Quelques éléments ensemblistes

On se place dans le langage des ensembles. Il n'a qu'un seul symbole de relation, binaire, noté $\in$ et appelé ***appartenance***.

Si P et τ dénotent resp. un prédicat singulaire et un terme, on notera P_τ le prédicat obtenu en remplaçant dans P chaque occurrence non quantifiée de sa lettre générique par la lettre τ. Par ailleurs

l'énoncé $\forall x \in A,\ P_x$ abrégera les implications $\forall x,\ [x \in A \Longrightarrow P_x]$
l'énoncé $\exists x \in A,\ P_x$ abrégera l'existence $\exists x,\ [x \in A\ \wedge P_x]$

On définit une autre relation binaire, notée $\subset$, appelée ***inclusion*** et définie par

$$A \subset B \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall x,\ x \in A \Longrightarrow x \in B,$$

puis une relation binaire, notée $=$, appelée ***égalité*** et définie par

$$A = B \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array} \right. .$$

Comme il est usuel, barrer un symbole de relation dénotera la *négation* de cette dernière : par exemple les symboles $a \notin A$ abrégeront $\neg\,(a \in A)$ et la notation $E \neq F$ signifiera $\neg\,(E = F)$.

1. **(inclusions)** *Soient A et B (deux ensembles). Expliciter autant que possible la non-inclusion*[1] $A \not\subset B$, *puis l'inclusion stricte*[2] $A \subsetneq B$. *Interpréter.*
2. **(antinomie de Russell)** *Supposons pour chaque prédicat singulaire P l'existence $\exists E,\ \forall x,\ (x \in E \Longleftrightarrow P_x)$. En utilisant le prédicat "ne pas s'appartenir à soi-même", établir une contradiction en théorème. Commenter.*
3. **(ne rien dire)** *Soit $\emptyset$ un ensemble ne possédant aucun élément.*
   (a) *Montrer que chaque ensemble sans aucun élément égale $\emptyset$.*
   (b) *Montrer pour chaque prédicat P l'énoncé $\forall x \in \emptyset,\ P_x$. Interpréter.*

   Dorénavant, on supposera l'existence d'un ensemble sans élément et on l'en invoque un que l'on notera $\emptyset$ et appellera ***l('ensembl)e vide***.
4. **(paires)** On rajoute un symbole d'opération binaire, noté $\{\ ,\ \}$, appelé ***paire*** et vérifiant les équivalences

   $$\forall a, b, x,\ [x \in \{a, b\} \Longleftrightarrow\ x = a\ \vee\ x = b]\,.$$

   (a) *Interpréter l'opération "paire".*
   (b) *Établir pour chaque prédicat dyadique P l'équivalence*

   $$[\forall x \in \{a, b\}\,,\ P_x] \Longleftrightarrow\ P_a \wedge P_b.$$

   Généraliser et commenter.
   (c) *Proposer et démontrer un énoncé analogue avec le quanteur $\exists$.*
5. **(singletons)** Pour chaque symbole $\lozenge$, on abrège $\{\lozenge\} := \{\lozenge, \lozenge\}$.
   (a) *Montrer les équivalences $\forall e, E, \quad e \in E \Longleftrightarrow \{e\} \subset E$.*
   (b) *En déduire les équivalences $\forall a, b, \quad \{a\} = \{b\} \Longleftrightarrow a = b$.*
6. **(union et parties)** On rajoute deux symboles d'opération singulaires Δ et ∇, appelés resp. ***up*** et ***down***[3] et vérifiant pour chaque ensemble E les équivalences

   $$\left\{ \begin{array}{l} \forall P,\ [P \in \Delta E \Longleftrightarrow P \subset E] \\ \forall \varepsilon,\ [\varepsilon \in \nabla E \Longleftrightarrow (\exists e \in E,\ \varepsilon \in e)] \end{array} \right. .$$

---

[1] çàd la négation $\neg\,(A \subset B)$
[2] *i. e.* la conjonction $A \subset B \wedge A \neq B$
[3] noms motivés par les sens verticaux des flèches triangulaires Δ et ∇

(a) *Interpréter les opérations "up" et "down".*

Soient a et A deux ensembles.

(b) *Décrire les éléments des deux downs* $\nabla\{a\}$ *et* $\nabla\emptyset$ *puis ceux des deux ups* $\Delta\emptyset$ *et* $\Delta\Delta\emptyset$.

(c) *Établir les égalités et inclusions*

$$\nabla\Delta A = A \subset \Delta\nabla A$$

et montrer que la dernière inclusion est une égalité ssi A *peut s'écrire* ΔE *pour un certain ensemble* E.

(d) *En déduire, pour chaques entiers primitifs* p *et* q*, l'équivalence*[4]

$$\Delta^p\emptyset = \Delta^q\emptyset \Longleftrightarrow p = q.$$

7. **(couples)** Pour chaques objets a, b on appelle "***couple*** a b"

$$\text{la paire } \{\{a\},\{a,b\}\}, \text{ notée } \langle a,b\rangle \text{ ou } \left\langle\begin{matrix} a \\ b\end{matrix}\right\rangle.$$

Pour chaque objet c, on abrège (on admet les axiomes de séparation)

$$\begin{cases} \overleftarrow{c} := \nabla\{x \in \nabla c\ ;\ \forall X \in c,\ x \in X\} \\ \overrightarrow{c} := \nabla\{x \in \nabla c\ ;\ \exists! X \in c,\ x \in X\} \end{cases}.$$

(a) *Montrer les égalités* $\forall a, b,\ \nabla\langle a,b\rangle = \{a,b\}$.

(b) *Établir pour chaque couple* c *l'égalité* $c = \langle\overleftarrow{c}, \overrightarrow{c}\rangle$. *On motivera avant toute chose les définitions de* $\overleftarrow{c}$ *et* $\overrightarrow{c}$ *dans ce cadre.*

(c) *En déduire les équivalences* $\forall^{a\ \alpha}_{b\ \beta},\ \left\langle\begin{smallmatrix} a \\ b\end{smallmatrix}\right\rangle = \left\langle\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\end{smallmatrix}\right\rangle \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \end{cases}$.

[4] Pour chaque entier primitif n, la notation $\Delta^n\emptyset$ remplace $\Delta\Delta\cdots\Delta\emptyset$ où il y a n symboles Δ à gauche du $\emptyset$. Nous laissons par ailleurs à la lectrise le soin de démêler les niveaux primitif et formel concernant l'égalité $p = q$.