Des quanteurs

(pour s'exercer au jeu de preuve prédicatif)

Considérons P un (symbole de) prédicat binaire.

Si x et y sont les (lettres) génériques apparaissant dans P dans cet ordre, pour chaques termes u et v on notera P_u^v le prédicat obtenu à partir de P en remplaçant x et y par resp. u et v. Par exemple, le prédicat P_x^y est le prédicat P lui-même.

Composition & univocité de prédicats binaires. Un prédicat binaire P est qualifié d'***univoque*** (ou ***fonctionnel***) si on a les implications

$$\forall a, b, \beta,\ P_a^b \wedge P_a^\beta \Longrightarrow b = \beta.$$

À chaques prédicats dyadiques P et Q on associe le prédicat dyadique, appelé ***composé*** de P par Q et noté $Q \circ P$, défini par

$$[Q \circ P]_a^b \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \exists x,\ Q_x^b \wedge P_a^x.$$

1. *Interpréter l'univocité d'un prédicat binaire.*
2. *Sous une hypothèse raisonnable à formuler, montrer que l'opération $\circ$ admet un prédicat* **neutre***,* i. e. *un prédicat N vérifiant pour chaque prédicat binaire P les équivalences*

$$\forall a, b,\ \begin{cases} [P \circ N]_a^b \Longleftrightarrow P_a^b \\ [N \circ P]_a^b \Longleftrightarrow P_a^b \end{cases}.$$

   Bonus. Montrons que l'on peut se passer d'« hypothèse raisonnable à formuler ». Considérons N un prédicat vérifiant les équivalences ci-dessus. Pour chaques termes t et τ, la prédication N_t^τ sera plutôt notée $t \equiv \tau$.

   (a) Considérons un prédicat singulaire π et soient a, b tels que $a \equiv b$. *Montrons alors l'équivalence $\pi_a \Longleftrightarrow \pi_b$.* (*Indication* : choisir judicieusement un P défini en fonction de π.)

   (b) *En déduire la* ***transitivité*** *de $\equiv$,* i. e. *les implications $\forall a, b, c,\ \begin{cases} a \equiv b \\ b \equiv c \end{cases} \Longrightarrow a \equiv c$.*

   (c) *Établir la* ***réflexivité*** *de $\equiv$,* i. e. *les prédications $\forall a,\ a \equiv a$.* (*Indication* : choisir judicieusement un P défini en fonction de N.)

   (d) *En déduire que $\equiv$ est* ***symétrique****, au sens des implications $\forall a, b,\ a \equiv b \Longrightarrow b \equiv a$.*

3. *Montrer que l'opération $\circ$ est* ***associative****, au sens où l'on, pour chaques prédicats binaires P, Q, R, les équivalences*

$$\forall a, b,\ [[R \circ Q] \circ P]_a^b \Longleftrightarrow [R \circ [Q \circ P]]_a^b.$$

4. *Montrer que l'univocité est préservée par $\circ$, au sens où le composé de chaques prédicats univoques est encore univoque.*