'égalité des cosinus repose sur le caractère bien défini du cosinus, lui-même reposant sur... le théorème de Thalès ! Attention donc à ne pas se laisser leurrer par l'apparente élégance des outils employés – ici une définition trigonométrique – comparée à l'utilisation d'un théorème qui est au fondement même de ladite définition !

4. (a) Le triangle ABD étant rectangle en D , son aire vaut la moitié de celle d'un rectangle de côtés successifs $[AD]$ et $[BD]$, çàd vaut la moitié de $AD \cdot BD$, d'où²⁵

$$\begin{aligned} \frac{\text{aire}(ABD)}{\text{mm}^2} &= \frac{AD}{2} \frac{BD}{\text{mm}^2} = \frac{72 \text{ mm}}{2} \frac{54 \text{ mm}}{\text{mm}^2} = 36 \cdot 54 = 9 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 6 \\ &= \underline{9^2 \cdot 4 \cdot 6} = (3^2)^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3 = 3^4 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^5. \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'aire à obtenir $19,44 \text{ cm}^2$ (donnée par l'énoncé) s'exprime en mm^2 par 1944. Il suffit donc de factoriser ce dernier en nombres premiers, *connaissant d'avance la décomposition à obtenir* – ce qui rend les choses plus faciles !

Commençons par le facteur $3^2 \cdot 2 = 18$ afin de retrancher un gros 1800 : on a

$$\begin{aligned} \text{d'une part } 1944 &= 1800 + 144 = 18 \cdot 100 + 12^2, \\ \text{d'autre part } 12^2 &= (3 \cdot 2^2)^2 = 3^2 \cdot (2^2)^2 = 3^2 \cdot 2^{2 \cdot 2} = 9 \cdot 2^4 = 9 \cdot 2 \cdot 2^3 = 18 \cdot 8, \\ \text{d'où } 1944 &= 18 \cdot 100 + 18 \cdot 8 = 18(100 + 8) = 18 \cdot 108. \end{aligned}$$

Reste à factoriser 108 dont la somme des chiffres $1 + 0 + 8 = 9$ est multiple de 9 : nous allons donc retirer un bon 90. On a

$$108 = 90 + 18 = 9 \cdot 10 + 9 \cdot 2 = 9(10 + 2) = 9 \cdot 12.$$

On obtient ainsi $1944 = 18 \cdot 9 \cdot 12 = 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 6 = \underline{9^2 \cdot 4 \cdot 6}$ que nous avons déjà rencontré plus haut (doublement souligné), ce qui conclut.

- (b) L'énoncé parle « du disque » sans préciser *lequel* : faute d'information, nous supposons qu'il s'agit de celui associé à *l'unique cercle* de la figure – celui de diamètre $[AB]$. Notons-le $\mathcal{D}$.

L'énoncé, de plus, tente bien de nous donner la précision attendue mais semble oublier que le centième n'est pas une unité d'aire ! Gageons qu'il sous-entend pour unité *la plus récente qu'il ait utilisée*, visible dans le $19,44 \text{ cm}^2$ de la question 4a, et demande donc une précision *au centième de* cm^2 , çàd au mm^2 . Cela serait par ailleurs cohérent avec la précision suggérée²⁶ par la valeur exacte 1944 mm^2 sus-mentionnée.

Bref : le rayon du disque $\mathcal{D}$ supposément considéré est celui du cercle $\mathcal{C}$ et est donné par la 1^{re} hypothèse, son carré vaut

$$\text{rayon}(\mathcal{C})^2 = (45 \text{ mm})^2 = 45^2 \text{ mm}^2.$$

Pour évaluer 45^2 , on peut²⁷ regrouper les paquets de 25 par 4 en centaines :

$$\begin{aligned} 45^2 &= (9 \cdot 5)^2 = 9^2 \cdot 5^2 = \underbrace{81}_{=20 \cdot 4 + 1} \cdot 25 = 20 \cdot 4 \cdot 25 + 1 \cdot 25 \\ &= 20 \cdot 100 + 25 = 2000 + 25 = 2025. \end{aligned}$$

Le disque $\mathcal{D}$ a donc pour aire, à la précision unité supposément convenable :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \pi \text{ rayon}(\mathcal{C})^2 = 2025\pi \text{ mm}^2 \stackrel{\text{au } \text{mm}^2}{\underset{\text{près}}{\simeq}} 6362 \text{ mm}^2.$$

²⁵ encore une fois, on divise par mm^2 afin d'éliminer les unités et les virgules

²⁶ Une valeur exacte (par définition *infiniment* précise) admet une infinité de précisions chacune plus fine que la précédente : de laquelle parlons-nous au juste ? Celle où le dernier chiffre significatif *est* le chiffre des unités (en l'occurrence : au millimètre carré près).

²⁷ On peut également faire apparaître une différence où seuls des 5 entrent en jeu :

$$\begin{aligned} 45^2 &= (50 - 5)^2 = \underbrace{50^2}_{=5^2 10^2 = 25 \cdot 100} - \underbrace{2 \cdot 50 \cdot 5}_{=100} + 5^2 \\ &= 2500 - 500 + 25 = 2000 + 25 = 2025. \end{aligned}$$

5. Notons toujours $\mathcal{D}$ le disque associé au cercle $\mathcal{C}$. Le pourcentage demandé est alors le rapport $\frac{\text{aire}(ABD)}{\text{aire}(\mathcal{D})}$.

Le triangle ABD (intérieur compris) étant strictement inclus dans le²⁸ demi-disque de diamètre $[AB]$ passant par D , son aire est strictement inférieure à celle dudit demi-disque, çàd à celle de la moitié du disque de diamètre $[AB]$, ce qui s'écrit

$$\text{aire}(ABD) < \frac{1}{2} \text{aire}(\mathcal{D}), \text{ çàd } \frac{\text{aire}(ABD)}{\text{aire}(\mathcal{D})} < \frac{1}{2}, \text{ ou encore } \frac{\text{pourcentage}}{\text{demandé}} < 50\%.$$

L'énoncé n'exigeant *aucune précision*, nous serions entièrement dans notre bon droit de répondre 0% à la centaine de % près.

Tachons par curiosité d'être plus précis. Le rapport cherché se simplifie en

$$\frac{\text{aire}(ABD)}{\text{aire}(\mathcal{D})} = \frac{36 \cdot 54}{\pi \cdot 45^2} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 6}{(9 \cdot 5)^2 \pi} = \frac{9^2 \cdot 4 \cdot 6}{9^2 \cdot 5^2 \pi} = \frac{24}{25\pi},$$

ce qui peut se réécrire²⁹ plus élégamment $(1 - \frac{1}{25}) \frac{1}{\pi}$ et vaut environ (merci calculette) 0,30558, à savoir 30,56% arrondi au centième de %.

Exercice 4 – QCM (applications, calcul littéral, translations, statistique, trigonométrie)

(spoiler : 1A 2A 3B 4C 5B 6A)

1. L'énoncé ne donne aucun sens à la lettre x utilisée – sans doute voulait-il parler de l'application $x \mapsto 3x - 2$.

Nommer cette application n'apporte d'ailleurs rien ni à la question ni à la réponse : on se serait tout à fait satisfait de « On considère l'application $t \mapsto 3t - 2$. Quelle l'image de -4 par cette application ? » voire (encore plus simple) de « Quelle l'image de -4 par l'application $\square \mapsto 3\square - 2$? ».

Bref : cette image s'obtient en substituant, dans l'expression à droite de la flèche $\mapsto$, le nombre $\boxed{-4}$ à l'argument (ci-dessus resp. x , t ou $\square$), ce qui donne

$$3\boxed{-4} - 2 = -12 - 2 = -14.$$

2. Cuber³⁰ le produit $(-1)5$ donne $(-1)^3 5^3$ (on a distribué l'exposant 3 sur chaque facteur), à savoir³¹ -5^3 . Vu par ailleurs les égalités

$$5^3 = 5^2 5 = 25(4 + 1) = \underbrace{25 \cdot 4}_{=100} + \underbrace{25 \cdot 1}_{=25} = 125, \quad \text{le cube cherché } (-5)^3 \text{ vaut } -5^3 = -125.$$

3. Pour aller de C vers A , on peut (suivant le réseau rectangulaire en fond) faire deux pas vers le bas puis deux vers la gauche. La translation qui transforme C en A agit donc de cette façon-là sur chaque point, en particulier sur le point J : l'image de ce dernier par cette translation s'obtient en faisant, à partir de J , deux pas vers le bas (cela mène en L) puis deux vers la gauche, ce qui mène en E .
4. L'énoncé ne donne aucun sens à $\mathcal{C}_f$: nous nous permettrons de croire qu'il s'agit du *graphe*³² de l'application f , application dont le sens manque tout autant à l'appel. Pourquoi ne pas avoir plus simplement demandé « Quel est l'antécédent de 3 par l'application dont le graphe est donné ci-contre ? » ?

Eh bien parce que cette formulation contient encore et toujours une inutile prétention, cachée derrière l'article défini « l' » devant « antécédent » : *pourquoi diable préjuger de l'unicité d'un tel antécédent ?* Certes l'application est ici affine (le graphe donné est un "bout" de droite) et peut-être certaines d'entre vous auront démontré en cours cette unicité dans le cas affine³³ ; il n'en reste pas moins que l'article par défaut qui doit vous venir avec « antécédent » est « un antécédent ».

²⁸sans la précision à venir sur le point D , il y a *deux* tels demi-disques

²⁹aucune obligation, bien sûr, mais aviez-vous remarqué que le numérateur 24 était le décrétement du 25 apparaissant au dénominateur ?

³⁰synonyme de "élever au cube"

³¹*Attention* : dans l'écriture -5^3 , l'opposition s'applique bien *après* cubage ! Et est donc à comprendre comme $-(5^3)$. Dans l'autre sens, on retomberait sur le cube $(-5)^3$ de départ.

³²ou *courbe représentative*, ce qui est – convenons-en – beaucoup plus long mais a le mérite de coller au sens : c'est une *courbe* (d'où au passage la lettre initiale $\mathcal{C}$ utilisée), çàd une figure curviligne, qui *représente* l'application f , au sens où elle en donne une image, qui est de plus "fidèle", çàd permettant d'*identifier* l'application représentée (deux graphes identiques proviendront donc de la *même* application)

³³à une exception près, laissée aux soins de la lectrice. *Hint* : l'unicité en question revient à ce que chaque droite *horizontale* ne rencontre le graphe pas plus d'une fois.

Bref : traçons une droite horizontale d'ordonnée le nombre dont on cherche un antécédent (en l'occurrence : d'ordonnée 3). Les antécédents cherchés sont alors les abscisses des points de rencontre entre la droite précédente et le graphe donné. En l'occurrence, le seul point d'intersection est "à l'origine", çàd est d'abscisse nulle. Il y a donc bien *un seul* antécédent de 3 par l'application considérée, à savoir 0.

5. Ordonnons les sept tailles données, en prenant pour unité – afin d'éliminer les virgules – le centimètre :

$$146 \quad 160 \quad 165 \quad \underline{167} \quad 170 \quad 172 \quad 175.$$

Les tailles étudiées étant en nombre $\boxed{7}$ *impair*, leur médiane est (dans la liste réordonnée ci-dessus) la $\frac{\boxed{7}+1}{2}$ -ième valeur, çàd la 4e, à savoir 167. (Il s'agit de la valeur "au milieu" de la liste réordonnée.) Avec l'unité demandée, la taille médiane cherchée vaut 1,67 m.

6. L'énoncé semble oublier que les longueurs ne sont pas des nombres adimensionnés – ceux que l'on peut lire sur la figure. *Quelle est donc l'unité employée ?* Notons-la u .

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle est défini par le rapport des longueurs du côté adjacent à cet angle (autre que l'hypoténuse dudit triangle) et de l'hypoténuse. En l'occurrence (une "copie" du fameux triangle rectangle 3-4-5), l'hypoténuse se lit sur la figure et a pour longueur $5u$, tandis que le côté adjacent à l'angle α a pour longueur $4u$. Le cosinus cherché vaut donc le quotient $\frac{4u}{5u} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Exercice 5 – arithmétique, volumes

Partie A – arithmétique

1. On peut toujours "faire" 15 sachets en y mettant n'importe quoi. La vraie question est savoir si l'on peut le faire *sous les contraintes de l'énoncé* – un implicite qui gagnerait à être mis au jour.

Supposons qu'il soit possible de faire 15 sachets selon les volontés de la présidente. Il faut en particulier « que, dans chaque sachet, il y ait exactement le même nombre de drapeaux ». Notons d ce dernier nombre, de sorte que le nombre total de drapeaux contenus dans les 15 sachets vaut $15d = 5 \cdot 3d$ et est donc multiple de 5. Or ce nombre est aussi le nombre de drapeaux initialement achetés, à savoir $132 = 130 + 2 = 10 \cdot 13 + 2 = 5(2 \cdot 13) + 2$, lequel n 'est *pas* multiple³⁴ de 5. Nous avons ainsi prouvé un énoncé ET sa négation (à savoir qu'un certain nombre est ET n'est pas multiple de 5) : une telle conjonction s'appelle une *contradiction* (ou *absurdité*, *impossibilité*) et suffit à *réfuter* la supposition de départ, çàd à établir qu'elle ne peut se réaliser.

2. On admettra la primalité des entiers 2, 3, 5 et 11.

- (a) On a les égalités

$$\begin{aligned} 330 &= 33 \cdot 10 = 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 \\ \text{et } 132 &= 120 + 12 = 12 \cdot 10 + 12 \cdot 1 = 12(10 + 1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 11. \end{aligned}$$

- (b) Supposons que la présidente ait réussi à faire des sachets selon ses volontés. En suivant le même raisonnement qu'à la question 1, on montrerait que le nombre de sachets doit alors diviser le nombre total de drapeaux (132) tout comme celui d'autocollants (330), donc doit être un diviseur *commun* à 132 et 330.

Réciproquement, soit s un tel diviseur commun, de sorte que les quotients $\frac{132}{s}$ et $\frac{330}{s}$ sont entiers³⁵. En réalisant alors s sachets contenant chacun $\frac{132}{s}$ autocollants et $\frac{330}{s}$ drapeaux, les volontés de la présidente seront respectées.

Conclusion : les nombres de sachets réalisables – toujours suivant lesdites volontés – sont (précisément) les diviseurs communs de 132 et 330.

Par conséquent, le plus grand nombre de sachets que la présidente pourra réaliser EST le plus grand diviseur commun de 132 et 330, aussi noté $\text{pgcd}(\frac{132}{330})$. Or ce dernier s'évalue aisément grâce aux décompositions de la question 2a (prendre pour chaque premier le plus petit exposant) :

$$\text{pgcd} \left(\frac{132}{330} \right) = \text{pgcd} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 11} \right) = 2^1 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 11 = 2 \cdot 33 = 66.$$

³⁴voici deux façons de voir cela : son dernier chiffre n'est ni 0 ni 5, le reste de sa division euclidienne par 5 est non nul (il vaut 2 d'après les égalités précédentes)

³⁵appelés les *codiviseurs* de s dans 132 et 330 resp.

- (c) Suivant la réciproque de la question 2b, on réalise 66 sachets contenant chacun $\frac{330}{66}$ autocollants et $\frac{132}{66}$ drapeaux, ces derniers codiviseurs valant resp. $\frac{30 \cdot 11}{6 \cdot 11} = \frac{30}{6} = 5$ et $\frac{12 \cdot 11}{6 \cdot 11} = \frac{12}{6} = 2$.

Partie B – volumes

Le remplissage de la piscine consiste littéralement en le déplacement d'un certain volume d'eau depuis un certain lieu vers l'intérieur de la piscine, aspect pratique *complètement négligé* par l'énoncé qui semble focalisé sur le coût (théorique) de l'*acquisition* dudit volume d'eau. Ce n'est pas pour rien que les pompes des pompiers ont besoin d'énergie, laquelle a un coût... Sommes-nous justifiés de négliger ce dernier par rapport au coût du "bien aquatique" correspondant ? La question demeure entière.

Nous supposons, afin de pouvoir raisonnablement exploiter les données de l'énoncé, que ce dernier *identifie le coût du remplissage à celui du volume d'eau remplissant*.

Nous disposons du prix volumique de l'eau (4,14 EUR / m³), il s'agit donc d'évaluer le volume d'eau remplissant. La piscine étant « remplie aux $\frac{9}{10}$ du volume », il suffit d'évaluer le volume de la piscine. Or cette dernière « a la forme d'un pavé droit » et un tel pavé a pour volume le produit de ses trois dimensions (largeur, longueur, profondeur), lesquelles pour la piscine se lisent sur la figure (resp. 15m, 25m, 2m). Mettons tout ensemble :

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{coût du} \\ \text{remplissage} \\ \text{de la piscine} \end{array} \quad \overset{\text{supposition}}{=} \quad \begin{array}{c} \text{coût du volume} \\ \text{d'eau remplissant} \\ \text{la piscine} \end{array} \\
 & \quad \quad \quad = \quad \begin{array}{c} \text{prix volumique} \\ \text{de l'eau} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{volume d'eau} \\ \text{remplissant} \\ \text{la piscine} \end{array} \\
 & \quad \quad \quad = \quad \begin{array}{c} \text{prix volumique} \\ \text{de l'eau} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{pourcentage} \\ \text{de remplissage} \\ \text{de la piscine} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{volume de} \\ \text{la piscine} \end{array} \\
 & \quad \quad \quad = \quad \begin{array}{c} \text{prix volumique} \\ \text{de l'eau} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{pourcentage} \\ \text{de remplissage} \\ \text{de la piscine} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{largeur} \\ \times \text{longueur} \\ \times \text{profondeur} \end{array} .
 \end{aligned}$$

L'application numérique donne

$$\begin{aligned}
 \text{coût du remplissage} &= \frac{1}{\text{EUR}} \quad 4,14 \frac{\text{EUR}}{\text{m}^3} \quad \frac{9}{10} \quad 15 \text{ m} \cdot 25 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \\
 \text{de la piscine en EUR} &= \frac{414 \cdot 9 \cdot 3 \cdot (5 \cdot \underline{2}) (25 \cdot 2 \cdot \underline{2})}{100 \quad \underline{2} \cdot 10 \cdot \underline{2}} \frac{\text{EUR}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{EUR}} \frac{\text{m}}{\text{EUR}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{on a fait apparaître en haut et} \\ \text{en bas deux } \underline{2} \text{ afin d'obtenir} \\ \text{au numérateur un 10 et un 100} \end{array} \right) \\
 &= \frac{\cancel{2} \cdot 207 \cdot \cancel{27}}{\cancel{2} \cdot 2} \quad (\text{or 207 a une somme de} \\
 & \quad \quad \quad \text{chiffres multiple de 9}) \\
 & \quad \quad \quad \left(= \frac{1}{2} \underbrace{207}_{=180+27=9 \cdot 20+9 \cdot 3=9 \cdot 23} \cdot 9 \cdot 3 = \frac{1}{2} 3^5 23 \quad (\text{pour la beauté arithmétique}) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (200 + 7) (20 + 7) = \frac{4000 + 1400 + 140 + (48 + 1)}{2} \\
 &= \frac{4000}{2} + \frac{1400}{2} + \frac{140}{2} + \frac{48}{2} + \frac{1}{2} = 2000 + 700 + 70 + 24 + 0,5 \\
 &= 2770 + 24,5 = 2794,50.
 \end{aligned}$$

Ce coût est de l'ordre d'un salaire convenable !