Des quanteurs

(pour s'exercer au jeu de preuve prédicatif)

Composition de prédicats dyadiques.

Solution proposée.

1. Considérons un prédicat dyadique F univoque. Alors à chaque objet o correspond *au plus* un objet ω tel que F_o^ω (le premier argument de F ne peut prendre qu'*une seule* "direction", d'où le qualificatif "*univoque*"). Le prédicat F permet donc de définir une *fonction* qui à chaque objet a associe l'unique objet b tel que F_a^b (s'il fait sens).
2. Supposons notre langage muni d'une égalité qui soit réflexive (çàd telle que chaque objet s'égale) et qui ne discerne pas les objets égaux (çàd telle que chaques objets égaux vérifient les mêmes prédicats).

   Analyse. Considérons N un prédicat neutre pour $\circ$. Soient a, b. En choisissant pour P le prédicat "égalité", on obtient les équivalences

   $$a = b \iff P_a^b \iff [N \circ P]_a^b \iff \exists x,\ N_x^b \wedge P_a^x \iff \exists x,\ N_x^b \wedge (a = x) \overset{?}{\iff} N_a^b.$$

   Si l'on justifie la dernière équivalence $\overset{?}{\iff}$, nous aurons montré que N est l'égalité (et l'on arrêtera alors l'analyse). Pour le sens $\boxed{\Longrightarrow}$ il suffit de remplacer dans N_x^b le x par le a venant de l'égalité $a = x$ (on utilise l'indiscernabilité d'objets égaux) ; pour le sens $\boxed{\Longrightarrow}$, on utilise simplement l'égalité de chaque objet avec lui-même.

   Synthèse. Montrons que l'égalité (notée E) est neutre pour $\circ$. Soient a, b. On a alors les équivalences

   $$\begin{aligned} [E \circ P]_a^b &\iff \exists x,\ (x = b) \wedge P_a^x \iff P_a^b \\ \text{et } [P \circ E]_a^b &\iff \exists x,\ P_x^b \wedge (a = x) \iff P_a^b. \end{aligned}$$

   Remarque. En termes de *fonctions*, le prédicat E correspondra la "fonction" identité qui envoie chaque objet sur lui-même.

   Bonus. Ces questions visent à montrer que le prédicat N vérifie les axiomes d'une égalité[1] : indistinguabilité (*i. e.* identité au sens de Leibniz), réflexivité, symétrie, transitivité.

   (a) Notons P le prédicat[2] binaire $\pi_x \wedge \pi_y$ (où x et y sont génériques) et montrons l'équivalence souhaitée par double-implication.

   Supposons π_a, *i. e.* P_a^a. On a alors la conjonction $N_a^b \wedge P_a^a$, d'où l'existence $\exists x,\ N_x^b \wedge P_a^x$, *i. e.* $[N \circ P]_a^b$, ou encore P_a^b, *i. e.* $\pi_a \wedge \pi_b$, d'où π_b.

   Supposons π_b, *i. e.* P_b^b. On a alors la conjonction $P_b^b \wedge N_a^b$, d'où l'existence $\exists y,\ P_y^b \wedge N_a^y$, *i. e.* $[P \circ N]_a^b$, ou encore P_a^b, *i. e.* $\pi_a \wedge \pi_b$, d'où π_a.

   (b) Soient a, b, c tels que $\left\{ \begin{array}{l} a \equiv b \\ b \equiv c \end{array} \right.$. Notons π le prédicat singulaire $a \equiv x$ (où x est générique). L'hypothèse $a \equiv b$ se réécrit alors π_b, d'où π_c (par l'hypothèse $b \equiv c$ et la question 2a), ce qui se réécrit $a \equiv c$, CQFD.

   (c) Notons P le prédicat[3] binaire tel que P_x^y est $y \not\equiv x$ (*i. e.* $\neg N_y^x$, où x et y sont génériques). On a alors pour chaques a, b les équivalences

   $$b \not\equiv a \iff P_a^b \iff [N \circ P]_a^b \iff \exists x,\ (x \equiv b) \wedge (x \not\equiv a) \iff \exists x,\ \overline{x \equiv b \Longrightarrow x \equiv a}, \text{ d'où}$$
   $$\text{(en remplaçant } b \text{ par } a \text{ et en contraposant) l'équivalence } a \equiv a \iff \forall x,\ x \equiv a \Longrightarrow x \equiv a.$$

   Les implications de droite étant tautologiques (toujours à a fixé), l'équivalence ci-dessus équivaut à $a \equiv a$, CQFD.

[1] Lorsque le langage (prédicatif) choisi contient un symbole d'égalité $=$, il est usuel de se doter de ces axiomes, lesquels sont motivés par leur utilisation inconditionnelle dans la pratique mathématique.

[2] Avant de chercher compliqué, il faut commencer par le plus *simple* possible – fût-ce par du trivial. Essayons donc de construire un P à l'aide déjà d'*un seul* des prédicats à disposition (à savoir : N et π). Comme on veut conclure à quelque chose avec du π, essayons avec π. Ce dernier est monadique et l'on veut créer un prédicat dyadique : essayons $\pi_x * \pi_y$ où $*$ est un connecteur à choisir judicieusement. On constate alors, en explorant, que la conjonction nous mène au bon endroit.

[3] Avant de chercher compliqué, il faut essayer des prédicats *simples*. Le seul prédicat à disposition est N. Remplacer P par N ne conduit pas à grand chose. Le remplacer par $\neg N$ est déjà plus intéressant mais on voit dans les calculs qu'échanger les places des génériques permet de conclure.

(d) Soient a, b tels que $a \equiv b$ et notons π le prédicat singulaire $b \equiv x$ (où x est générique). La question 2c livre alors π_b, d'où π_a (d'après la question 2a), *i. e.* $b \equiv a$, CQFD.

3. Considérons trois prédicats dyadiques P, Q, R et soient a, b. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} [[R \circ Q] \circ P]_a^b &\iff \exists x,\ [R \circ Q]_x^b \wedge P_a^x \iff \exists x,\ \left(\exists y,\ R_y^b \wedge Q_x^y\right) \wedge P_a^x \\ [R \circ [Q \circ P]]_a^b &\iff \exists y,\ R_y^b \wedge [Q \circ P]_a^y \iff \exists y,\ R_y^b \wedge (\exists x,\ Q_x^y \wedge P_a^x) \end{aligned}$$

Or à x fixé le prédicat P_a^x ne dépend pas de y et on peut le faire rentrer dans la conjonction $\left(\exists y,\ R_y^b \wedge Q_x^y\right) \wedge P_a^x$, au sens où cette dernière équivaut à $\exists y,\ R_y^b \wedge Q_x^y \wedge P_a^x$ (*sanity check* : bien vérifier les deux sens "à la main"). Pour la même raison, à y fixer la conjonction $R_y^b \wedge (\exists x,\ Q_x^y \wedge P_a^x)$ équivaut à $\exists x,\ R_y^b \wedge Q_x^y \wedge P_a^x$. Finalement, nos deux énoncés ci-dessus équivalent chacun à

$$\begin{matrix} \exists x \\ \exists y \end{matrix},\ R_y^b \wedge Q_x^y \wedge P_a^x.$$

Remarque. Il serait aisé de généraliser au composé d'un nombre quelconque de prédicats binaires $P, Q, R, ..., Z$:

$$[Z \circ Y \circ X \circ \cdots \circ P]_a^p \iff \exists q, r, s, ..., y, z,\ Z_y^z \wedge Y_x^y \wedge X_w^x \wedge \cdots \wedge Q_p^q \wedge P_a^p.$$

4. Considérons deux prédicats binaires P et Q univoques et montrons l'univocité de $Q \circ P$de R. Soient a, b, β tels que $R_a^b \wedge R_a^\beta$. De $\begin{matrix} R_a^b \\ R_a^\beta \end{matrix}$ on peut évoquer des $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ tels que $\left\{ \begin{matrix} P_a^x \wedge Q_x^b \\ P_a^y \wedge Q_y^\beta \end{matrix} \right.$, *i. e.* tel que $\left\{ \begin{matrix} P_a^x \\ P_a^y \end{matrix} \right. \wedge \left\{ \begin{matrix} Q_x^b \\ Q_y^\beta \end{matrix} \right.$. L'univocité de P livre (avec la conjonction $P_a^x \wedge P_a^y$) l'égalité $x = y$, puis l'univocité de Q (avec la conjonction $Q_x^b \wedge Q_{y=x}^\beta$) livre l'égalité $b = \beta$, CQFD.

Interprétation : dans la définition de $R_a^b \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists x,\ P_a^x \wedge Q_x^b$, le x est unique (par univocité de P) et correspond à l'image de a par la "fonction P", de sorte que b correspond à l'image par la "fonction Q" de l'image par la "fonction P" de a. La "fonction R" est donc la *composée* des "fonctions P et Q".

Remarque. En restreignant le résultat de la question 3 aux prédicats *univoques*, on obtient l'*associativité de la composition* des fonctions.