

Des quanteurs

(pour s'exercer au jeu de preuve prédicatif)

Considérons P un (symbole de) prédicat binaire.

Si x et y sont les (lettres) génériques apparaissant dans P dans cet ordre, pour chaque termes u et v on notera P_u^v le prédicat obtenu à partir de P en remplaçant x et y par resp. u et v . Par exemple, le prédicat P_x^y est le prédicat P lui-même.

Interversion des quanteurs. On abrège respectivement :

$$\begin{array}{ll} U \text{ l'énoncé universel} & \forall x, \exists y, P_x^y \\ \text{et } E \text{ l'énoncé existentiel} & \exists y, \forall x, P_x^y. \end{array}$$

1.

- (a) À quelle condition les énoncés U et E sont-ils bien formés ? Donnez un exemple de mauvaise formation.
- (b) Lorsque U et E sont bien formés, prouver l'implication $E \implies U$.

2. On s'intéresse à l'implication réciproque sous l'hypothèse d'existence de deux objets distincts.

- (a) Formaliser cette dernière hypothèse en logique des prédicats.
- (b) Montrer alors qu'on n'a pas pour chaque prédicat Q l'implication réciproque

$$[\forall x, \exists y, Q_x^y] \implies [\exists y, \forall x, Q_x^y]$$

(sous réserve que cette implication soit bien formée).