Des quanteurs

(pour s'exercer au jeu de preuve prédicatif)

Interversion des quanteurs.

Solution proposée.

1.

   (a) Les énoncés U et E seront bien formés si les quantifications éventuelles y apparaissant n'utilisent pas pour lettres muettes des lettres qui dénotent *déjà*. Par exemple, si P est $\forall x,\ x = 1$, l'énoncé U s'écrit $\forall x,\ \exists y,\ \forall x,\ \boxed{x} = 1$ et on ne sait plus si la lettre x encadrée se réfère à la premier quantification ou la deuxième (dans ce cas, on peut remplacer P par $\forall z,\ z = 1$).

   (b) Supposons E et montrons U. Vu E, on peut invoquer un b tel que $\forall x,\ P_x^b$. Soit a un objet : remplacer x par a livre alors P_a^b, d'où $\exists y,\ P_a^y$ et la conclusion U par généralisation.

2.

   (a) Une formalisation possible est $\begin{array}{c}\exists u\\ \exists v\end{array},\ u \neq v$.

   (b) Invoquons de tels objets $u \neq v$ et supposons l'implication donnée pour chaque prédicat Q. En particulier, lorsque Q est le prédicat "être distinct" (présent dans l'hypothèse), on obtient l'implication $[\forall x,\ \exists y,\ x \neq y] \Longrightarrow [\exists y,\ \forall x,\ x \neq y]$. Or son conséquent est absurde (étant donné un tel y, remplacer x par y livre une contradiction $y \neq y$), donc on doit nier l'antécédent, négation qui équivaut à $\exists a,\ \forall y,\ a = y$. Soit a un tel objet : si $a = u$, alors remplacer y par v donne $a = v$, contredisant l'hypothèse $u \neq v$, sinon remplacer y par u donne $a = u$ et on a encore une contradiction $u \neq u$.