Devoir maison
(langage mathématique)

à rendre avant midi le mercredi 13 mai 2020.

1 logique des propositions

Tout faire avec uniquement le connecteur d'incompatibilité. Les lettres latines majuscules dénoteront des (pièces-)propositions : $A, B, C...$ Le connecteur d'incompatibilité sera noté $|$ ou $/$, la deuxième notation étant prioritaire sur la première, ce qui permettra d'oublier de nombreuses parenthèses et d'alléger les notations. Ainsi la notation $A|B/C$ abrégera-t-elle $A|(B|C)$.

1. *Établir les équivalences prouvales* $\begin{cases} P|Q \text{ éq } P \Longrightarrow \overline{Q} \\ P|\overline{Q} \text{ éq } P \Longrightarrow Q \end{cases}$.
2. *Interpréter l'incompatibilité* $A|B/C$.
3. *Montrer que, si l'on peut prouver l'incompatibilité* $A|B/C$*, on peut alors également prouver l'implication* $S|B \Rightarrow A|S$.
4. *Établir, si l'on peut prouver l'implication* $A \Rightarrow B$*, la prouvabilité de celle* $P|B \Rightarrow A|P$.
5. *Démontrer que, dès qu'on peut prouver les propositions* A *et* $A|B/C$*, on peut alors prouver la pièce* C*. Voyez-vous un fait analogue (et très souvent utilisé) utilisant le connecteur d'implication ?*
6. *Peut-on prouver la pièce-incompatibilité* $\underline{A|B/C} \ | \ \underline{(D|C) \ | \ (A|D) / (A|D)} \ / \ \underline{A|A/B}$ *? (les soulignages jouent le rôle de parenthèses.)*

2 traduction

Soient $s \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\sigma \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $F \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$

1. *Traduire ces trois invocations sans aucun des symboles "*$\mathbf{R}$*", "*$\mathbf{N}$*", "*$\mathbf{C}$*" ou "*$\in$*".*
2. *Formaliser le prédicat "être plus petit en module que l'inverse de chaque naturel non nul" et montrer que ce prédicat équivaut à "être nul" (à vous de donner le cadre).*
3. *Proposer une interprétation aussi explicite que possible des énoncés formels suivants :*
   (a) $\forall t \in \mathbf{R},\ F(t+\pi) = F(t)$;
   (b) $\exists A \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ s_n > A$;
   (c) $\forall u, v \in \mathbf{R},\ F(u) F(v) > 0$;
   (d) $\forall M \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N},\ |\sigma_n| > M$;
   (e) $\forall \tau \in \mathbf{R},\ F(\tau) = -F(-\tau)$;
   (f) $\begin{matrix} \forall q \in \mathbf{Q} \\ \forall i \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{matrix},\ q + i \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
4. *Formaliser le plus explicitement possible les énoncés suivants :*
   (a) *la suite* σ *est bornée ;*
   (b) *la suite* s *n'est pas positive ;*
   (c) *la suite* s *est monotone ;*
   (d) *la suite* s *n'est pas minorée ;*
   (e) *l'un (au moins) des termes de la suite* s *est de module inférieur à* 1 *;*
   (f) *l'application* F *est constante ;*
   (g) *l'application* F *ne croît pas ;*
   (h) *l'application* F *ne change pas de signe ;*
   (i) *l'application* F *croît strictement ;*
   (j) *est imaginaire pur le produit de chaque paire de complexes d'argument* 3.

3 ensembles & applications

Pour chaque ensemble E, on notera

1. d'une part $\mathfrak{P}(E)$ ou $\mathcal{P}(E)$ son ensemble des parties (lettre "P" gothique ou liée),
2. d'autre part Id_E ou $\underset{E}{\mathrm{Id}}$ l'application identité de E définie par $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ e & \longmapsto & e \end{array} \right.$.

3.1 graphes classiques

Nommer en français et déterminer les objets suivants :

$$\begin{array}{l} \cos\left(\ [-4,3]\ \right) \qquad \sin^{-1}\left(\ [-3,1]\ \right) \qquad \mathrm{ch}\left(\ ]-\ln 2, \ln 3[\ \right) \qquad \tan^{-1}\left(\ [1,\infty[\ \right) \\ \mathrm{th}^{-1}\left(\ [e,\pi]\right) \qquad \arctan\left(\ [1,\infty[\ \right) \qquad \cos\left(\mathbf{R}\right) \quad \exp\left(\mathbf{C}\right) \qquad \mathrm{sh}^{-1}\left(\mathbf{C}\right). \end{array}$$

3.2 axiome de collecte

On considère dans la théorie des ensembles le schéma[1] d'énoncés suivant :

pour chaque prédicat binaire P_x^y, on a les implications

$$\forall A,\ \left(\forall a \in A,\ \exists B,\ \forall b,\ \left(b \in B \Longleftrightarrow P_a^b\right)\right) \Longrightarrow \left(\exists B,\ \forall b,\ \left[b \in B \Longleftrightarrow \left(\exists a \in A,\ P_a^b\right)\right]\right).$$

Interpréter cet énoncé par tous les moyens possibles (français, dessin...) jusqu'à en mettre à jour une signification claire et limpide.

3.3 axiome de fondation

Considérons les énoncés suivants :

1. aucun ensemble ne s'appartient ;
2. il n'y a aucun "cycle" d'ensembles pour la relation $\in$;
3. il n'y a aucune suite décroissant strictement au sens de l'appartenance ;
4. chaque ensemble possède un élément qui est minimal[2] pour la relation $\in$.

Formaliser chacun de ces énoncés et établir qu'il sont tous équivalents.

On pourra utiliser l'axiome du choix sous la forme suivante :
pour chaque prédicat dyadique P_y^x, on a les implications

$$\begin{array}{c} \forall A \\ \forall B \end{array},\ \left(\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ P_b^a\right) \Longrightarrow \left(\exists b \in B^A,\ \forall a \in A,\ P_{b(a)}^a\right).$$

[1] *schéma* car ces énoncés ont la même *forme*, seul change le prédicat P_x^y

[2] étant donnée une relation binaire, un objet est qualifié de ***minimal*** (pour cette relation) si aucun objet ne vient strictement avant lui

3.4 images directes & réciproques

Soient E et F deux ensembles, soit $f \in F^E$.

1. *Soient i et s deux applications telles que la composée $s \circ i$ fait sens et vaut l'application identité (d'un ensemble à préciser). Montrer alors l'injectivité de i et la surjectivité de s.*
2. *Soient* $\begin{array}{c} A \subset E \\ B \subset F \end{array}$. *Rappeler les sens et nom des notations $f(A)$ et $f^{-1}(B)$. Comment ne pas les confondre avec les images de A et B par resp. f et f^{-1} ?*
3. *Montrer les inclusions* $\left\{ \begin{array}{c} \forall A \subset E,\ A \subset f^{-1} f(A) \\ \forall B \subset F,\ f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B \end{array} \right.$.

   On note $f_* : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right.$ et $f^* : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(F) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$.
4. *Traduire sans signe "$\circ$" ni "Id" les égalités $f^* \circ f_* = \underset{\mathfrak{P}(E)}{\mathrm{Id}}$ et $f_* \circ f^* = \underset{\mathfrak{P}(F)}{\mathrm{Id}}$.*
5. *Montrer que l'injectivité de f découle de celle de f_* ou de la surjectivité de f^*.*
6. *En déduire les équivalences*

$$f \text{ est injective} \iff f_* \text{ est injective} \iff f^* \text{ est surjective} \iff f^* \circ f_* = \underset{\mathfrak{P}(E)}{\mathrm{Id}}.$$

7. *Établir de même les équivalences*

$$f \text{ est surjective} \iff f_* \text{ est surjective} \iff f^* \text{ est injective} \iff f_* \circ f^* = \underset{\mathfrak{P}(F)}{\mathrm{Id}}.$$

8. *Conclure aux équivalences*

$$f \text{ est bijective} \iff f^* \text{ est bijective} \iff f_* \text{ est bijective.}$$

3.5 dénombrabilité de Z

Pour chaque réel r, on rappelle que $\lfloor r \rfloor$ (resp. $\lceil r \rceil$) dénote l'unique entier n tel que $n \leq r < n+1$ (resp. $n < r \leq n+1$).

Montrer que les applications $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i \end{array} \right.$ *et* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ z & \longmapsto & \left\lceil \frac{z}{2} \right\rceil (-1)^{2\left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor - z} \end{array} \right.$ *sont des bijections réciproques l'une de l'autre.*

4 récurrence

4.1 exploration

On appelle P la suite $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^* & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ n & \longmapsto & \prod_{p=2}^{n} \frac{p^2-1}{p^2} \end{array} \right.$.

1. *Motiver la notation* P.
2. *Calculer* P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.
3. *Intuiter une forme générale pour* $P_?$ *sans signe* "$\prod$" *et prouver l'égalité correspondante.*
4. *Donner une* autre *démonstration, l'une exactement de ces deux preuves devant utiliser la récurrence.*

4.2 éviter des entiers

1. *Exhiber une application* $f : N \longrightarrow N$ *telle que* $f + f^{\circ 2} + f^{\circ 3} = \mathrm{Id}_{\mathbf{N}}$.
2. *Reformuler l'égalité ci-dessus sans* "$\circ$" *ni* "Id".
   Soit un f comme ci-dessus
3. *Montrer la nullité de l'image par* f *de* 0.
4. *Étudier l'injectivité de* f.
5. *Montrer par récurrence que* f *vaut l'application trouvée à la question 1.*

4.3 de l'itération

On abrégera $S_n := \mathbf{N} \cap [0, n]$ pour chaque naturel n.

Considérons l'énoncé suivant de la théorie des ensembles :

$$\forall A, \quad \begin{array}{c} \forall @ \in A \\ \forall f \in A^A \end{array}, \ \exists ! a \in A^{\mathbf{N}}, \ \left\{ \begin{array}{c} a_0 = @ \\ \forall n \in \mathbf{N}, \ a_{n+1} = f(a_n) \end{array} \right. .$$

1. *En donner une interprétation en français.*
   Soient $A, @, f$ comme ci-dessus. Pour chaque symbole $\square$ on abrège

$$E_\square \text{ l'existence } \exists ! a \in A^{S_\square}, \ \left\{ \begin{array}{c} a_0 = @ \\ \forall i \in S_{\square - 1}, \ a_{i+1} = f(a_i) \end{array} \right. .$$

2. *Montrer les existences* $\forall N \in \mathbf{N}, \ E_N$ *par récurrence puis en déduire l'énoncé du tout début.*
   (a) *Montrer qu'il y a une unique suite réelle positive* p *telle que* $p_0 = 42$ *et* $\forall n \in \mathbf{N}, \ p_{n+1} = \sqrt{6 + p_n}$.
   (b) *Étudier la convergence d'une telle suite. (On pourra utiliser une dérivée.)*