Quelques éléments ensemblistes

Solution proposée.

1. On a d'une part les équivalences

$$A \not\subset B \iff \neg(A \subset B) \iff \neg(\forall x,\ x \in A \Longrightarrow x \in B) \iff \exists x,\ \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B \end{array}\right.,$$

(*interprétation* : A n'est pas inclus dans B ss'il y a un élément de A qui ne tombe pas dans B), d'autre part les équivalences[1]

$$A \subsetneq B \iff \left\{\begin{array}{l} A \subset B \\ B \neq A \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A \subset B \\ \neg\left\{\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array}\right. \end{array}\right. \overset{?}{\iff} \left\{\begin{array}{l} A \subset B \\ \neg(B \subset A) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \forall x,\ x \in A \Longrightarrow x \in B \\ \exists x,\ \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ x \notin A \end{array}\right. \end{array}\right.$$

(*interprétation* : A est strictement inclus dans B ssi chaque élément de A appartient à B mais s'il y a un élément de B hors de A).

2. Notons P le prédicat singulaire $x \notin x$ (où x est générique), supposons l'existence $\exists E,\ \forall x,\ (x \in E \iff P_x)$, soit un tel E, on a alors les équivalences $\forall x,\ (x \in E \iff P_x)$, d'où en remplaçant x par E l'équivalence $E \in E \iff P_E$, *i. e.* (par définition de P) l'équivalence $E \in E \iff E \notin E$, laquelle est une antilogie de la forme $\mathbb{A} \iff \overline{\mathbb{A}}$, de laquelle on peut déduire n'importe quel énoncé.

   Interprétation : bien qu'à chaque ensemble corresponde un prédicat qui en détermine les éléments (à savoir : appartenir à l'ensemble considéré), il n'est pas "vrai" que, réciproquement, à chaque prédicat corresponde un ensemble dont les éléments sont les objets vérifiant le prédicat considéré. En d'autres termes, la notion de "classe" (d'objets vérifiant un prédicat) est "strictement plus large" que celle d'ensemble.

   Pour préciser les choses (toujours au niveau d'un guide intuitif), la classe considérée $\{x\ ;\ x \notin x\}$ dans la preuve explosive ci-dessus est en fait la classe *totale* : chaque ensemble lui appartient[2]. Les deux ingrédients clef de la preuve sont alors les suivants : d'une part donner droit d'existence à cette classe *énorme*, d'autre part pouvoir considérer cette classe comme *élément* d'un certain ensemble.

   On pourrait édifier une théorie des ensembles et des classes (*i. e.* formaliser le langage pratique et informel des classes) en différenciant deux types objets : les *ensembles*, d'une part, qui peuvent avoir des éléments ou être éléments d'un autre objet, et les *classes*, d'autre part, qui ne peuvent que avoir des éléments et jamais être éléments d'un autre objet. La démarche "classique" ne suit pas ce chemin et préfère bloquer tout le suite la considération des "grosses" classes en limitant les axiomes de séparation *au sein d'ensembles faisant déjà sens*[3].

3. **(ne rien dire)**

   (a) Soit O un autre ensemble sans élément. On a alors les non-appartenance $\forall x,\ \left\{\begin{array}{l} x \notin O \\ x \notin \emptyset \end{array}\right.$, d'où pour chaque x l'équivalence $x \in O \iff x \in \emptyset$ (les deux membres sont réfutables) et l'égalité $O = \emptyset$ par généralisation.

   (b) L'énoncé à montrer équivaut aux implications $\forall x,\ x \in \emptyset \Longrightarrow P$ dont la prémisse de chacune est réfutable (le vide $\emptyset$ ne contient aucun élément !), donc est un théorème.

   Interprétation : les éléments de l'ensemble vide vérifient n'importe quelle propriété. C'est sans aucun intérêt puisqu'il n'y en aucun ! C'est l'archétype-même d'un énoncé *vide de sens*.

   L'ensemble $\emptyset$ vérifie-t-il pour autant chaque propriété ? Absolument pas ! Par exemple, il est – comme chaque objet – un contre-exemple à la propriété "ne pas être identique à soi-même". C'est quand on "descend" *au niveau de ses éléments* que l'on peut tout dire, puisque cela revient à ne rien dire du tout.

4. **(paires)**

   (a) On peut mettre dans un même "sac" deux objets donnés, ce qui crée un nouvel objet ayant pour éléments précisément ces deux objets.

---

[1] on utilise pour l'équivalence $\overset{?}{\iff}$ le calcul propositionnel $\mathbb{A} \wedge \overline{\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}}$ éq $\mathbb{A} \wedge \left(\overline{\mathbb{A}} \vee \overline{\mathbb{B}}\right)$ éq $\left(\mathbb{A} \wedge \overline{\mathbb{A}}\right) \vee \left(\mathbb{A} \wedge \overline{\mathbb{B}}\right)$ éq $\perp \vee \left(\mathbb{A} \wedge \overline{\mathbb{B}}\right)$ éq $\mathbb{A} \wedge \overline{\mathbb{B}}$.

[2] Imaginer en effet un sac qui, quand on l'ouve, contient des objet mais également le même sac ! Mise en abîme assurée.

[3] Noter dans ce cas que la donnée d'un *ensemble* contenant chaque ensemble mène droit à la contradiction en reprenant la même preuve.

(b) Considérons un prédicat dyadique P. *Guide intuitif* : on demander de montrer que le quanteur universel $\forall$ "correspond" bien à une *conjonction* lorsque le "domaine de quantification" est une paire. (Cela tiendrait encore si le domaine quantifié est supposé juste *fini*.)

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\forall x,\ x \in \{a,b\}\ ,\ P_x$. Remplacer x par a livre l'implication $a \in \{a,b\} \Longrightarrow P_a$, d'où (vu l'appartenance $a \in \{a,b\}$) la conclusion P_a. On montrerait de même P_b, d'où la conjonction désirée.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $P_a \wedge P_b$, soit o tel que[4] $o \in \{a,b\}$, *i. e.* tel que $o = a \ \vee \ o = b$: si $o = a$, l'hypothèse livre P_a, *i. e.* P_o, et même conclusion P_o si $o = b$, d'où P_o dans tous les cas et la conclusion $\forall x \in \{a,b\}\ ,\ P_x$.

(c) En gardant le même P, montrons la même équivalence en remplaçant $\forall$ et $\wedge$ par resp. $\exists$ et $\vee$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $P_a \vee P_b$. Si P_a, on peut (vu l'appartenance $a \in \{a,b\}$) conclure $\exists x, \left\{ \begin{array}{c} x \in \{a,b\} \\ P_x \end{array} \right.$, de même si P_b, d'où la conclusion par disjonction des cas.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\exists x, \left\{ \begin{array}{c} x \in \{a,b\} \\ P_x \end{array} \right.$. Observer déjà à o fixé les équivalences et implication

$$\left\{ \begin{array}{c} o \in \{a,b\} \\ P_o \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} o = a \ \vee \ o = b \\ P_o \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \text{ou} \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} o = a \\ P_o \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{c} o = b \\ P_o \end{array} \right. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \text{ou} \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} o = a \\ P_a \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{c} o = b \\ P_b \end{array} \right. \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ {\scriptstyle \text{ou}} \begin{array}{c} P_a \\ P_b \end{array} \right. .$$

La supposition nous permet d'évoquer-imposer un o tel que $\left\{ \begin{array}{c} o \in \{a,b\} \\ P_o \end{array} \right.$, d'où (par le calcul prédicatif ci-dessus) l'alternation désirée.

5. **(singletons)**

(a) Soient e et E. Remarquer à x fixé[5] les équivalences

$$\begin{array}{rcl} x \in \{e\} \Longleftrightarrow x \in \{e,e\} & \Longleftrightarrow & (x = e \ \vee \ x = e) \Longleftrightarrow x = e, \text{ d'où} \\ \text{les équivalences } \{e\} \subset E & \Longleftrightarrow & \forall x,\ x \in \{e\} \Longrightarrow x \in E \\ & \Longleftrightarrow & \forall x,\ x = e \Longrightarrow x \in E \\ & \Longleftrightarrow & e \in E \text{ (prendre le temps pour la dernière).} \end{array}$$

(b) Soient a et b : on a les équivalences

$$\{a\} \subset \{b\} \overset{\text{question 5a}}{\Longleftrightarrow} a \in \{b\} \underset{\text{remarque initiale}}{\overset{\text{question 5a}}{\Longleftrightarrow}} a = b$$

ce qui est plus fin que ce que l'on demande. En effet, en échangeant les rôles de a et b, on obtient l'équivalence $\{b\} \subset \{a\} \Longleftrightarrow a = b$, d'où celles

$$\{a\} = \{b\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \{a\} \subset \{b\} \\ \{b\} \subset \{a\} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = b \\ a = b \end{array} \right. \Longleftrightarrow a = b.$$

6. **(union et parties)**

(a) Soit E. L'ensemble ΔE est formé des $P \subset E$, *i. e.* des parties de E (on "monte" en rajoutant des accolades). Par ailleurs, les éléments de ∇E sont les éléments *des éléments* de E (on "descend" en regardant dans les éléments).

Interprétation primitive : si nous remplissons un coffre de voiture avec des sacs de fruits, puis vidons tous nos sacs dans une grande caisse de notre lieu d'habitation, alors cette caisse sera le *down* du coffre.

(b) Les éléments des éléments de $\{a\}$ sont les éléments de a, ils forment donc l'ensemble a, ce qui montre l'égalité $\nabla \{a\} = a$. Formellement, on a pour chaque x les équivalences

$$x \in \nabla \{a\} \Longleftrightarrow \exists e \in \{a\}\ ,\ x \in e \overset{\text{question 4c}}{\Longleftrightarrow} x \in a, \text{ d'où l'égalité } \nabla \{a\} = a.$$

[4] cette imposition est "factice", elle cache au fond une *supposition* visant à réaliser la prémisse de l'implication $o \in \{a,b\} \Longrightarrow P_o$

[5] Voyez comme on ne précise plus si x est générique ou évocable, cela n'importe plus : le contexte montre clairement que l'on va effectuer une généralisation pour affirmer $\forall x,\ x \in \{e\} \Longleftrightarrow x = e$.

Les éléments des éléments de $\emptyset$ sont les éléments de personne, donc il n'y en pas : ils forment l'ensemble vide, d'où l'égalité $\nabla\emptyset = \emptyset$. Formellement, on a à x fixé les implications

$$x \in \nabla\emptyset \Longrightarrow \exists e \in \emptyset,\ x \in e \Longrightarrow \exists e,\ \left\{\begin{array}{c} e \in \emptyset \\ x \in e \end{array}\right. \Longrightarrow \exists e,\ e \in \emptyset \Longrightarrow \perp \text{ , d'où la vacuité de } \nabla\emptyset.$$

Une remarque générale : chaque ensemble E inclut toujours, vu les inclusions $\left\{\begin{array}{c} \emptyset \subset E \\ E \subset E \end{array}\right.$, lui-même et le vide, d'où l'inclusion[6] $\{\emptyset, E\} \subset \Delta E$. Montrons qu'il n'y a rien d'autre lorsque E est vide ou un singleton.

Soit $P \subset \emptyset$, montrons la vacuité de P, *i. e.* les négations $\forall a,\ a \notin P$. Soit a tel que $a \in P$: l'hypothèse $P \subset \emptyset$ livre alors l'appartenance absurde $a \in \emptyset$, ce qui conclut. Reformulant, on vient d'établir l'inclusion $\Delta\emptyset \subset \{\emptyset\}$. Vu par ailleurs celle $\{\emptyset, \emptyset\} \subset \Delta\emptyset$ (*cf.* remarque générale), on a la double inclusion $\Delta\emptyset \overset{\subset}{\supset} \{\emptyset\}$, *i. e.* l'égalité $\Delta\emptyset = \{\emptyset\}$.

Soit a, soit $P \subset \{a\}$, montrons l'une ou l'autre des égalités $\left\{\begin{array}{c} P = \{a\} \\ \text{ou} \\ P = \emptyset \end{array}\right.$ en réécrivant cette dernière alternation sous la forme de l'implication $P \neq \emptyset \Longrightarrow P = \{a\}$. Supposons donc $P \neq \emptyset$, *i. e.* $\exists x,\ x \in P$, soit[7] $p \in P$, alors (vu l'inclusion $P \subset \{a\}$) on a $p \in \{a\}$,*i. e.* $p = a$, d'où $a \in P$, *i. e.* $\{a\} \subset P$, et l'inclusion $P \subset \{a\}$ permet de conclure à l'égalité $P = \{a\}$. Nous venons d'établir les implications $\forall P \in \Delta\{a\},\ P \in \{\emptyset, \{a\}\}$, *i. e.* l'inclusion $\Delta\{a\} \subset \{\emptyset, \{a\}\}$. Vu par ailleurs celle réciproque $\{\emptyset, \{a\}\} \subset \Delta\{a\}$ (*cf.* remarque générale), on a l'égalité $\Delta\{a\} = \{\emptyset, \{a\}\}$.

(c) Soit $x \in \nabla\Delta A$, soit $P \in \Delta A$ tel que $x \in P$: vu alors l'inclusion $P \subset A$, on a l'appartenance $x \in A$. Il en résulte l'inclusion $\nabla\Delta A \subset A$. Réciproquement, chaque $x \in A$ est élément de l'élément $\{x\} \in \Delta A$, ce qui établit l'inclusion réciproque et l'égalité $\nabla\Delta A = A$.

Soit $x \in A$, chaque élément de x est alors un élément d'un élement (x !) de A, donc est un élément de ∇A, d'où l'inclusion $x \subset \nabla A$, *i. e.* l'appartenance $x \in \Delta\nabla A$, d'où l'on tire l'inclusion $A \subset \Delta\nabla A$.

Si on a l'égalité $A = \Delta\nabla A$, définir $E := \nabla A$ montre que $A = \Delta E$ a la forme voulue. Soit réciproquement E tel que $A = \Delta E$: on a alors (d'après l'égalité $\nabla\Delta A = A$ généralisée puis spécialisée en E) les égalités

$$\Delta\nabla A = \Delta\nabla(\Delta E) = \Delta(\nabla\Delta E) = \Delta E = A.$$

(d) Considérons des entiers primitifs p et q. S'ils sont égaux, on a (la conclusion de) l'implication réciproque $\Delta^p\emptyset = \Delta^q\emptyset \Longleftarrow p = q$. Supposons à présent l'égalité $\Delta^p\emptyset = \Delta^q\emptyset$ et supposons par l'absurde que p vient strictement avant q. En appliquant p fois l'opération ∇ sur l'égalité supposée, on obtient $\nabla^p\Delta^p\emptyset = \nabla^p\Delta^q\emptyset$. Chaque "couple" $\nabla\Delta$ disparaît alors d'après la question 6c et il ne reste que $\emptyset = \Delta^{q-p}\emptyset = \Delta(\Delta^n)$ où l'entier primitif $n := q - p - 1$ est positif vu la supposition $p < q$. L'ensemble $E := \Delta^n$ fait donc sens et l'*up* $\Delta E = \emptyset$ contient au moins un élément (le vide, *cf* remarque générale question 6b), d'où la contradiction. Ceci montre que p vient après q. En échangeant les rôles de p et q (ce qui ne modifie pas l'hypothèse $\Delta^p\emptyset = \Delta^q\emptyset$ symétrique en p et q), on montre de même que q vient après p – et finalement qu'ils sont égaux.

7. **(couples)**

(a) Soient a, b. Les éléments de $\langle a, b\rangle$ étant $\{a\}$ et $\{a, b\}$, ensembles dont les éléments sont resp. a d'une part, a et b d'autre part, les éléments des éléments de $\langle a, b\rangle$ sont a et b, lesquels sont les éléments de la paire $\{a, b\}$.

(b) Soit c un couple et soient a, b tels que $c = \langle a, b\rangle$. Une idée pour distinguer les deux "coordonnées" a et b est de dire que celle de gauche appartient à $\{a\}$ et à $\{a, b\}$, *i. e.* à chaque élément du couple c, tandis que la "coordonnée" de droite b appartient à $\{a, b\}$ mais pas à $\{a\}$, *i. e.*[8] à un seul exactement des élément de c. Ceci motive les définition et les notations[9] de $\overleftarrow{c}$ et $\overrightarrow{c}$.

[6] qui abrège la conjonction des appartenances $\emptyset \in \Delta E \ \wedge\ E \in \Delta E$

[7] là il s'agit bien d'une imposition (soit p tel que $p \in P$) légitimée par l'existence $\exists x,\ x \in P$

[8] en fait, l'objet b peut appartenir au singleton $\{a\}$, à savoir quand $a = b$, mais dans ce cas l'ensemble c n'a alors plus qu'un élément et notre description avec unicité tient encore la route

[9] les sens des flèches indiquent les places des "coordonnées" visées

i. Montrons l'égalité $a = \overleftarrow{c}$. On a pour chaque $x \in \nabla c = \{a, b\}$ les équivalences

$$\begin{array}{cl} & \forall X \in c,\ x \in X \\ \iff & \forall X \in \{\{a\}, \{a,b\}\},\ x \in X \\ \overset{\text{question 4b}}{\iff} & x \in \{a\} \ \wedge\ x \in \{a,b\} \\ \overset{\text{question 5a}}{\iff} & x = a \ \wedge\ x \in \{a,b\} \\ \overset{a \in \{a,b\}}{\iff} & x = a. \end{array}$$

L'ensemble $\{x \in \nabla c\ ;\ \forall X \in c,\ x \in X\}$ se réécrit donc $\{x \in \nabla c\ ;\ x = a\}$, ou plus simplement $\{a\}$ vu l'appartenance $a \in \{a,b\} = \nabla c$, d'où l'égalité $\overleftarrow{c} = \nabla \{a\} = a$ (d'après la question 6b).

ii. Montrons l'égalité $b = \overrightarrow{c}$. Notons E l'ensemble dont $\overrightarrow{c}$ est le *down* et montrons l'égalité $E = \{b\}$, ce qui conclura à l'égalité $\overrightarrow{c} = \nabla \{b\} = b$ (toujours d'après la question 6b).

Soit $e \in \{a,b\}$ et simplifions la condition décrivant E :

$$\exists! X \in c,\ e \in X \quad \text{éq.} \quad \underbrace{\exists X \in c,\ e \in X}_{\text{existence}} \ \wedge\ \underbrace{\forall X, Y \in c,\ \left\{\begin{array}{l} e \in X \\ e \in Y \end{array}\right. \Longrightarrow X = Y}_{\text{unicité}}.$$

L'existence équivaut (d'après la question 4b) à l'alternation $e \in \{a\}\ \vee\ e \in \{a,b\}$, *i. e.* à l'appartenance $e \in \{a,b\}$, *i. e.* au tautologique vu que cette appartenance a été imposée : la conjonction se réduit donc à l'unicité. Celle-ci équivaut (toujours d'après la question 4b) à quatre implications, deux étant tautologiques (quand X et Y sont identiques) et les deux autres équivalentes par symétrie des rôles joués par X et Y, donc équivaut à la seule implication $\left\{\begin{array}{c} e \in \{a\} \\ e \in \{a,b\} \end{array}\right. \Longrightarrow \{a\} = \{a,b\}$, dont la prémisse équivaut à l'appartenance $e \in \{a\}$ et la conclusion à l'égalité $a = b$. On obtient finalement la description plus simple

$$E = \{x \in \{a,b\}\ ;\ x = a \Longrightarrow a = b\}.$$

Cette dernière montre l'appartenance $b \in E$ (grâce à la symétrie de $=$) : si par ailleurs E contenait un élément *différant* de b, cet élément de $\{a,b\}$ serait alors a, d'où (vu la description de E) l'implication $a = a \Longrightarrow a = b$ et la conclusion $a = b$ absurde (l'élément étranger *différait* de b). *Conclusion* : l'ensemble E est réduit au singleton $\{b\}$, CQFD.

iii. **Autre solution pour établir $E = \{b\}$ (plus bricolage, moins technique).** On distingue les cas suivant l'égalité ou non de a et b.

Supposons $a = b$. Le couple c se réduit alors au singleton $\{\{b\}\}$ et son *down* au singleton $\{b\}$. Puisque b appartient à l'unique élément $\{b\}$ de c, il vérifie la condition décrivant E ; or ce dernier est par définition inclus dans $\nabla c = \{b\}$, ce qui conclut.

Supposons $a \neq b$. Les paires $\{a\}$ et $\{a,b\}$ sont alors distinctes. Par conséquent, d'une part a appartient à deux éléments distincts de c, donc n'appartient pas à E, d'autre part b appartient à un unique élément de c (à $\{a,b\}$ mais pas à $\{a\}$), donc appartient à E. d'où la conclusion.

(c) Soient $\begin{smallmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{smallmatrix}$, abrégeons c et γ les couples resp. $\left\langle \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right\rangle$ et $\left\langle \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right\rangle$. Le sens réciproque $\boxed{\Longleftarrow}$ est trivial (par égalité de termes obtenus après substitution de termes égaux). Par ailleurs, de l'égalité $c = \gamma$ on déduirait celles $\left\{\begin{array}{l} \overleftarrow{c} = \overleftarrow{\gamma} \\ \overrightarrow{c} = \overrightarrow{\gamma} \end{array}\right.$, *i. e.* $\left\{\begin{array}{l} a = \alpha \\ b = \beta \end{array}\right.$ (d'après la question 7b), d'où le sens direct $\boxed{\Longrightarrow}$.

Remarque. On peut traiter directement cette question en distinguant à plusieurs reprises selon les égalités $a = \alpha$ ou $b = \beta$. Cela serait indéniablement plus court mais également beaucoup plus obscur.

Remarque. Au lieu de la paire $\{\{a\}, \{a,b\}\}$, on aurait également pu choisir les paires $C := \{a, \{a,b\}\}$ ou $\Gamma := \{\{a\}, \{\emptyset, \{b\}\}\}$. Dans le premier cas, l'abscisse a est l'unique objet étant élément à la fois de C et d'un élément de ce dernier[10], ce qui s'écrit $a = \nabla (C \cap \nabla C)$, puis b est l'unique objet o (peu importe dans quoi contenant b, *e. g.* ∇C) formant avec le a précédent une paire élément de C, ce qui s'écrit $b = \nabla \{o \in \nabla C\ ;\ \{a, o\} \in C\}$. Dans le second cas, les deux éléments de Γ se distinguent par leurs *cardinaux*, une idée (attribuée à Norbert WIENER) qui permettrait de définir des "couples" de longeur arbitaires.

[10] L'axiome de fondation intervient toutefois pour éviter les $\in$-boucles, par exemple si $a = \{\{a\}\}$, auquel cas les couples $C(a,a)$ et $C(\{a\}, \{a\})$ sont égaux sans que l'on ait en général l'égalité $a = \{a\}$.