L1 Double-licence Mathématiques et Économie — **Université d'Evry Val d'Essonne**
EC 223 - Le langage mathématique — **Année 2017/2018**

DS du 5 avril 2018
Durée : 1h30

Tout document est interdit. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Le soin et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1. On considère les propositions suivantes :

P : Tous les français sont originaires de l'Ile-de-France.

Q : Si c'est dimanche aujourd'hui alors demain c'est lundi.

R : Si vous êtes le Père Noël alors je suis Spider-Man.

1. Écrire la négation des propositions P, Q, et R.
2. Écrire la contraposée des implications Q et R.
3. Donner la valeur logique des propositions P, Q et R en justifiant votre réponse.

Exercice 2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Exprimer en français les propositions suivantes :

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\, xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0.$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\;\; f(x) = -f(-x).$
3. $\exists M > 0 : \;\; \forall\, n \in \mathbb{N},\;\; |u_n| \leq M.$
4. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0,\;\; u_n < u_{n+1}.$

Exercice 3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Écrire en langage mathématique les propositions suivantes, puis donner leurs négations.

1. f est surjective.
2. f n'est pas à valeurs négatives.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.
4. Tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.
5. Entre deux nombres rationnels distints, il existe un nombre irrationnel.

Exercice 4. On considère les propositions suivantes :

P : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} : \;\; xy \geq 0.$

Q : $\exists\, x \in \mathbb{R} : \forall\, y \in \mathbb{R},\;\; xy \geq 0.$

R : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R},\;\; xy \geq 0.$

1. Écrire la négation de chacune des propositions.
2. En justifiant votre réponse, dire quelles propositions sont vraies et quelles sont fausses.

Exercice 5. Soient A et B les deux parties de $\mathbb{R}$ définies par :

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 6 \leq 0\}.$$

1. Montrer que $A \subset B$.
2. Énoncer le même résultat sans utiliser d'ensembles ni d'inclusion, mais sous la forme d'une proposition du type $P \Longrightarrow Q$.

Exercice 6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire si les propositions suivantes sont vrais ou fausses. Si la proposition est vraie, donner une justification, si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Si f est périodique alors $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = f(x))$.
2. Si $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = f(x))$ alors f est périodique.
3. Si f est strictement croissante alors f est surjective.
4. Si f est strictement croissante alors f est injective.

Exercice 7. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.