

Rappel des notations. A, B et P sont trois pièces.

On choisit une occurrence¹ de la lettre A dans la composition de la pièce P .

On appelle Q la pièce obtenue en remplaçant dans la pièce P la lettre A apparaissant à l'occurrence choisie par la lettre B .

(Si A n'apparaît pas dans P , on ne change alors rien et Q dénotera simplement P .)

Solution proposée.

1. La pièce Q est la pièce-conjonction $(\perp \Leftarrow A) \vee (\neg B \Rightarrow \top)$
On suppose à présent A et B ludiquement équivalentes. On veut montrer que les pièces P et Q le sont également.

2. Dans une pièce-proposition contenant une "sous-pièce", quand l'on remplace cette dernière par une pièce qui lui équivaut ludiquement, on obtient une pièce-proposition équivalent ludiquement à la première. C'est l'analogie du résultat énoncé en cours sur la substitution de termes égaux dans une expression.

On raisonne par récurrence sur le nombre de connecteurs présent dans P comptés avec répétition

3. Pour chaque naturel primitif n , notons S_n l'énoncé primitif : "pour chaque pièce-proposition P construite avec exactement n connecteurs, pour chaque pièces A et B ludiquement équivalentes, la pièce P équivaut (ludiquement) à la même pièce où l'on a remplacé n'importe quelle occurrence de A apparaissant dans P par B ". Nous allons établir les énoncés $S_0, S_1, S_2, \dots$ par récurrence "forte", i. e. que nous allons montrer d'une part le premier énoncé S_0 , d'autre part que chaque énoncé découle de l'ensemble de ses précédents dans la liste. Tout se passe dans la sphère primitive.

4. Supposons P atomique. Alors ou bien A n'apparaît pas dans P , auquel cas la pièce obtenue après substitution reste P (qui équivaut trivialement à P vue la jouabilité de $P \Leftarrow P$), ou bien P est la pièce A , auquel cas la pièce obtenue après substitution est B (il n'y a qu'une seule occurrence de A dans P), laquelle équivaut par hypothèse à la pièce A , i. e. à P . (Ceci établit l'énoncé primitif S_0 .)

Supposons à présent P moléculaire, i. e. de la forme $U|V$ (puisque le cours a tout construit sur un seul connecteur). Si l'on note u (resp. v) le nombre de connecteurs présents dans U (resp. V), alors le nombre de connecteurs présents dans P est $u + v + 1$, lequel est strictement supérieur à u et à v (puisque u et v sont positifs!), ce qui va permettre de mener à bien la récurrence. Choisissons maintenant une occurrence de A dans P , ce qui revient à [en choisir une dans U ou bien une dans V]. Notons P', U', V' les pièces obtenues à partir de resp. P, U, V après remplacement par B de l'occurrence choisie de A . D'après les énoncés primitifs S_u et S_v , on a les jouabilités de $U' \Leftarrow U$ et de $V' \Leftarrow V$. Par conséquent, lorsque l'on compare les tables de jouabilité des pièces P et P' , i. e. des pièces $U|V$ et $U'|V'$, quelles que soient les valeurs jouable/injouable des pièces creuses, les pièces U et U' (resp. V et V') prendront toujours la même valeur, donc les valeurs de $U|V$ et $U'|V'$ seront les mêmes, d'où la jouabilité de l'équivalence $P \Leftarrow P'$. (Ceci conclut d'établir S_n en ayant supposé $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$.)

On généralise et suppose à présent que A, B et P sont des pièces-énoncés du jeu de preuve prédicatif, où la pièce-équivalence $A \Leftarrow B$ est un théorème. On garde la même définition de Q (relative au choix d'une occurrence de A dans P). On raisonne toujours par récurrence mais cette fois sur la somme du nombre de connecteurs et de celui des quanteurs.

5. On adapte l'énoncé S_n : "pour chaque pièce-énoncé E dont la somme du nombre de connecteurs et de celui des quanteurs vaut n , pour chaque pièces-énoncés A et B tels qu'est affirmée l'équivalence $A \Leftarrow B$ (hors cadre de supposition), en notant F la pièce obtenue à partir de E après remplacement par B de n'importe quelle occurrence de A , on peut alors affirmer $E \Leftarrow F$ (toujours hors cadre de supposition)". On raisonne toujours par récurrence "forte" dans la sphère primitive.

Le cas où E est relationnelle correspond à S_0 et se traite exactement pareil.

Supposons E connectant, i. e. de la forme $F|G$. Gardons les notations E', F', G' ci-dessus. On peut alors (par récurrence) affirmer $F \Leftarrow F'$ et $G \Leftarrow G'$, d'où (par la règle d'introduction de $\wedge$) la conjonction $\begin{cases} F \Leftarrow F' \\ G \Leftarrow G' \end{cases}$. Or reprendre la preuve du cas " P moléculaire" ci-dessus du jeu propositionnel per-

met pour chaque pièces-propositions U, U^*, V, V^* de jouer avec la pièce-proposition $\begin{cases} U \Leftarrow U^* \\ V \Leftarrow V^* \end{cases} \Rightarrow (U|U^* \Leftarrow V|V^*)$ (bien prendre le temps de voir pourquoi²). La règle du jeu prédicatif sur les tau-

¹ i. e. un endroit où apparaît

² Il suffit de vérifier la conclusion est jouable dès que la prémisse l'est $\begin{cases} U \Leftarrow U^* \\ V \Leftarrow V^* \end{cases}$. Or la jouabilité de cette dernière revient à celles des conjoints $U \Leftarrow U^*$ et $V \Leftarrow V^*$, i. e. aux équivalences ludiques de U avec U^* et de V avec V^* . Et l'on a montré plus haut qu'on peut alors jouer avec $U|U^* \Leftarrow V|V^*$.

togies permet alors, en remplaçant $\left(\frac{\mathbb{U}}{\mathbb{V}} \frac{\mathbb{U}^*}{\mathbb{V}^*}\right)$ par $\left(\frac{F}{G} \frac{F'}{G'}\right)$, d'affirmer la pièce-énoncé $\left\{ \begin{array}{l} F \Longleftrightarrow F' \\ G \Longleftrightarrow G' \end{array} \right\} \Longrightarrow (F|G \Longleftrightarrow F'|G')$, d'où l'on déduit (par *modus ponens*) l'équivalence $F|G \Longleftrightarrow F'|G'$, *i. e.* $E \Longleftrightarrow E'$.

Supposons enfin E de forme $\Diamond x, F$ où $\Diamond$ est un quanteur. Alors E et F ont même nombre de connecteurs mais E possède un quanteur de plus que F . Ainsi, en notant n le nombre de connecteurs et quanteurs de E , celui de F vaut $n - 1$, ce qui va permettre de mener à bien la récurrence. Gardons les notations E' et F' ci-dessus. Le problème pour utiliser l'énoncé primitif S_{n-1} est que F n'est pas forcément un énoncé car il peut contenir le générique x . Invoquons donc un invocable a et regardons l'énoncé F_a obtenu en remplaçant par a chaque occurrence de x de F . D'après S_{n-1} , on peut affirmer l'équivalence $F_a \Longleftrightarrow F'_a$, d'où (d'après l'exemple 4 ??? du cours) l'équivalence $\forall x, F_x \Longleftrightarrow \forall x, F'_x$, *i. e.* $E \Longleftrightarrow E'$.