Preuve du lemme de substitution

(très utile et très souvent utilisé)

Les pièces ludique et ennuyeuse seront resp. notées $\top$ et $\bot$
Les lettres latines majuscules dénoteront des pièces-propositions (pas forcément creuses) : A, B, C...

Regardons trois pièces A, B et P. Choisissons une occurrence de la lettre A dans la composition de la pièce P et appelons Q la pièce obtenue en remplaçant dans la pièce P la lettre A apparaissant à l'occurence choisie par la lettre B. Si A n'apparaît pas dans P, on ne change alors rien et Q dénotera simplement P.

1. *Exprimer Q quand P est la pièce-conjonction $(\bot \Longleftarrow A) \vee (\neg A \Longrightarrow \top)$ et qu'on a choisi la seconde occurrence de A.*

   On suppose à présent A et B ludiquement équivalentes. On veut montrer que les pièces P et Q le sont également.

2. *Interpréter ce résultat. Voyez-vous un fait analogue (et très souvent utilisé) lors d'un calcul avec des égalités ?*

   On raisonne par récurrence sur le nombre de connecteurs présent dans P comptés avec répétition (par exemple on comptera dans la pièce $A \wedge (\bot \wedge A) \Longrightarrow \neg A$ *quatre* connecteurs, la conjonction étant comptée *deux* fois).

3. *Préciser l'énoncé à établir par récurrence. Dans quelle sphère fait sens cet énoncé et se déroule ce raisonnement par récurrence ?*

4. *Traiter le cas où la pièce P est atomique, puis celui où elle est moléculaire.*

   On généralise et suppose à présent que A, B et P sont des pièces-énoncés du jeu de preuve *prédicatif*, où la pièce-équivalence $A \Longleftrightarrow B$ est affirmée (hors cadre supposition). On garde la même définition de Q (relative au choix d'une occurence de A dans P). On raisonne toujours par récurrence mais cette fois sur la *somme* du nombre de connecteurs *et de celui des quanteurs*.

5. *Traiter les cas où la pièce P est resp. relationnelle, connectante, quantifiante.*